



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1990

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet du problème consiste en l'étude de la complexité de deux algorithmes. Dans la partie I, on s'intéresse à un premier algorithme permettant la recherche du plus grand élément d'un tableau de nombres non triés, et, dans la partie II, à un second algorithme permettant la recherche des deux plus grands éléments d'un tableau de nombres non triés.

Préliminaires

1. On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

À cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

(a) Établir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , et prouver qu'elles sont adjacentes. On rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la différence des deux a pour limite 0.

2. On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) et, pour évaluer numériquement γ , on se propose d'utiliser leur moyenne arithmétique :

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(a) Prouver l'inégalité suivante :

$$|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}.$$

(b) Écrire en Python un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} , et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5 ?

3. On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$.

(a) Comparer $m_{k+1} - m_k$, pour $k \geq 1$, à l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} dt.$$

(b) En déduire l'inégalité suivante :

$$0 \leq m_{k+1} - m_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}.$$

En déduire par sommation un encadrement de $m_{n+p} - m_n$, pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$ entiers, puis de $\gamma - m_n$.

À l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question 2, quel encadrement de γ obtient-on finalement ?

Partie I

On considère une urne remplie de n boules, où $n \geq 1$, numérotées respectivement $1, 2, \dots, n$. On extrait ces n boules une à une et sans remise, chaque boule encore présente ayant la même probabilité d'être tirée. Les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ indiquent, dans cet ordre, les numéros ainsi obtenus.

Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, on note X_p le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages :

$$X_p = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_p).$$

1. On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$. On pose $N_n = \{1, \dots, n\}$. On demande de préciser :

(a) Le nombre de parties A à p éléments choisies dans N_n .

(b) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de N_n .

- (c) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de N_n .
- (d) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de N_n , et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p -ième position.
- (e) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de N_n , et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p -ième position.
- (f) La probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.
2. Pour $1 < p \leq n$, on note B_p la variable aléatoire valant 1 si l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé, et 0 sinon. Montrer que $E(B_p) = 1/p$, et donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + \dots + B_n)$.

3. On considère l'algorithme suivant. L'entier $n \geq 2$ est fixé et le tableau Python Z contient les entiers $1, 2, \dots, n$ dans un ordre quelconque. Le numéro mathématique Z_p correspond à $Z[p - 1]$. Toutes les variables manipulées par cet algorithme sont entières.

Dans cette question et dans la partie II, on compte seulement les comparaisons entre les valeurs du tableau et les variables de résultat, et les affectations aux variables de résultat : X dans la partie I, X et Y dans la partie II. La gestion des boucles, les indices, les accès au tableau et la préparation des données ne sont pas comptés.

Python

```
X = Z[0]
for p in range(2, n + 1):
    if Z[p - 1] > X:
        X = Z[p - 1]
```

- (a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme : d'une part lorsque $Z_1 = 1, Z_2 = 2, \dots, Z_n = n$, d'autre part lorsque $Z_1 = n, Z_2 = n - 1, \dots, Z_n = 1$.
- (b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans X à l'issue de

l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons > effectuées entre deux valeurs, ainsi que les nombres maximal et minimal d'affectations à X.

- (c) À l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre d'affectations à X en fonction de u_n , puis expliciter à l'aide de γ des réels a et b tels que :

$$E_n = a \ln n + b + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Les notations u_n et γ ont été introduites dans les préliminaires.

Partie II

Le contexte probabiliste est celui introduit au début de la partie précédente, avec $n \geq 2$. Pour $2 \leq p \leq n$, on note Y_p la variable aléatoire telle que X_p et Y_p indiquent respectivement les deux plus grands des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, avec $Y_p < X_p$.

1. En reprenant et en adaptant le raisonnement de la question I.1, préciser la probabilité $P(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1})$ pour $2 < p \leq n$.
2. Pour $2 < p \leq n$, on note C_p la variable aléatoire valant 0 si $Z_p < Y_{p-1}$, 1 si $Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}$, et 2 si $X_{p-1} < Z_p$. Montrer que $E(C_p) = 3/p$.
3. On modifie l'algorithme de I.3 de la façon suivante, avec les mêmes conventions d'indexation et de comptage :

Python

```
if Z[1] > Z[0]:
    X = Z[1]
    Y = Z[0]
else:
    X = Z[0]
    Y = Z[1]
for p in range(3, n + 1):
    if Z[p - 1] > Y:
```

```

if Z[p - 1] < X:
    Y = Z[p - 1]
else:
    Y = X
    X = Z[p - 1]

```

(a) Indiquer les valeurs successivement prises par X et Y au cours de l'algorithme : d'une part lorsque $Z_1 = 1, Z_2 = 2, \dots, Z_n = n$, d'autre part lorsque

$Z_1 = n, Z_2 = n - 1, \dots, Z_n = 1$.

(b) On revient au cas général. Indiquer les valeurs contenues dans X et Y à l'issue de l'algorithme. Déterminer les nombres maximal et minimal de comparaisons $<$ ou $>$ entre deux valeurs, ainsi que les nombres maximal et minimal d'affectations à X ou Y .

(c) À l'aide des résultats précédents, calculer les espérances E'_n et E''_n des nombres de comparaisons et d'affectations effectuées au cours de l'algorithme, puis expliciter à l'aide de γ des réels a', b', c', a'', b'' tels que :

$$E'_n = a'n + b' \ln n + c' + \varepsilon'_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon'_n = 0,$$

$$E''_n = a'' \ln n + b'' + \varepsilon''_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon''_n = 0.$$