



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on désigne par a et n deux entiers naturels non nuls. L'objet de la partie I est l'étude d'un marché sur lequel na consommateurs achètent chacun un bien qu'ils peuvent se procurer, de façon équiprobable, auprès de n fournisseurs $F_1, \dots, F_n$. Les choix des différents consommateurs sont indépendants.

Dans la partie II, on étudie la loi asymptotique du nombre de clients par fournisseur lorsque n tend vers l'infini, l'entier a étant fixé.

Partie I

On étudie dans cette partie les variables aléatoires suivantes :

- X_i indique le nombre des consommateurs ayant acheté le bien chez le fournisseur F_i , pour $1 \leq i \leq n$.
- Y indique le nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client. Le quotient Y/n représente donc la proportion des fournisseurs n'ayant eu aucun client.

1. Étude des variables aléatoires X_i , pour $1 \leq i \leq n$.

1. (a) Déterminer la loi commune, l'espérance et la variance des variables aléatoires X_i , en précisant l'expression de $P(X_i = k)$ pour tout entier naturel k .

1. (b) Calculer le mode de X_i , c'est-à-dire le ou les entiers k tels que $P(X_i = k)$ soit maximale. À cet effet, pour $n \geq 2$, on pourra étudier le rapport suivant pour $0 \leq k < na$:

$$r_k = \frac{P(X_i = k+1)}{P(X_i = k)}.$$

Traiter séparément le cas $n = 1$.

2. Coefficient de corrélation des variables aléatoires X_i .

Dans cette question, on suppose $n \geq 2$. On désigne par i et j des entiers distincts tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

2. (a) Justifier l'identité $X_1 + X_2 + \dots + X_n = na$ et, en l'élevant au carré, déterminer la valeur commune des espérances $E(X_i X_j)$, puis des covariances $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
2. (b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire des variables X_i et X_j . Interpréter le cas $n = 2$ en rappelant à quelle condition nécessaire et suffisante le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires est égal à 1 ou à -1 .

3. Espérance et variance de la variable aléatoire Y .

On désigne par B_i , pour $1 \leq i \leq n$, la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque le fournisseur F_i n'a aucun client, et 0 sinon.

3. (a) En exprimant Y à l'aide des variables aléatoires B_i , calculer l'espérance de Y .
3. (b) Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires $B_i B_j$, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$. En déduire la variance de la variable aléatoire Y .
3. (c) Déterminer les limites de l'espérance et de la variance de Y/n quand n tend vers l'infini.

4. Loi de la variable aléatoire Y .

On désigne par k un entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$. Toute intersection sur une famille vide d'événements désigne l'événement certain.

4. (a) Quelles valeurs la variable Y peut-elle prendre? Calculer $P(Y = n - 1)$.
4. (b) Exprimer l'événement $\{Y \neq 0\}$ à l'aide des événements $\{X_i = 0\}$, pour $1 \leq i \leq n$. En déduire, à l'aide de la formule du crible, $P(Y = 0)$.

Pour justifier la formule du crible dans le cas présent, on pourra développer le produit

fini

$$\prod_{i=1}^n (1 - B_i),$$

puis prendre son espérance.

4. (c) Donner dans un tableau une valeur approchée, avec deux décimales, de $P(Y = 0)$ lorsque $a = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2, 3$.

4. (d) Donner, par la même méthode, la probabilité conditionnelle suivante :

$$P \left(\bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\} \middle| \bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\} \right).$$

4. (e) Calculer la probabilité pour que les k fournisseurs $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient aucun client et, en remarquant que :

$$\begin{aligned} & P \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\} \right) \right) \\ &= P \left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\} \right) P \left(\bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\} \middle| \bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\} \right), \end{aligned}$$

donner la probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_n$ aient au moins un client.

4. (f) En dénombrant le nombre des façons de choisir parmi les n fournisseurs les k d'entre eux qui resteront sans clients, en déduire $P(Y = k)$.

Partie II

Dans cette partie, on désigne par k un entier naturel fixé et par $p_n(k)$ la probabilité, calculée en I. 1, pour qu'un fournisseur donné ait exactement k clients. On se propose d'étudier la suite $n \mapsto p_n(k)$, avec a fixé.

1. Étude de la suite $(p_n(0))$.

On considère la fonction f_0 et la fonction auxiliaire g_0 définies sur $]0, 1[$ par :

$$f_0(x) = \frac{a}{x} \ln(1-x) + a, \quad g_0(x) = x^2 f'_0(x).$$

1. (a) Donner l'expression de la fonction g_0 et étudier son signe.
1. (b) Étudier les variations de f_0 et déterminer sa limite L quand x tend vers 0.
1. (c) On pose $f_0(0) = L$. Déterminer la limite de $f'_0(x)$ quand x tend vers 0, montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et donner sa représentation graphique. En 0, la dérivée est entendue à droite.
1. (d) Pour $n \geq 2$, exprimer $p_n(0)$ en fonction de $f_0(1/n)$ et en déduire la limite et le sens de variation de la suite $(p_n(0))$. Préciser également $p_1(0)$.
2. Étude de la loi limite du nombre de clients par fournisseur.
2. (a) Déterminer la limite $p(k)$ de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini et reconnaître la loi limite du nombre de clients par fournisseur. Ce résultat était-il prévisible ?
2. (b) Donner l'espérance, la variance et calculer le mode de cette loi limite.
3. Étude de la suite $(p_n(k))$ selon les valeurs de k .

On considère les fonctions f_k et g_k définies par :

$$f_k(x) = \left(\frac{a}{x} - k\right) \ln(1-x) + a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right), \quad g_k(x) = x^2 f'_k(x),$$

l'entier k étant supposé non nul et distinct des réels b et c définis par :

$$b = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}, \quad c = a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

On travaille sur $]0, \delta_k[$, où $\delta_1 = 1$ et, pour $k \geq 2$, $\delta_k = \min\left(1, \frac{a}{k-1}\right)$. Les expressions $f_k(1/n)$ sont considérées pour n suffisamment grand pour que $1/n < \delta_k$.

3. (a) Comparer $\ln[p_n(k)/p(k)]$ et $f_k(1/n)$.
3. (b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto x f'_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire, selon la position de k par rapport aux réels b et c , le signe de $f'_k(1/n)$ et la position de $p_n(k)$ par rapport à $p(k)$ pour n suffisamment grand.
3. (c) Donner le développement limité à l'ordre 2 de g_k quand x tend vers 0. En déduire que les suites $(f_k(1/n))$ et $(p_n(k))$ sont monotones à partir d'un certain rang et préciser leur sens de variation selon la position de k par rapport aux réels b et c .