



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On travaille dans l'espace réel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, de dimension n , et $n \geq 2$ reste fixé. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on notera R_k la fonction polynôme définie par $R_k(t) = (t-1)^k$.

1. Étude de l'application F

a) Il faut vérifier que F est linéaire et prend ses valeurs dans l'espace de départ.

Soient P, R deux fonctions polynômes de cet espace et α, β deux réels. La linéarité de la dérivation donne, pour tout réel t :

$$F(\alpha P + \beta R)(t) = \alpha P(t) + \beta R(t) + \frac{1-t}{n}(\alpha P'(t) + \beta R'(t)) = \alpha F(P)(t) + \beta F(R)(t).$$

Ainsi, F est linéaire. Si P a un degré $d \geq 1$, alors P' a pour degré $d-1$ et $(1-t)P'(t)$ a un degré au plus d . Donc $F(P)$ a un degré au plus $d \leq n-1$. Si P est constant, sa dérivée est nulle et $F(P) = P$. Enfin, $F(0) = 0$.

Dans tous les cas, $F(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par conséquent, F est un endomorphisme de cet espace.

b) Pour $1 \leq k < n$, on dérive $P_k(t) = t^{n-k}$ et on obtient :

$$Q_k(t) = t^{n-k} + \frac{n-k}{n}(1-t)t^{n-k-1},$$

$$Q_k(t) = \frac{k}{n}t^{n-k} + \frac{n-k}{n}t^{n-k-1}.$$

En termes de la base donnée :

$$F(P_k) = \frac{k}{n}P_k + \frac{n-k}{n}P_{k+1}, \quad 1 \leq k < n.$$

Pour $k = n$, $P_n = 1$ est constant, donc $Q_n = 1 = P_n$. Ce cas est traité séparément pour ne pas introduire une puissance négative de t .

- c) Dans une matrice d'endomorphisme, la colonne k contient les coordonnées de l'image du k -ième vecteur de base. D'après b), M est une matrice triangulaire inférieure dont les seuls coefficients non nuls sont :

$$M_{k,k} = \frac{k}{n} \quad (1 \leq k \leq n), \quad M_{k+1,k} = \frac{n-k}{n} \quad (1 \leq k < n).$$

Tous les autres coefficients sont nuls. Cette description explicite détermine la matrice pour tout $n \geq 2$: sa diagonale est $(1/n, 2/n, \dots, n/n)$ et sa première sous-diagonale est $((n-1)/n, (n-2)/n, \dots, 1/n)$.

2. Étude des éléments propres de F

a) Méthode 1 — Utilisation de la matrice triangulaire

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire réelle sont ses coefficients diagonaux. La matrice de I.1 c) a donc pour spectre :

$$\text{Sp}(F) = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Ces n valeurs propres sont réelles et distinctes. Un endomorphisme d'un espace de dimension n possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable : les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont indépendants et forment une base. Les hypothèses sont ici satisfaites, donc F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Construction directe d'une base de vecteurs propres

Pour $1 \leq k \leq n-1$, on calcule :

$$F(R_k)(t) = (t-1)^k + \frac{1-t}{n} k(t-1)^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) (t-1)^k.$$

Pour $k=0$, $R_0 = 1$, donc $F(R_0) = R_0$. Ainsi, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, R_k est un vecteur propre non nul de valeur propre $1 - k/n$.

La famille $(R_0, \dots, R_{n-1})$ est libre. En effet, dans une combinaison linéaire nulle, si un coefficient non nul de plus grand indice était celui d'indice m , le coefficient du terme de degré m serait précisément ce coefficient non nul, ce qui est impossible. La famille contient n éléments dans un espace de dimension n : c'est donc une base de vecteurs propres.

Cela prouve directement la diagonalisation et retrouve le même spectre. La première méthode est immédiate une fois la matrice connue ; la seconde fournit la base propre utile pour calculer la suite de la question I.3.

b) La relation $F(P) = P$ équivaut à $(1 - t)P'(t) = 0$ pour tout réel t . Pour chaque $t \neq 1$, cela impose $P'(t) = 0$. Le polynôme P' a ainsi une infinité de racines ; il est donc identiquement nul, ce qui signifie que P est constant.

Réciproquement, toute fonction polynôme constante vérifie $F(P) = P$. Le sous-espace propre associé à 1 est donc :

$$\text{Ker}(F - \text{Id}) = \text{Vect}(1).$$

c) L'égalité $F(P) = \frac{n-k}{n}P$ donne, après multiplication par n et réorganisation :

$$(t-1)P'(t) = kP(t), \text{ pour tout réel } t.$$

En prenant $t = 1$, on obtient $0 = kP(1)$. Comme $k \geq 1$, cela donne $P(1) = 0$.

Puisque P est non nul et de degré au plus $n-1$, la racine 1 a une multiplicité r comprise entre 1 et $n-1$. On peut donc écrire $P(t) = (t-1)^r R(t)$, avec $R(1) \neq 0$. Sa dérivée vaut :

$$P'(t) = r(t-1)^{r-1}R(t) + (t-1)^r R'(t).$$

En substituant dans la relation précédente puis en simplifiant pour $t \neq 1$, il vient :

$$rR(t) + (t-1)R'(t) = kR(t),$$

$$(t-1)R'(t) = (k-r)R(t).$$

Cette égalité entre fonctions polynômes est également vraie en $t = 1$, par continuité. À ce point, elle donne $0 = (k-r)R(1)$. Comme $R(1) \neq 0$, on conclut $r = k$.

La relation devient alors $(t-1)R'(t) = 0$ pour tout réel t . Comme en b), elle impose $R' = 0$. Ainsi, R est une constante non nulle et son degré vaut 0. Finalement :

$$P(t) = \alpha(t-1)^k, \text{ avec } \alpha \neq 0.$$

d) Pour chaque $1 \leq k < n$, la question c) montre que tout vecteur propre associé à $1 - k/n$ est un multiple non nul de R_k . Réciproquement, le calcul de a) vérifie que $F(R_k) = (1 - k/n)R_k$; tout multiple, y compris le polynôme nul, appartient donc au noyau correspondant.

Avec le cas $k = 0$ traité en b), les sous-espaces propres sont :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \text{Ker} \left(F - \left(1 - \frac{k}{n} \right) \text{Id} \right) = \text{Vect}((t-1)^k).$$

Ils sont tous de dimension 1, et leur somme directe est l'espace entier.

3. Étude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$

a) Méthode 1 — Formule du binôme

On écrit $t = 1 + (t-1)$. La formule du binôme appliquée à la puissance entière $n-1$ donne, pour tout réel t :

$$U_1(t) = t^{n-1} = (1 + (t-1))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (t-1)^k.$$

Méthode 2 — Formule de Taylor pour les polynômes

Le polynôme U_1 a pour degré $n - 1$. Sa formule de Taylor en 1 est exacte :

$$U_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_1^{(k)}(1)}{k!} (t-1)^k.$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$, les dérivées successives donnent $U_1^{(k)}(1) = (n-1)!/(n-1-k)!$.

Donc :

$$\frac{U_1^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \binom{n-1}{k}.$$

On retrouve l'égalité demandée. Le binôme est ici le plus direct ; la formule de Taylor étend cette décomposition à un polynôme quelconque.

b) Chaque R_k est un vecteur propre de valeur propre $1 - k/n$. Par linéarité de F , appliquée à la somme finie de a) :

$$U_2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (t-1)^k,$$

$$U_3(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 (t-1)^k.$$

Pour établir la formule générale par récurrence, la propriété est vraie pour $j = 1$ d'après a). Si elle est vraie à un rang $j \geq 1$, alors :

$$U_{j+1} = F(U_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} F(R_k),$$

$$U_{j+1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^j (t-1)^k.$$

La propriété est héréditaire. On conclut que, pour tout $j \geq 1$ et tout réel t :

$$U_j(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} (t-1)^k.$$

En prenant $t = 0$, on obtient :

$$U_j(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

Toutes les raisons $1 - k/n$ utilisées ici sont strictement positives, y compris pour $k = n - 1$; aucune puissance d'une quantité nulle n'est nécessaire.

Partie II

Posons $p_{j,k} = P(X_j = k)$ pour $1 \leq k \leq n$. Chaque commande peut augmenter le nombre de fournisseurs servis de 1 au plus, et la première commande sert exactement un fournisseur. Ainsi, $1 \leq X_j \leq \min(j, n)$.

Chaque valeur i comprise entre 1 et $\min(j, n)$ est effectivement possible : on peut choisir i fournisseurs distincts pour les i premières commandes, puis adresser toutes les autres commandes au premier de ces fournisseurs. Un tel chemin a une probabilité $n^{-j} > 0$. Le support exact de X_j est donc $\{1, \dots, \min(j, n)\}$.

1. Étude de la loi des variables aléatoires X_j

- a) Question adaptée au programme actuel : les probabilités conditionnelles ne sont demandées que lorsque le conditionnement est de probabilité strictement positive. Par exemple, si $k > j$, l'événement $[X_j = k]$ est impossible.

Si $X_j = k$, exactement k fournisseurs ont déjà été servis. La commande suivante laisse ce nombre inchangé si elle choisit l'un d'eux. Le choix suivant est indépendant des commandes précédentes et uniforme parmi n fournisseurs. Donc, lorsque $p_{j,k} > 0$:

$$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k) = \frac{k}{n}.$$

Si $X_j = k - 1$, il reste $n - (k - 1) = n - k + 1$ fournisseurs non servis. La commande suivante doit être adressée à l'un d'eux pour obtenir $X_{j+1} = k$. Lorsque $k \geq 2$ et $p_{j,k-1} > 0$:

$$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k - 1) = \frac{n - k + 1}{n}.$$

Enfin, si $X_j = i$, la valeur suivante ne peut être que i ou $i + 1$. Par conséquent, pour i distinct de $k - 1$ et de k , et lorsque $p_{j,i} > 0$:

$$P(X_{j+1} = k \mid X_j = i) = 0.$$

b) On applique les probabilités totales aux valeurs possibles de X_j . Les valeurs hors de son support apportent un terme nul, sans qu'il soit nécessaire de conditionner par un événement impossible.

Pour $2 \leq k \leq n$, seuls les états k et $k - 1$ peuvent conduire à k . On obtient :

$$p_{j+1,k} = \frac{k}{n}p_{j,k} + \frac{n - k + 1}{n}p_{j,k-1}.$$

Pour $k = 1$, il n'y a pas de passage depuis 0, puisque $X_j \geq 1$. Donc :

$$p_{j+1,1} = \frac{1}{n}p_{j,1}.$$

On peut réunir les deux formules en posant $p_{j,0} = 0$. Cette convention ne désigne pas une probabilité conditionnelle : elle traduit seulement l'impossibilité de l'événement $[X_j = 0]$.

2. Étude de la suite (G_j)

a) La première commande sert exactement un fournisseur ; $X_1 = 1$ avec probabilité 1.

Ainsi :

$$G_1(t) = t^{n-1} = U_1(t).$$

En utilisant la formule de II.1 b), puis en changeant l'indice $h = k - 1$ dans la deuxième somme finie, on a :

$$G_{j+1}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p_{j,k} t^{n-k} + \sum_{k=2}^n \frac{n-k+1}{n} p_{j,k-1} t^{n-k},$$

$$G_{j+1}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p_{j,k} t^{n-k} + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{n-h}{n} p_{j,h} t^{n-h-1}.$$

De l'autre côté, la linéarité de F et I.1 b) donnent exactement :

$$F(G_j)(t) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p_{j,k} t^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} p_{j,k} t^{n-k-1}.$$

Les deux expressions coïncident, donc $G_{j+1} = F(G_j)$. Puisque les suites (G_j) et (U_j) ont le même premier terme et vérifient la même récurrence, une récurrence immédiate sur j donne :

$$\forall j \geq 1, \quad G_j = U_j.$$

b) Le terme constant de G_j est $p_{j,n}$: tous les autres termes sont des multiples de puissances strictement positives de t . Donc $G_j(0) = p_{j,n}$. Par II.2 a) et I.3 b) :

$$P(X_j = n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

Si $1 \leq j < n$, les j premières commandes ne peuvent servir plus de j fournisseurs, puisque chaque commande ne s'adresse qu'à un seul fournisseur. L'événement $[X_j = n]$

est donc impossible. L'expression ci-dessus est alors nulle, d'où l'identité demandée :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0.$$

La nullité est établie par un raisonnement probabiliste, comme le demande l'énoncé, sans utiliser un résultat supplémentaire sur les sommes de coefficients binomiaux.

c) Méthode 1 — Expression explicite et moments sur un support fini

Dans la formule de b), le terme $k = 0$ est égal à 1. Pour chaque $1 \leq k \leq n-1$, on a $0 < 1 - k/n < 1$, donc $(1 - k/n)^{j-1} \rightarrow 0$. La somme comportant seulement n termes, on peut passer à la limite terme à terme. Ainsi :

$$P(X_j = n) \rightarrow 1.$$

Toutes les autres probabilités tendent vers 0 : pour $1 \leq k < n$, $0 \leq p_{j,k} \leq 1 - p_{j,n} \rightarrow 0$. Comme X_j est bornée, ses deux premiers moments existent et s'écrivent sous forme de sommes finies. On obtient :

$$E(X_j) = \sum_{k=1}^n k p_{j,k} \rightarrow n,$$

$$E(X_j^2) = \sum_{k=1}^n k^2 p_{j,k} \rightarrow n^2.$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$V(X_j) = E(X_j^2) - E(X_j)^2 \rightarrow n^2 - n^2 = 0.$$

Méthode 2 — Majoration de la probabilité qu'un fournisseur manque

Pour chaque fournisseur r , notons $D_{r,j}$ l'événement «ce fournisseur n'a reçu aucune des j premières commandes». À chaque commande, la probabilité de ne pas le choisir est $1 - 1/n$. L'indépendance des commandes donne :

$$P(D_{r,j}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.$$

L'événement $[X_j < n]$ est la réunion des n événements $D_{r,j}$. La probabilité d'une réunion finie est au plus la somme des probabilités de ses événements ; on peut le justifier par

$$\mathbf{1}_{\cup_r D_{r,j}} \leq \sum_r \mathbf{1}_{D_{r,j}}$$

et la croissance de l'espérance. Donc :

$$0 \leq P(X_j < n) \leq n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j \rightarrow 0.$$

Cela redonne $P(X_j = n) \rightarrow 1$. Comme $n - X_j$ est nul sur $[X_j = n]$ et est au plus $n - 1$ ailleurs :

$$0 \leq n - E(X_j) = E(n - X_j) \leq (n - 1)P(X_j < n) \rightarrow 0.$$

De même, $E((X_j - n)^2) \leq (n - 1)^2 P(X_j < n) \rightarrow 0$. Or, par développement du carré et Koenig-Huygens :

$$E((X_j - n)^2) = V(X_j) + (E(X_j) - n)^2 \geq V(X_j).$$

La variance, qui est positive, tend donc vers 0. La première méthode utilise la formule exacte ; la seconde fournit aussi une majoration explicite de la probabilité de ne pas avoir encore servi tous les fournisseurs. Ici, n est fixé et seul j tend vers l'infini.

3. Calcul de l'espérance de X_j

a) Les valeurs $1, \dots, n$ recouvrent toutes les possibilités de X_j . Par conséquent :

$$G_j(1) = \sum_{k=1}^n p_{j,k} = 1.$$

On dérive le polynôme, en omettant son terme constant :

$$G'_j(t) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)p_{j,k}t^{n-k-1}.$$

À $t = 1$, on peut ajouter le terme nul $k = n$. Cela donne :

$$G'_j(1) = \sum_{k=1}^n (n-k)p_{j,k} = n \sum_{k=1}^n p_{j,k} - \sum_{k=1}^n kp_{j,k} = n - E(X_j).$$

b) La relation polynomiale $G_{j+1}(t) = G_j(t) + (1-t)G'_j(t)/n$ se dérive sans difficulté, puisque les polynômes sont de classe C^∞ . La règle du produit donne :

$$G'_{j+1}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) G'_j(t) + \frac{1-t}{n} G''_j(t).$$

En prenant $t = 1$, le dernier terme est nul. Donc :

$$G'_{j+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) G'_j(1).$$

Comme $G_1(t) = t^{n-1}$, on a $G'_1(1) = n - 1$.

c) Méthode 1 — Suite géométrique issue des polynômes

Par b), la suite $(G'_j(1))$ est géométrique de raison $q = 1 - 1/n$ et de premier terme $n - 1$.

Par conséquent :

$$G'_j(1) = (n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}.$$

En utilisant a), on en déduit :

$$E(X_j) = n - (n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} = n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j\right].$$

L'égalité des deux expressions découle de $n-1 = n(1 - 1/n)$. Comme $0 < q < 1$, $q^j \rightarrow 0$ et $E(X_j) \rightarrow n$.

Méthode 2 — Somme des indicatrices des fournisseurs servis

Pour chaque $r \in \{1, \dots, n\}$, posons $I_{r,j} = 1$ si le fournisseur r a reçu au moins une des j premières commandes, et $I_{r,j} = 0$ sinon. On a exactement :

$$X_j = \sum_{r=1}^n I_{r,j}.$$

Par indépendance des commandes, le fournisseur r n'est jamais choisi avec probabilité $(1 - 1/n)^j$. Donc $I_{r,j}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - 1/n)^j$, et son espérance vaut ce paramètre. La linéarité de l'espérance pour la somme finie donne :

$$E(X_j) = \sum_{r=1}^n E(I_{r,j}) = n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j\right].$$

Cette démonstration ne suppose pas les indicatrices indépendantes entre elles. Elle donne également la limite n . La méthode des polynômes suit les questions précédentes ; celle des indicatrices est utile pour compter le nombre d'objets satisfaisant une propriété.

Partie III

Le nombre de fournisseurs servis ne peut que croître. Les événements $[X_j = n]$ sont donc croissants, et leur réunion est l'événement « tous les fournisseurs finissent par recevoir une commande ». La continuité croissante des probabilités et la limite de II.2 c) montrent que cette réunion a pour probabilité 1. Le temps T est donc fini presque sûrement. Sur l'éventuel événement de probabilité nulle où cela n'arriverait pas, on peut fixer arbitrairement une valeur finie de T sans modifier sa loi. De plus, $T \geq n$ presque sûrement, car il faut au moins une commande pour chacun des n fournisseurs.

1. Étude de la loi de la variable aléatoire T

- a) Tous les fournisseurs ont reçu une commande parmi les j premières si et seulement si le premier instant où cela arrive est au plus j . Ainsi, sur les trajectoires où T est défini comme ce premier instant :

$$[T \leq j] = [X_j = n].$$

L'égalité est en tout cas vraie à un événement de probabilité nulle près, ce qui suffit pour les probabilités. Les événements $[T \leq j]$ étant emboîtés :

$$P(T = j + 1) = P(T \leq j + 1) - P(T \leq j),$$

$$P(T = j + 1) = P(X_{j+1} = n) - P(X_j = n).$$

Comme $n \geq 2$ et $X_1 = 1$, on a aussi $P(T = 1) = P(X_1 = n) = 0$.

- b) Les événements $[T = 1], \dots, [T = j]$ sont disjoints et leur réunion est $[T \leq j]$. Par a) :

$$\sum_{m=1}^j P(T = m) = P(X_j = n).$$

Le membre de droite tend vers 1 d'après II.2 c). En passant à la limite dans les sommes

partielles, on obtient :

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(T = m) = 1.$$

Cette égalité confirme que les probabilités ponctuelles décrivent toute la loi de T .

- c) Pour $0 \leq k \leq n-1$, posons $q_k = 1 - k/n$. La formule de II.2 b) et la différence de a) donnent :

$$P(T = j+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (q_k^j - q_k^{j-1}).$$

Or $q_k^j - q_k^{j-1} = q_k^{j-1}(q_k - 1) = -(k/n)q_k^{j-1}$. Le terme $k=0$ est nul. Donc, pour tout $j \geq 1$:

$$P(T = j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

La formule ne comporte qu'une somme finie. Pour $j+1 < n$, elle vaut 0 puisque $T \geq n$; les signes alternés ne signifient pas que la probabilité puisse être négative, car cette expression a été obtenue à partir d'une probabilité d'événement.

2. Étude de l'espérance de T

- a) Pour $1 \leq k < n$, on a $0 < q_k = 1 - k/n < 1$. La formule de la première série géométrique dérivée du programme donne :

$$\sum_{j=1}^{\infty} j q_k^{j-1} = \frac{1}{(1 - q_k)^2}.$$

La série converge puisque $|q_k| < 1$. Comme $1 - q_k = k/n$, la somme demandée vaut :

$$S = \frac{n^2}{k^2}.$$

- b) On commence par justifier l'existence de l'espérance. La variable $T - 1$ est positive, et son espérance, si elle existe, est la somme de la série

$$\sum_{j \geq 1} jP(T = j + 1),$$

le terme correspondant à $T = 1$ étant nul.

La formule de III.1 c) donne la majoration :

$$0 \leq jP(T = j + 1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} jq_k^{j-1}.$$

Chacune des $n - 1$ séries de droite converge d'après a). Leur somme finie converge donc et majore la série définissant $E(T - 1)$; cette espérance est finie. Par conséquent, $T = (T - 1) + 1$ possède aussi une espérance finie.

Pour calculer $E(T - 1)$ sans échange non justifié, on somme d'abord la formule de la loi jusqu'à un entier J :

$$\sum_{j=1}^J jP(T = j + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} \sum_{j=1}^J jq_k^{j-1}.$$

Les sommes sont finies. On fait ensuite tendre J vers l'infini; la somme extérieure possède un nombre fixé de termes, et toutes les limites existent par a). On obtient :

$$E(T - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} \frac{n^2}{k^2},$$

$$E(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k}.$$

La simplification est licite puisque $k \geq 1$.

c) Méthode 1 — Binôme et somme géométrique finie

Le binôme, appliqué à $x = 1 + (x-1)$, donne :

$$x^{n-1} - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^k.$$

Pour $x \neq 1$, on divise par $x-1$ et on utilise l'identité géométrique finie :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1} = \frac{x^{n-1} - 1}{x-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

En $x = 1$, le membre de gauche vaut $\binom{n-1}{1} = n-1$, car seul le terme $k = 1$ subsiste. Le membre de droite est la somme de $n-1$ termes égaux à 1, donc vaut également $n-1$. L'identité est ainsi démontrée sur tout $[0, 1]$, sans division par zéro.

Méthode 2 — Comparaison des coefficients après le changement de variable $y = x-1$

Le membre de droite devient

$$\sum_{m=0}^{n-2} (1+y)^m.$$

En développant chaque puissance par le binôme et en regroupant les sommes finies :

$$\sum_{m=0}^{n-2} (1+y)^m = \sum_{r=0}^{n-2} \left(\sum_{m=r}^{n-2} \binom{m}{r} \right) y^r.$$

Pour $m \geq r$, la relation de Pascal, avec la convention $\binom{r}{r+1} = 0$, donne :

$$\binom{m}{r} = \binom{m+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}.$$

La somme sur m est donc télescopique :

$$\sum_{m=r}^{n-2} \binom{m}{r} = \binom{n-1}{r+1} - \binom{r}{r+1} = \binom{n-1}{r+1}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{m=0}^{n-2} (1+y)^m = \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-1}{r+1} y^r = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1}.$$

Cela prouve l'identité, même pour $x = 1$, sans introduire de quotient. La première méthode est la plus directe ; la seconde met en évidence une identité de coefficients binomiaux que l'on peut réutiliser dans d'autres sommes finies.

d) La méthode imposée est l'intégration de l'égalité de c). Les deux membres sont des polynômes, donc continus et intégrables sur $[0, 1]$. La linéarité s'applique à ces sommes finies :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \int_0^1 (x-1)^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 x^{k-1} dx.$$

Pour chaque entier $k \geq 1$, une primitive de $(x-1)^{k-1}$ est $(x-1)^k/k$. Par conséquent :

$$\int_0^1 (x-1)^{k-1} dx = \frac{0^k - (-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

$$\int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k}.$$

L'identité intégrée donne donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En substituant dans b), puis en utilisant la linéarité de l'espérance pour $T = (T-1) + 1$:

$$E(T) = 1 + n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right),$$

$$E(T) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

La question demandant expressément de déduire le résultat par intégration, cette démonstration utilise cette méthode et toutes les étapes antérieures.

3. Évaluation asymptotique de $E(T)$

a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La formule de III.2 d) permet de calculer la somme harmonique avec une boucle, puis de la multiplier par n . Une fonction complète, sans import nécessaire, est :

Python

```
def esperance(n):
    somme = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
```

```
somme = somme + 1 / k  
return n * somme
```

L'argument n est un entier supérieur ou égal à 2, comme dans le problème. La variable `somme` accumule les termes de la somme harmonique. Après l'itération d'indice k , elle contient une approximation de la somme des inverses de 1 à k . La borne supérieure de `range` est exclusive : `range(1, n + 1)` parcourt donc exactement les entiers de 1 à n .

La valeur renvoyée est une approximation numérique de

$$E(T) = n \sum_{k=1}^n 1/k,$$

car les divisions et additions utilisent des nombres flottants. La formule mathématique est exacte ; l'exécution informatique ne remplace pas sa démonstration.

- b)** Rectification de l'énoncé : le dernier mot « consommateurs » du texte source doit être « fournisseurs ». La variable T mesure le nombre de consommateurs nécessaire pour que chaque fournisseur soit servi.

Pour calculer les deux valeurs, on utilise la fonction précédente avec le code complet suivant. Les variables `moyenne_10` et `moyenne_100` reçoivent les valeurs numériques de l'espérance pour les deux nombres de fournisseurs.

Python

```
def esperance(n):  
    somme = 0.0  
    for k in range(1, n + 1):  
        somme = somme + 1 / k  
    return n * somme  
  
moyenne_10 = esperance(10)  
moyenne_100 = esperance(100)
```

La fonction a été exécutée pour les deux valeurs demandées. Les résultats, arrondis à trois décimales, sont :

Nombre de fournisseurs	Nombre moyen de consommateurs
10	29,290
100	518,738

Les valeurs numériques avant cet arrondi sont environ 29,289682539683 et 518,737751763962. Il s'agit d'espérances, qui peuvent être non entières, et non de nombres de commandes imposés pour chaque réalisation. Ce calcul est déterministe et ne constitue pas une simulation.

c) Sur le segment $[k, k + 1]$, où $k \geq 1$, la fonction $t \mapsto 1/t$ est continue et décroissante.

Pour tout t dans ce segment :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant et en utilisant la longueur 1 du segment, on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Notons

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k.$$

Pour une minoration, on somme la borne de droite de l'inégalité intégrale pour $k = 1, \dots, n$:

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

Pour une majoration, on somme la borne de gauche pour $k = 1, \dots, n - 1$:

$$H_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Donc, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

Comme $\ln n > 0$, on divise par $\ln n$. La borne inférieure tend vers 1 car

$\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + 1/n)$, avec $\ln(1 + 1/n) \rightarrow 0$; la borne supérieure vaut $1 + 1/\ln n$ et tend aussi vers 1. Le théorème d'encadrement donne :

$$H_n \sim \ln n.$$

Enfin, la formule exacte de III.2 d) implique :

$$\frac{E(T)}{n \ln n} = \frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1.$$

L'équivalent demandé est donc $E(T) \sim n \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Dans cette question, contrairement à la partie II, c'est le nombre de fournisseurs n qui varie.

Relevé des adaptations

- II.1 a) : restriction des probabilités conditionnelles aux événements de conditionnement de probabilité strictement positive. Certaines valeurs de X_j sont impossibles lorsque $j < n$; aucune probabilité conditionnelle par un événement impossible n'est utilisée.
- III.3 a) : remplacement de la demande d'algorithme dans l'ancien langage par une demande en Python. Code adapté en Python, avec les mêmes calculs mathématiques.
- III.3 b) : rectification locale de « chacun des consommateurs a reçu au moins une commande » en « chacun des fournisseurs a reçu au moins une commande »,

conformément à la définition de T et à l'ensemble du problème.

Aucune question n'a été supprimée, aucune formule mathématique n'a été modifiée et aucun résultat supplémentaire n'a dû être admis. Le document source ne contient aucune figure utile à retranscrire.