



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On note $m = na$ le nombre de consommateurs. Les variables étudiées dans cette partie sont bornées ; leurs espérances, variances et covariances existent donc. Les choix des consommateurs sont supposés indépendants, et chaque fournisseur est choisi avec probabilité $1/n$.

Question adaptée au programme actuel dans le préambule : l'indépendance des choix a été explicitée. L'équiprobabilité des fournisseurs, prise isolément, ne suffirait pas à déterminer les lois et les probabilités demandées.

1. (a) Loi commune, espérance et variance.

Pour un fournisseur fixé F_i , chaque consommateur fournit un succès s'il le choisit. Les m indicatrices correspondantes sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. Leur somme X_i a donc la loi binomiale de paramètres $m = na$ et $1/n$.

Pour $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X_i = k) = \begin{cases} \binom{na}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na-k}, & 0 \leq k \leq na, \\ 0, & k > na. \end{cases}$$

Les lois usuelles donnent :

$$E(X_i) = na \frac{1}{n} = a, \quad V(X_i) = na \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Pour $n = 1$, il n'y a qu'un fournisseur et $X_1 = a$ de façon certaine. Ainsi $P(X_1 = a) = 1$ et les autres probabilités valent 0. Son espérance est a et sa variance est 0, ce qui est cohérent avec les formules précédentes.

La loi commune des X_i ne signifie pas que ces variables sont indépendantes : leur somme est fixée, comme on le verra dans la question 2.

1. (b) Mode de la loi binomiale.

Question adaptée au programme actuel : le rapport est étudié pour $n \geq 2$ et $0 \leq k < na$, afin d'inclure la comparaison avec $k = 0$ et de rester sur des probabilités strictement positives. Le cas $n = 1$ est séparé.

Pour $n \geq 2$, toutes les probabilités de 0 à $m = na$ sont positives. En utilisant le quotient des coefficients binomiaux :

$$r_k = \frac{m-k}{k+1} \frac{1/n}{1-1/n} = \frac{na-k}{(k+1)(n-1)}.$$

Le dénominateur est strictement positif. On a :

$$r_k > 1 \iff na - k > (k+1)(n-1) \iff k < a - 1 + \frac{1}{n}.$$

Puisque a et k sont entiers et $0 < 1/n < 1$, cette condition équivaut à $k \leq a - 1$. De même, $r_k < 1$ pour $k \geq a$; l'égalité $r_k = 1$ n'est jamais possible.

Les probabilités augmentent donc strictement jusqu'à l'indice a , puis diminuent strictement. Le mode est unique et vaut a .

Pour $n = 1$, la loi certaine en a possède également pour unique mode a . Ainsi, pour tout $n \geq 1$, le mode de X_i est a .

2. (a) Moments croisés et covariances.

On suppose $n \geq 2$. Chaque consommateur choisit exactement un fournisseur, donc, pour chaque réalisation :

$$X_1 + \dots + X_n = na.$$

Méthode 1 — Carré de la somme, comme demandé.

En élevant l'identité au carré et en prenant l'espérance :

$$\sum_{i=1}^n E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i X_j) = n^2 a^2.$$

La symétrie du modèle par permutation des fournisseurs assure que $E(X_i X_j)$ a la même valeur M pour tous les couples distincts. De plus, la formule de Huygens et 1. (a) donnent :

$$E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = a \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2.$$

Il y a $n(n-1)/2$ couples non ordonnés distincts, donc :

$$n \left[a \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2 \right] + n(n-1)M = n^2 a^2.$$

En isolant M et en utilisant $n(n-1) > 0$:

$$M = \frac{n(n-1)a^2 - a(n-1)}{n(n-1)} = a^2 - \frac{a}{n}.$$

Par conséquent, pour $i \neq j$:

$$E(X_i X_j) = a^2 - \frac{a}{n}, \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = -\frac{a}{n}.$$

Méthode 2 — Comptage par consommateurs.

Pour $1 \leq s \leq m$, notons $I_{s,i}$ l'indicatrice de l'événement que le consommateur s choisit F_i . Alors

$$X_i = \sum_{s=1}^m I_{s,i},$$

d'où :

$$X_i X_j = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m I_{s,i} I_{t,j}.$$

Si $s = t$ et $i \neq j$, le produit est nul : un même consommateur ne peut choisir deux fournisseurs. Si $s \neq t$, l'indépendance des choix donne $E(I_{s,i} I_{t,j}) = 1/n^2$. Il y a $m(m-1)$ couples ordonnés de consommateurs distincts, donc :

$$E(X_i X_j) = \frac{m(m-1)}{n^2} = \frac{na(na-1)}{n^2} = a^2 - \frac{a}{n}.$$

La covariance vaut à nouveau $-a/n$. Cette méthode explique directement le signe négatif : les deux fournisseurs se partagent un nombre fixé de consommateurs. La première méthode exploite plus rapidement la symétrie et l'identité imposée.

2. (b) Corrélation et cas de deux fournisseurs.

Pour $n \geq 2$, les variances valent $a(n-1)/n > 0$, donc le coefficient de corrélation est bien défini. Il vaut :

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{-a/n}{a(n-1)/n} = -\frac{1}{n-1}.$$

Pour deux variables U, V ayant des variances finies strictement positives, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donne $|\rho(U, V)| = 1$ si et seulement si les variables centrées sont proportionnelles presque sûrement. Cela équivaut à l'existence de réels $\alpha \neq 0$ et β tels que $V = \alpha U + \beta$ presque sûrement. Le coefficient vaut 1 si $\alpha > 0$ et -1 si $\alpha < 0$.

Lorsque $n = 2$, on a $X_2 = 2a - X_1$ presque sûrement : la relation affine a une pente négative. Le coefficient est donc -1 , conformément à la formule. Une clientèle supplémentaire chez l'un correspond exactement à une clientèle en moins chez l'autre.

Pour $n = 1$, aucun couple de fournisseurs distincts n'existe et la variance de X_1 est nulle ; un coefficient de corrélation de ce type n'est pas défini.

3. (a) Espérance du nombre de fournisseurs sans client.

Chaque fournisseur sans client contribue exactement 1 à Y . Ainsi :

$$Y = \sum_{i=1}^n B_i.$$

Pour qu'un fournisseur fixé ne reçoive aucun client, chacun des $m = na$ consommateurs doit choisir l'un des $n - 1$ autres. Posons :

$$q_n = P(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na}.$$

Cette formule est aussi valable pour $n = 1$, puisque l'exposant a est strictement positif et donne $q_1 = 0$. La variable B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre q_n et $E(B_i) = q_n$.

Par linéarité, sans supposer les B_i indépendantes :

$$E(Y) = nq_n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na}.$$

3. (b) Produits d'indicatrices et variance de Y .

Pour $i = j$, on a $B_i^2 = B_i$. Ainsi $B_i B_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre q_n , et $E(B_i^2) = q_n$.

Pour $i \neq j$, nécessairement $n \geq 2$. Le produit $B_i B_j$ vaut 1 exactement lorsque les deux fournisseurs ne reçoivent aucun client. Chaque consommateur doit alors choisir l'un des $n - 2$ autres fournisseurs. En posant :

$$t_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{na},$$

on obtient $P(B_i B_j = 1) = t_n$ et $P(B_i B_j = 0) = 1 - t_n$. Le produit a donc une loi de Bernoulli de paramètre t_n , avec $E(B_i B_j) = t_n$. Pour $n = 2$, $t_2 = 0$, car tous les consommateurs ne peuvent éviter les deux fournisseurs.

En développant le carré de Y :

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^n E(B_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(B_i B_j) = nq_n + n(n-1)t_n.$$

La formule de Huygens donne, pour $n \geq 2$:

$$V(Y) = nq_n + n(n-1)t_n - n^2q_n^2.$$

Une forme utile pour la suite est :

$$V(Y) = nq_n(1 - q_n) + n(n-1)(t_n - q_n^2).$$

Le deuxième terme traduit les covariances entre les indicatrices de fournisseurs vides ; on ne peut donc pas traiter Y comme une binomiale de paramètres n, q_n .

Pour $n = 1$, le fournisseur reçoit tous les clients, donc $Y = 0$ et $V(Y) = 0$.

3. (c) Limites de la proportion de fournisseurs vides.

Pour $n \geq 2$:

$$E(Y/n) = q_n, \quad V(Y/n) = \frac{q_n(1 - q_n)}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(t_n - q_n^2).$$

Méthode 1 — Limite de chaque terme.

Le développement limité $\ln(1 - x) = -x + o(x)$ en 0 donne, en l'évaluant en $x = 1/n$:

$$na \ln(1 - 1/n) = -a + o(1).$$

Par continuité de l'exponentielle, $q_n \rightarrow e^{-a}$. De même, pour $n \geq 3$, on applique ce développement en $x = 2/n$:

$$na \ln(1 - 2/n) = -2a + o(1),$$

donc $t_n \rightarrow e^{-2a}$. Ainsi $t_n - q_n^2 \rightarrow 0$. Le premier terme de la variance tend également vers 0, car $0 \leq q_n(1 - q_n) \leq 1/4$. Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y/n) = e^{-a}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y/n) = 0.$$

Méthode 2 — Majorant utilisant les covariances négatives.

Pour $n \geq 2$, on a $0 \leq 1 - 2/n \leq (1 - 1/n)^2$. L'élévation à la puissance positive na conserve l'ordre, d'où $t_n \leq q_n^2$. Les covariances entre les B_i distinctes sont donc négatives ou nulles.

La formule de 3. (b) entraîne :

$$0 \leq V(Y/n) \leq \frac{q_n(1 - q_n)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Par encadrement, la variance tend vers 0. L'espérance a la même limite e^{-a} , calculée ci-dessus. Cette seconde méthode donne une borne uniforme en a et évite le calcul de la limite de t_n .

4. (a) Valeurs possibles de Y et probabilité extrême.

Il y a au moins un consommateur, donc au moins un fournisseur occupé. Ainsi Y ne peut pas valoir n et prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Toutes ces valeurs sont possibles. Si $Y = k$, il doit y avoir $n - k$ fournisseurs occupés. Comme $na \geq n \geq n - k$, on peut envoyer un consommateur à chacun de ces fournisseurs puis affecter tous les autres à l'un d'eux. Une telle affectation a une probabilité strictement positive par indépendance et équiprobabilité.

L'événement $\{Y = n - 1\}$ signifie que tous les consommateurs ont choisi un même fournisseur. Pour un fournisseur fixé, cette probabilité vaut n^{-na} . Les n événements correspondants sont deux à deux disjoints, donc :

$$P(Y = n - 1) = n n^{-na} = n^{1-na}.$$

Pour $n = 1$, cette valeur est 1, ce qui correspond à $Y = 0$ de façon certaine.

4. (b) Probabilité qu'aucun fournisseur ne soit vide.

Posons $A_i = \{X_i = 0\}$. On a :

$$\{Y \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Question adaptée au programme actuel : la formule du crible pour un nombre arbitraire d'événements est justifiée ici par un développement de produit fini, au lieu d'être supposée connue.

Le produit

$$\prod_{i=1}^n (1 - B_i)$$

vaut 1 si tous les B_i sont nuls, et 0 sinon. C'est donc l'indicatrice de $\{Y = 0\}$. La distributivité dans un produit fini donne :

$$\prod_{i=1}^n (1 - B_i) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \prod_{i \in J} B_i.$$

Pour J vide, le produit vaut 1. Pour une partie J de cardinal ℓ , le produit est l'indicatrice de l'événement que les ℓ fournisseurs désignés sont tous vides. Chaque consommateur doit choisir l'un des $n - \ell$ autres, donc :

$$E \left(\prod_{i \in J} B_i \right) = P \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) = \left(\frac{n - \ell}{n} \right)^{na}.$$

Il existe $\binom{n}{\ell}$ parties de cardinal ℓ . En prenant l'espérance de l'identité finie et en regroupant selon ce cardinal :

$$P(Y = 0) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \left(\frac{n - \ell}{n} \right)^{na}.$$

Cette formule est obtenue avec des sommes finies seulement. Le terme $\ell = n$ vaut 0, puisque $na > 0$, et le terme $\ell = 0$ vaut 1.

4. (c) Tableau numérique.

Pour $n = 1$, $P(Y = 0) = 1$.

Pour $n = 2$, la formule précédente donne :

$$P(Y = 0) = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2a} = 1 - 2^{1-2a}.$$

Pour $n = 3$, elle donne :

$$P(Y = 0) = 1 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{3a} + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{3a}.$$

Les valeurs arrondies à deux décimales sont :

a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	1,00	0,50	0,22
2	1,00	0,88	0,74
3	1,00	0,97	0,92

Pour contrôler les arrondis, les valeurs exactes non triviales sont, pour $n = 2$, $1/2$, $7/8$ et $31/32$; pour $n = 3$, $2/9$, $20/27$ et $6050/6561$. Les calculs du tableau ont été vérifiés numériquement et par dénombrement des affectations pour ces petits paramètres.

4. (d) Probabilité conditionnelle.

Notons $A = \bigcap_{i=1}^k \{X_i = 0\}$ et $t = n - k \geq 1$. Les k fournisseurs imposés vides doivent être évités par tous les consommateurs. Ainsi :

$$P(A) = \left(\frac{t}{n} \right)^{na} > 0.$$

La probabilité conditionnelle est donc bien définie, y compris lorsque $k = 0$, car A est alors l'événement certain.

Conditionnellement à A , les consommateurs choisissent indépendamment et uniformément parmi les t fournisseurs restants. Pour le vérifier, fixons une affectation de tous les $m = na$ consommateurs à ces fournisseurs. Sa probabilité avant conditionnement vaut n^{-m} ; sa probabilité conditionnelle vaut :

$$\frac{n^{-m}}{(t/n)^m} = t^{-m}.$$

C'est précisément la probabilité d'une affectation pour m choix indépendants et uniformes parmi t possibilités.

On applique donc le développement fini de 4. (b) aux t fournisseurs restants, sous cette probabilité conditionnelle. La probabilité que tous soient occupés est :

$$P\left(\bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\} \mid A\right) = \sum_{\ell=0}^t (-1)^\ell \binom{t}{\ell} \left(\frac{t-\ell}{t}\right)^{na}.$$

Le dénominateur t est non nul. Pour $t = 1$, cette formule donne 1 : le seul fournisseur restant reçoit tous les consommateurs.

4. (e) Ensemble des fournisseurs vides imposé.

La probabilité pour que les k premiers fournisseurs n'aient aucun client est celle calculée en 4. (d) :

$$P(A) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na}.$$

Pour obtenir exactement ces fournisseurs vides, il faut aussi que tous les autres soient occupés. Par la formule des probabilités composées et 4. (d) :

$$P\left(A \cap \bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\}\right) = \left(\frac{t}{n}\right)^{na} \sum_{\ell=0}^t (-1)^\ell \binom{t}{\ell} \left(\frac{t-\ell}{t}\right)^{na}.$$

Comme $t > 0$, on peut regrouper les puissances et obtenir :

$$P\left(A \cap \bigcap_{i=k+1}^n \{X_i \neq 0\}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^\ell \binom{n-k}{\ell} \left(\frac{n-k-\ell}{n}\right)^{na}.$$

Pour $k = 0$, on retrouve $P(Y = 0)$. Pour $k = n - 1$, cette probabilité vaut n^{-na} : un fournisseur précis reçoit toute la clientèle.

4. (f) Loi complète de Y .

Il existe $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k fournisseurs vides. Par symétrie, chacune a la probabilité de 4. (e). Les événements correspondants sont disjoints : un même résultat ne peut pas avoir deux ensembles distincts de fournisseurs exactement vides.

Pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^\ell \binom{n-k}{\ell} \left(\frac{n-k-\ell}{n} \right)^{na}.$$

La probabilité vaut 0 pour les autres valeurs de k . La formule donne bien

$$P(Y = n-1) = n^{1-na} \text{ et, lorsque } n=1, P(Y=0) = 1.$$

Ces événements forment une partition de toutes les affectations des consommateurs ; les probabilités ainsi obtenues somment donc à 1.

Partie II

L'entier $a \geq 1$ est désormais fixé. Pour $n \geq 2$, on utilise la loi binomiale de I. 1. (a) :

$$p_n(k) = \binom{na}{k} n^{-k} (1 - 1/n)^{na-k},$$

lorsque $0 \leq k \leq na$, et $p_n(k) = 0$ pour $k > na$. Pour tout entier k fixé, la première situation se présente dès que n est suffisamment grand.

1. (a) Expression et signe de g_0 .

La fonction f_0 est dérivable sur $]0, 1[$. En dérivant explicitement :

$$f'_0(x) = -\frac{a}{x^2} \ln(1-x) - \frac{a}{x(1-x)},$$

donc :

$$g_0(x) = -a \ln(1-x) - \frac{ax}{1-x}.$$

Cette fonction est dérivable sur $]0, 1[$ et :

$$g'_0(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{a}{(1-x)^2} = -\frac{ax}{(1-x)^2} < 0.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_0(x) = 0$. Son prolongement par $g_0(0) = 0$ est continu et strictement décroissant sur $[0, 1[$. Par conséquent :

$$g_0(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.$$

1. (b) Variations et limite de f_0 .

Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'_0(x)$ est celui de $g_0(x)$. La fonction f_0 est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$.

Le développement limité usuel $\ln(1-x) = -x + o(x)$ donne :

$$f_0(x) = a \frac{-x + o(x)}{x} + a = o(1).$$

$$\text{Ainsi } L = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 0.$$

À l'autre extrémité, $a/x \rightarrow a > 0$ et $\ln(1-x) \rightarrow -\infty$, donc $f_0(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Le prolongement décroît de 0 à $-\infty$ et $f_0(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

1. (c) Prolongement de classe C^1 et courbe.

On pose $f_0(0) = 0$. Pour étudier la dérivée sans dériver un reste de développement limité, on repart de son expression exacte.

En 0, les développements usuels donnent :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \frac{x}{1-x} = x + x^2 + o(x^2).$$

Ainsi :

$$g_0(x) = -a \ln(1-x) - \frac{ax}{1-x} = -\frac{a}{2}x^2 + o(x^2).$$

En divisant par x^2 , on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_0(x) = -a/2$.

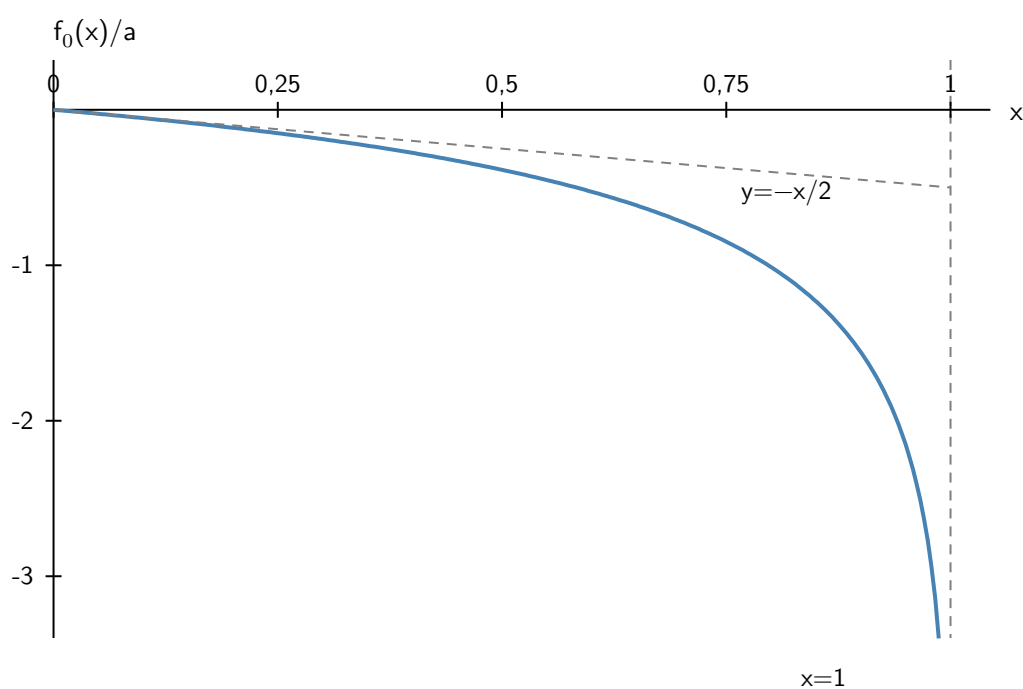
D'autre part, le développement de $\ln(1-x)$ donne directement :

$$f_0(x) = -\frac{a}{2}x + o(x).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f_0(x) - f_0(0))/x = -a/2$: le prolongement est dérivable à droite en 0, avec $f'_0(0) = -a/2$. Sur $]0, 1[$, la dérivée est continue par son expression explicite, et sa limite en 0 est sa valeur en 0. La fonction prolongée est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$, au sens de la dérivation à droite à l'extrémité.

Sa courbe passe par l'origine, reste strictement sous l'axe horizontal pour $x > 0$, est strictement décroissante et admet la tangente $y = -ax/2$ en 0. La droite $x = 1$ est une asymptote verticale, puisque $f_0(x) \rightarrow -\infty$.

La figure représente $f_0(x)/a = \ln(1-x)/x + 1$ et sa tangente $y = -x/2$. Elle est commune à tous les paramètres a ; multiplier les ordonnées par a redonne la courbe de f_0 . La fenêtre affichée est limitée aux ordonnées supérieures à $-3,4$.



1. (d) Limite et monotonie de $(p_n(0))$.

Question adaptée au programme actuel : la notation $p_0(0)$ imprimée dans le PDF est rectifiée en $p_n(0)$. L'identité avec $f_0(1/n)$ est limitée à $n \geq 2$, car f_0 n'est pas définie en 1.

Pour $n \geq 2$:

$$f_0(1/n) = na \ln(1 - 1/n) + a,$$

donc :

$$p_n(0) = (1 - 1/n)^{na} = e^{f_0(1/n)-a}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $1/n \rightarrow 0$ et $f_0(1/n) \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle :

$$p_n(0) \rightarrow e^{-a}.$$

La suite $(1/n)$ est strictement décroissante, tandis que f_0 est strictement décroissante : la suite $(f_0(1/n))_{n \geq 2}$ est donc strictement croissante. L'exponentielle étant strictement croissante, $(p_n(0))_{n \geq 2}$ l'est aussi.

Pour $n = 1$, le seul fournisseur reçoit $a \geq 1$ clients et $p_1(0) = 0 < p_2(0)$. La suite entière $(p_n(0))_{n \geq 1}$ est ainsi strictement croissante et converge vers e^{-a} . Elle reste strictement inférieure à sa limite.

2. (a) Limite des probabilités ponctuelles et loi limite.

Pour $k = 0$, la question précédente donne $p_n(0) \rightarrow e^{-a}$.

Pour un entier fixé $k \geq 1$, prenons n assez grand pour que $n \geq 2$ et $na \geq k$. On écrit :

$$\binom{na}{k} n^{-k} = \frac{(na)(na-1)\cdots(na-k+1)}{k! n^k} = \frac{a^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{na}\right).$$

Chaque facteur de ce produit fini tend vers 1. De plus, $(1 - 1/n)^{na} = p_n(0) \rightarrow e^{-a}$ et $(1 - 1/n)^{-k} \rightarrow 1$. Par les règles de limite des produits finis :

$$p_n(k) = \frac{a^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{na}\right) (1 - 1/n)^{na} (1 - 1/n)^{-k} \rightarrow e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

La formule englobe $k = 0$ en prenant le produit vide égal à 1. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p(k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

Ces nombres sont les probabilités d'une loi de Poisson de paramètre a . Ils somment bien à 1, puisque la série exponentielle donne

$$e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k / k! = 1.$$

La caractérisation de la convergence en loi par les probabilités ponctuelles pour les variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ permet de conclure à la convergence en loi vers $\mathcal{P}(a)$.

Le résultat était prévisible par l'approximation binomiale-Poisson : le nombre d'essais na tend vers l'infini, la probabilité de succès $1/n$ tend vers 0, et leur produit reste égal à a . La démonstration précédente établit ici cette limite directement, sans utiliser un résultat supplémentaire.

2. (b) Moments et modes de la loi limite.

Soit Z une variable de loi $\mathcal{P}(a)$. Les propriétés de la loi de Poisson assurent l'existence de ses deux premiers moments et donnent :

$$E(Z) = a, \quad V(Z) = a.$$

Pour déterminer ses modes, toutes les probabilités $p(k)$ étant strictement positives, on étudie :

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{a}{k+1}.$$

Ce rapport est strictement supérieur à 1 lorsque $k \leq a - 2$, égal à 1 lorsque $k = a - 1$, et strictement inférieur à 1 lorsque $k \geq a$. Puisque a est un entier strictement positif, les deux modes sont donc :

$$a - 1 \quad \text{et} \quad a.$$

Pour $a = 1$, les deux modes sont 0 et 1 ; la phase de stricte croissance avant ces modes est vide. La loi limite possède donc deux modes adjacents, tandis que les lois binomiales de la partie I avaient un mode unique égal à a .

3. (a) Lien entre le logarithme du quotient et f_k .

Question adaptée au programme actuel dans le préambule de 3 : un domaine commun explicite est donné pour assurer la positivité des arguments de tous les logarithmes. On suppose $k \geq 1$, $k \neq b, c$, et on prend n assez grand pour que $1/n < \delta_k$.

En particulier, $n \geq 2$ et $na > k - 1$. Comme na et k sont entiers, $na \geq k$. Les probabilités $p_n(k)$ et $p(k)$ sont donc strictement positives et leur quotient peut être logarithmé.

La factorisation utilisée en 2. (a) donne :

$$\frac{p_n(k)}{p(k)} = e^a \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{na}\right) (1 - 1/n)^{na-k}.$$

En prenant le logarithme d'un produit fini de nombres strictement positifs :

$$\ln \frac{p_n(k)}{p(k)} = a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{j}{na}\right) + (na - k) \ln(1 - 1/n).$$

L'évaluation de la définition de f_k en $1/n$ donne exactement le même résultat. Par conséquent :

$$\ln \frac{p_n(k)}{p(k)} = f_k(1/n), \quad p_n(k) = p(k) e^{f_k(1/n)}.$$

3. (b) Développement limité et position par rapport à la limite.

On multiplie d'abord la définition par x :

$$x f_k(x) = (a - kx) \ln(1 - x) + ax + x \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{jx}{a}\right).$$

Le développement usuel de $\ln(1 - x)$ donne :

$$(a - kx) \ln(1 - x) = -ax + \left(k - \frac{a}{2}\right) x^2 + o(x^2).$$

Pour chaque indice fixé j , on applique le développement de $\ln(1 - t)$ à la variable $t = jx/a$. Lorsque $j > 0$, ce changement de variable est affine et $t \rightarrow 0$; lorsque $j = 0$, le logarithme est identiquement nul. Ainsi :

$$\ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right) = -\frac{j}{a}x + o(x).$$

Comme la somme comporte un nombre fixé k de termes :

$$x \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right) = -\frac{1}{a} \left(\sum_{j=0}^{k-1} j\right) x^2 + o(x^2) = -\frac{k(k-1)}{2a} x^2 + o(x^2).$$

La somme des entiers consécutifs utilisée ici est la somme arithmétique

$$0 + 1 + \dots + (k-1) = k(k-1)/2.$$

Les termes linéaires $-ax$ et ax se compensent. En posant :

$$A_k = k - \frac{a}{2} - \frac{k(k-1)}{2a} = \frac{-k^2 + (2a+1)k - a^2}{2a},$$

on obtient le développement demandé :

$$xf_k(x) = A_k x^2 + o(x^2).$$

Pour factoriser ce coefficient, les nombres définis dans le sujet vérifient $b + c = 2a + 1$ et $bc = a^2$. Il en résulte :

$$A_k = -\frac{(k-b)(k-c)}{2a}.$$

Comme $a > 0$ et $b < c$, le signe de A_k est positif pour $b < k < c$, et négatif pour $k < b$ ou $k > c$. Les cas $k = b$ et $k = c$ sont exclus par l'énoncé, donc $A_k \neq 0$.

En divisant le développement par $x > 0$:

$$f_k(x) = A_k x + o(x),$$

puis, en évaluant en $x = 1/n$:

$$f_k(1/n) = \frac{A_k}{n} + o(1/n).$$

Cela signifie que $nf_k(1/n) \rightarrow A_k \neq 0$. À partir d'un certain rang, le signe de $f_k(1/n)$ est donc celui de A_k . Puisque $p_n(k) = p(k)e^{f_k(1/n)}$ et $p(k) > 0$, on conclut :

Position de k	Signe de A_k	Signe de $f_k(1/n)$ pour n grand	Position de $p_n(k)$
$k < b$ ou $k > c$	négatif	négatif	$p_n(k) < p(k)$
$b < k < c$	positif	positif	$p_n(k) > p(k)$

Ces comparaisons sont asymptotiques : elles ne sont pas affirmées pour tous les premiers indices n .

3. (c) Développement de g_k et monotonie à partir d'un certain rang.

Question adaptée au programme actuel : la notation $(p_k(n))$ du PDF est rectifiée en $(p_n(k))$, conformément à la définition et à l'objet de cette question.

On calcule f'_k à partir de sa formule exacte ; il ne serait pas justifié de dériver directement le reste $o(x)$ obtenu dans la question précédente. Sur le domaine $]0, \delta_k[$:

$$f'_k(x) = -\frac{a}{x^2} \ln(1-x) - \frac{a/x - k}{1-x} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{a-jx}.$$

En multipliant par x^2 :

$$g_k(x) = -a \ln(1-x) - \frac{ax - kx^2}{1-x} - x^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{a-jx}.$$

On développe les trois termes séparément. Les développements usuels donnent :

$$-a \ln(1-x) = ax + \frac{a}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$-\frac{ax - kx^2}{1-x} = -(ax - kx^2)(1+x+o(x)) = -ax + (k-a)x^2 + o(x^2).$$

Enfin, pour chaque j , la fonction $j/(a - jx)$ est continue en 0 et tend vers j/a . La somme étant finie :

$$-x^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{a - jx} = -\frac{k(k-1)}{2a} x^2 + o(x^2).$$

En additionnant, les termes linéaires s'annulent et l'on obtient :

$$g_k(x) = A_k x^2 + o(x^2) = -\frac{(k-b)(k-c)}{2a} x^2 + o(x^2).$$

Comme $f'_k(x) = g_k(x)/x^2$, on a $f'_k(x) \rightarrow A_k \neq 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Il existe donc $\eta \in]0, \delta_k[$ tel que $f'_k(x)$ ait partout le signe de A_k sur $]0, \eta[$. C'est ce contrôle sur tout un intervalle qui permet de conclure à la monotonie.

Pour n assez grand, $1/(n+1) < 1/n < \eta$.

Si $b < k < c$, alors $A_k > 0$ et f_k est strictement croissante en x sur cet intervalle. Comme $1/n$ décroît, on a $f_k(1/(n+1)) < f_k(1/n)$. La suite $(f_k(1/n))$ est donc strictement décroissante à partir d'un certain rang, avec des termes positifs tendant vers 0.

L'exponentielle étant strictement croissante, $(p_n(k))$ est également strictement décroissante à partir de ce rang et converge vers $p(k)$ par valeurs supérieures.

Si $k < b$ ou $k > c$, alors $A_k < 0$ et f_k est strictement décroissante en x près de 0. On a alors $f_k(1/(n+1)) > f_k(1/n)$. La suite $(f_k(1/n))$ est strictement croissante à partir d'un certain rang, avec des termes négatifs tendant vers 0. La suite $(p_n(k))$ est strictement croissante à partir de ce rang et converge vers $p(k)$ par valeurs inférieures.

Position de k	Variation de $f_k(1/n)$ pour n grand	Variation de $p_n(k)$ pour n grand	Approche de la limite
$k < b$ ou $k > c$	strictement croissante	strictement croissante	par valeurs inférieures
$b < k < c$	strictement décroissante	strictement décroissante	par valeurs supérieures

Pour $k = 0$, la question II. 1 fournit déjà une croissance stricte dès le début. Les valeurs $k = b$ ou $k = c$ ne sont pas concernées par II. 3 : le coefficient d'ordre étudié y serait nul et ces valeurs ont été explicitement exclues du sujet.

Relevé des adaptations

- Préambule : indépendance des choix des consommateurs explicitée. Elle est indispensable aux lois binomiales et aux probabilités d'affectation ; la seule équiprobabilité des fournisseurs ne la garantit pas.
- I. 1. (b) : bornes du rapport rectifiées en $0 \leq k < na$ et cas $n = 1$ traité séparément. Cela inclut le premier terme de la loi et évite de diviser par une probabilité nulle dans le cas dégénéré.
- I. 2 : hypothèse $n \geq 2$ explicitée pour l'existence de deux indices distincts et de variances strictement positives.
- I. 4 : convention de l'intersection vide ajoutée pour $k = 0$.
- I. 4. (b), utilisée en I. 4. (d)-(f) : indication de développement du produit fini ajoutée. La formule du crible pour un nombre quelconque d'événements est entièrement démontrée dans ce problème, sans être supposée connue.
- II. 1. (c) : dérivée à droite en 0 précisée pour le prolongement sur $[0, 1[$.
- II. 1. (d) : coquille $p_0(0)$ rectifiée en $p_n(0)$; identité avec $f_0(1/n)$ limitée à $n \geq 2$, avec traitement direct de $n = 1$.
- II. 3 : domaine $]0, \delta_k[$ explicité et évaluations en $1/n$ réservées aux indices suffisamment grands, afin que tous les arguments des logarithmes soient strictement positifs.

- II. 3. (c) : coquille $(p_k(n))$ rectifiée en $(p_n(k))$.