



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, 3, \dots, n$. On y effectue une suite de tirages avec remise, ce qui signifie qu'à chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants et chaque boule a une probabilité $1/n$ d'être extraite à chaque tirage.

Soit X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été obtenue au moins une fois.

L'objet du problème est l'étude de la variable aléatoire X_n dans la partie I et du comportement asymptotique de son espérance.

Dans les formules polynomiales et les sommes finies ci-dessous, une puissance d'exposant nul vaut 1, y compris lorsque sa base vaut 0.

Partie I

On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on considère l'événement B_i défini par : « la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages ».

1. Étude de la variable aléatoire X_2

Dans cette question, on suppose que $n = 2$, ce qui revient à supposer que l'urne ne contient que deux boules numérotées 1 et 2.

(a) Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^p,$$

$$\Sigma_p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + px^{p-1}.$$

Déterminer leurs limites respectives $S(x)$ et $\Sigma(x)$ quand p tend vers l'infini.

(b) Calculer $P(X_2 = p)$. En déduire l'espérance de X_2 .

2. Étude de la variable aléatoire X_3

Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

(a) On rappelle la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

À l'aide de celle-ci, établir une formule analogue donnant la probabilité de la réunion $A \cup B \cup C$ de trois événements A , B et C .

(b) Soient i, j, k trois entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Calculer $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$, $P(B_i \cap B_j \cap B_k)$ et en déduire $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

(c) Exprimer $P(X_3 > p)$ à l'aide de $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ et en déduire $P(X_3 = p)$.

(d) Calculer l'espérance de X_3 , que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

3. Étude de la variable aléatoire X_n

Dans cette question, on revient au cas général.

(a) Calculer, en fonction de n et p , les probabilités $P(B_i)$ et $P(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$. De façon générale, si $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont k entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, calculer en fonction de n, p, k la probabilité de l'intersection $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}$.

(b) En déduire, à l'aide de la formule du crible, la probabilité de la réunion $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

La formule du crible pour cette famille finie est :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}).$$

On pourra justifier cette formule en considérant une réalisation appartenant exactement

à r des événements B_i , puis en utilisant le binôme de Newton pour calculer

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \binom{r}{k}$$

lorsque $r \geq 1$.

(c) Que vaut $P(X_n > p)$? En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$:

$$P(X_n = p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}.$$

(d) En déduire l'identité suivante pour tout entier q tel que $0 \leq q < n$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^q = 0.$$

4. Calcul de l'espérance $E(X_n)$

On pose désormais :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(a) Établir, pour tout réel x de $[0, 1]$, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1}.$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n.$$

- (b) Dédurre des résultats précédents que l'on a $E(X_n) = nH_n$.
- (c) Écrire un algorithme en Python de calcul de $E(X_n)$ et en déduire des valeurs décimales approchées de $E(X_n)$ pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ et $n = 100$. On donnera ces valeurs arrondies à deux chiffres après la virgule.

Partie II

Dans cette partie, H_n est le nombre défini en I.4.

1. Étude de $H_n - \ln(n)$

- (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que l'on a, pour tout réel strictement positif x :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

- (b) On considère les suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = H_n - \ln(n), \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

Étudier leur sens de variation et montrer qu'elles sont convergentes vers une limite commune que l'on notera γ .

- (c) Montrer que $u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n$ et en déduire comment il suffit de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de γ à 0,0001.

2. Étude d'une fonction auxiliaire

Dans cette question, x désigne un réel positif et l'on pose :

$$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x).$$

- (a) Calculer F' et montrer que $0 \leq F(x) \leq \frac{x^3}{6}$.
- (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de F en 0. En déduire le plus petit nombre réel positif k tel que l'on ait, pour tout x positif, $F(x) \leq kx^3$.

3. Étude asymptotique de H_n

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$w_n = H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}.$$

(a) Soit p un entier strictement supérieur à n . Calculer la somme des termes $w_{k+1} - w_k$ pour $n+1 \leq k \leq p$ et en déduire l'existence et la valeur de :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k).$$

(b) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $F\left(\frac{1}{k}\right)$. Par comparaison d'une série à une intégrale, en déduire que :

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

(c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir :

$$0 \leq \gamma - \left(H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}\right) \leq 0,0001?$$

Calculer la valeur approchée de γ ainsi obtenue. On donnera le résultat numérique en indiquant explicitement le nombre de décimales affichées.

4. Conclusion

Démontrer qu'il existe des réels a, b, c , que l'on explicitera, et une suite (ε_n) de limite nulle telle que l'on ait :

$$E(X_n) = an \ln(n) + bn + c + \varepsilon_n.$$

Retrouver ainsi les résultats numériques demandés au I.4 en donnant à chaque fois un majorant de l'erreur commise.