



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

Question adaptée au programme actuel — préambule : les tirages sont explicitement supposés indépendants et uniformes sur les n boules, ce que sous-entend le modèle de l'urne dans l'original. Une puissance d'exposant nul vaut 1 dans les expressions polynomiales, y compris en base nulle.

Pour tout entier $p \geq 1$, l'événement $\{X_n > p\}$ signifie qu'au moins une boule manque encore après les p premiers tirages. Chaque boule a une probabilité $(1 - 1/n)^p$ de manquer. Par l'inégalité de l'union :

$$P(X_n > p) \leq n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Pour $n \geq 2$, ce majorant tend vers 0. La continuité monotone des probabilités montre donc que la collecte finit presque sûrement. De plus, pour $p \geq 2$:

$$P(X_n = p) \leq P(X_n > p - 1) \leq n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-1}.$$

La série de terme général $p(1 - 1/n)^{p-1}$ converge, car c'est la première série géométrique dérivée du programme. La comparaison justifie ainsi l'existence de $E(X_n)$ avant tout calcul. Pour $n = 1$, $X_1 = 1$ presque sûrement et son espérance existe également.

Partie I

1. Étude de la variable aléatoire X_2

(a) Sommes géométrique et pondérée

La somme géométrique finie donne, pour $0 \leq x < 1$:

$$S_p(x) = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}.$$

Calculons la seconde somme de deux manières.

Méthode 1 — Dérivation d'une somme finie

Comme S_p est un polynôme, sa dérivation terme à terme est autorisée et $S'_p(x) = \Sigma_p(x)$.

En dérivant l'expression précédente :

$$\Sigma_p(x) = \frac{-(p+1)x^p(1-x) + 1 - x^{p+1}}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\Sigma_p(x) = \frac{1 - (p+1)x^p + px^{p+1}}{(1-x)^2}.$$

Méthode 2 — Soustraction de deux sommes décalées

On multiplie Σ_p par x et on soustrait. Les coefficients des puissances intermédiaires se simplifient :

$$(1-x)\Sigma_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1} - px^p = \frac{1-x^p}{1-x} - px^p.$$

La division par $1-x \neq 0$ donne la même expression. Cette approche algébrique est utile lorsque l'on souhaite éviter une dérivation ; la première relie directement une somme pondérée à la dérivée d'un polynôme.

Pour $0 < x < 1$, $x^{p+1} \rightarrow 0$ et $px^p \rightarrow 0$ par les croissances comparées. Pour $x = 0$, les deux sommes valent 1. Par conséquent :

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \Sigma(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On a pris la limite des expressions finies, sans dériver une limite de fonctions.

(b) Loi et espérance de X_2

Il faut au moins deux tirages : $P(X_2 = 1) = 0$. Pour $p \geq 2$, l'événement $\{X_2 = p\}$ impose que les $p - 1$ premiers tirages donnent tous la même boule et que le dernier donne l'autre. Les deux possibilités pour la première boule sont disjointes et chacune a une probabilité $(1/2)^p$. Ainsi :

$$P(X_2 = p) = 2^{1-p} \quad (p \geq 2).$$

La somme de ces probabilités vaut

$$\sum_{p=2}^{\infty} 2^{1-p} = 1,$$

en accord avec la fin presque sûre de la collecte.

Méthode 1 — Calcul à partir de la loi

L'espérance existe par le préliminaire. En utilisant I.1(a) en $x = 1/2$:

$$E(X_2) = \sum_{p=2}^{\infty} p \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Méthode 2 — Temps d'attente géométrique

Après le premier tirage, il reste une boule à obtenir. Conditionnellement à l'identité de la première boule, chaque tirage suivant a une probabilité $1/2$ de donner la boule manquante, indépendamment des précédents. Le nombre Y de tirages supplémentaires nécessaires suit donc la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/2$. Cette loi ne dépend pas de l'identité de la première boule, donc elle est aussi la loi non conditionnelle de Y .

Comme $X_2 = 1 + Y$ et $E(Y) = 2$, on obtient de nouveau :

$$E(X_2) = 3.$$

La première méthode utilise les probabilités ponctuelles ; la seconde reconnaît un temps d'attente après la première découverte.

2. Étude de la variable aléatoire X_3

(a) Formule du crible pour trois événements

On applique d'abord la formule pour deux événements à $A \cup B$ et C :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Or $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Une seconde application de la formule donne :

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

En remplaçant aussi $P(A \cup B)$, on obtient :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(b) Probabilités des boules manquantes

Une boule fixée manque après p tirages si chaque tirage donne l'une des deux autres.

L'indépendance des tirages donne :

$$P(B_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^p.$$

Deux boules distinctes manquent si tous les tirages donnent la troisième, donc :

$$P(B_i \cap B_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Puisque $p \geq 1$, il est impossible que les trois boules manquent :

$$P(B_i \cap B_j \cap B_k) = 0.$$

La formule de (a), avec trois probabilités individuelles et trois probabilités d'intersections doubles, donne :

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

(c) Queue de la loi et probabilités ponctuelles

Il manque une boule après p tirages si et seulement si la collecte n'est pas terminée.

Ainsi, pour $p \geq 1$:

$$P(X_3 > p) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Pour $p \geq 2$, on peut utiliser cette formule aux indices $p-1$ et p . Les événements $\{X_3 > p-1\}$ et $\{X_3 > p\}$ sont emboîtés et leur différence est $\{X_3 = p\}$. Donc :

$$P(X_3 = p) = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^p \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^p \right].$$

$$P(X_3 = p) = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \quad (p \geq 2).$$

Pour $p = 2$, cette expression vaut 0. Pour $p = 1$, on a directement $P(X_3 = 1) = 0$: il ne faut pas utiliser la formule de queue de (b) au rang 0, où les trois événements de boules manquantes ont une intersection certaine.

(d) Espérance de X_3

Méthode 1 — Somme des probabilités pondérées

L'existence de l'espérance est déjà justifiée. Les deux séries utilisées ci-dessous convergent absolument, par I.1(a). Ainsi :

$$E(X_3) = \sum_{p=2}^{\infty} p \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \right].$$

On calcule chaque série à l'aide de Σ :

$$E(X_3) = \left[\frac{1}{(1-2/3)^2} - 1 \right] - 2 \left[\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 \right] = 8 - 2 \times \frac{5}{4} = \frac{11}{2}.$$

Méthode 2 — Somme des probabilités de queue

Justifions la formule de queue dans ce cas, sans échange de sommes infinies. Pour toute variable entière positive X et tout entier $M \geq 1$, un calcul fini donne :

$$\sum_{p=0}^{M-1} P(X > p) = \sum_{j=1}^M jP(X = j) + MP(X > M).$$

En effet, une valeur $j \leq M$ est comptée exactement j fois à gauche, tandis qu'une valeur strictement supérieure à M est comptée M fois. Pour $X = X_3$, le préliminaire entraîne $MP(X_3 > M) \leq 3M(2/3)^M \rightarrow 0$. La somme pondérée à droite converge vers $E(X_3)$. On obtient donc :

$$E(X_3) = \sum_{p=0}^{\infty} P(X_3 > p) = 1 + 3 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Les sommes géométriques valent respectivement 2 et $1/2$. Ainsi :

$$E(X_3) = 1 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

La fraction est irréductible. La méthode par la queue est particulièrement utile lorsque $P(X > p)$ a une expression plus simple que $P(X = p)$.

3. Étude de la variable aléatoire X_n

(a) Intersections d'événements de boules manquantes

Une boule fixée manque à chaque tirage avec une probabilité $(n-1)/n$. Deux boules distinctes manquent à chaque tirage avec une probabilité $(n-2)/n$. L'indépendance des p tirages donne donc :

$$P(B_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p, \quad P(B_i \cap B_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p \quad (i \neq j).$$

La deuxième expression ne concerne que $n \geq 2$, puisque deux indices distincts n'existent pas pour $n = 1$. Plus généralement, pour $1 \leq k \leq n$, l'intersection de k événements de boules manquantes signifie qu'à chaque tirage on choisit l'une des $n-k$ autres boules. Ainsi :

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p.$$

Pour $k = n$ et $p \geq 1$, cette probabilité vaut 0, comme attendu.

(b) Réunion et formule du crible

Question adaptée au programme actuel : le crible pour une famille finie quelconque est fourni avec une indication de preuve, car seul le crible pour deux ou trois événements est un résultat de cours du référentiel.

Vérifions la formule particulière employée. Pour une réalisation appartenant exactement à $r \geq 1$ des événements B_i , il existe $\binom{r}{k}$ intersections de k événements qui la contiennent. Sa contribution à la somme alternée des indicatrices est :

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \binom{r}{k} = 1 - (1-1)^r = 1.$$

Si la réalisation n'appartient à aucun B_i , sa contribution est 0. La somme alternée est donc exactement l'indicatrice de la réunion. Toutes les sommes étant finies, la linéarité de l'espérance donne la formule du crible sans difficulté de convergence.

Il y a $\binom{n}{k}$ choix d'une intersection de k événements distincts. En utilisant (a) :

$$P(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p.$$

(c) Queue de la loi et loi de X_n

Pour $p \geq 1$, on a $\{X_n > p\} = \bigcup_{i=1}^n B_i$, donc :

$$P(X_n > p) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p.$$

Cette expression reste valable pour $p = 0$ avec la convention polynomiale sur les puissances nulles. Le membre de droite vaut alors

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1 = P(X_n > 0).$$

Pour tout $p \geq 1$, on soustrait les queues aux rangs $p-1$ et p :

$$P(X_n = p) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1} \left[1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right].$$

Le facteur entre crochets est k/n . Ajouter le terme $k = 0$, nul à cause de ce facteur, donne exactement :

$$P(X_n = p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}.$$

Le support est inclus dans $\{n, n+1, \dots\}$, puisqu'un tirage ne peut découvrir qu'une boule. Pour $n \geq 2$, chaque entier $p \geq n$ est effectivement possible : les $n-1$ premières

boules peuvent être découvertes, l'une d'elles répétée jusqu'au rang $p - 1$, puis la dernière obtenue au rang p . Pour $n = 1$, la loi est certaine en 1, ce que donne aussi la formule.

(d) Identité binomiale avec les puissances

Méthode 1 — Exploiter l'impossibilité de finir avant n tirages

Posons

$$M_q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^q.$$

Pour $q = 0$, le binôme de Newton donne $M_0 = (1 - 1)^n = 0$.

Si $n = 1$, c'est le seul cas demandé. Supposons désormais $n \geq 2$. Pour $1 \leq p < n$, on a $P(X_n = p) = 0$. En multipliant l'expression de (c) par n et en développant la puissance par le binôme de Newton, il vient :

$$0 = - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1}{j} \left(-\frac{1}{n}\right)^j M_{j+1}.$$

Pour $p = 1$, cette égalité donne $M_1 = 0$. Supposons $M_1, \dots, M_{p-1}$ nuls, avec $p < n$. Tous les termes de la dernière somme disparaissent sauf celui d'indice $j = p - 1$, dont le coefficient $-(-1/n)^{p-1}$ est non nul. On obtient donc $M_p = 0$. Par récurrence :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^q = 0 \quad (0 \leq q < n)}.$$

Méthode 2 — Dériver une identité polynomiale

Le binôme de Newton donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k = (1-x)^n.$$

Pour $0 \leq j < n$, on dérive cette égalité j fois puis on évalue en $x = 1$. Le membre de droite est nul, car il contient le facteur $(1-x)^{n-j}$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k J_j(k) = 0,$$

où $J_0(T) = 1$ et $J_j(T) = T(T-1) \cdots (T-j+1)$ pour $j \geq 1$. Les termes $k < j$ sont nuls, ce qui justifie l'écriture avec tous les indices.

Pour $q < n$, les polynômes $J_0, \dots, J_q$ sont unitaires de degrés respectifs $0, \dots, q$. Ils sont libres par comparaison des coefficients de plus haut degré et forment donc une base de $\mathbb{R}_q[T]$. Le polynôme T^q est une combinaison linéaire de ces polynômes. En combinant les identités précédentes, on obtient $M_q = 0$.

La première méthode est celle demandée par l'enchaînement probabiliste ; la seconde explique l'identité par la multiplicité de la racine 1 du polynôme $(1-x)^n$.

4. Calcul de l'espérance $E(X_n)$

(a) Identité intégrale donnant H_n

Pour $x \in]0, 1]$, la somme géométrique finie donne :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j = \frac{1 - (1-x)^n}{x}.$$

En développant $(1 - x)^n$ par le binôme de Newton, on obtient :

$$1 - (1 - x)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^k.$$

Après division par x , on retrouve l'identité demandée. Les deux membres sont des polynômes en x , donc leur égalité se prolonge par continuité en 0. Elle est ainsi valable sur tout $[0, 1]$.

On intègre cette égalité sur $[0, 1]$. La somme est finie, donc la linéarité s'applique directement. Pour chaque $j \geq 0$, une primitive donne $\int_0^1 (1 - x)^j dx = 1/(j + 1)$. Pour

$k \geq 1$, $\int_0^1 x^{k-1} dx = 1/k$. Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} = H_n.$$

(b) Espérance générale

Méthode 1 — Loi explicite et séries géométriques dérivées

La loi obtenue en I.3(c) est une somme finie de termes. Pour chaque $1 \leq k \leq n$, posons $z_k = 1 - k/n \in [0, 1]$. La série

$$\sum_{p=1}^{\infty} p z_k^{p-1}$$

converge et vaut $1/(1 - z_k)^2 = n^2/k^2$, par I.1(a). Il est donc permis de permuter une

somme finie avec ces séries convergentes :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}.$$

$$E(X_n) = n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = nH_n,$$

par (a), puisque $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$. Le terme $k = n$, de base nulle, est également correct : la série correspondante vaut 1.

Méthode 2 — Décomposer la collecte en temps d'attente

Pour $0 \leq j \leq n-1$, soit Y_j le nombre de tirages nécessaires pour passer de j boules distinctes obtenues à $j+1$. Lorsque j boules ont été découvertes, chaque tirage suivant apporte une nouvelle boule avec une probabilité $(n-j)/n$.

Pour justifier la loi de Y_j malgré le caractère aléatoire de l'instant de départ, on conditionne par une histoire finie donnée se terminant au moment de la j -ième découverte. Les tirages futurs sont indépendants de cette histoire. Obtenir $r-1$ boules déjà connues, puis une boule nouvelle, a donc une probabilité $(j/n)^{r-1}(n-j)/n$, qui ne dépend pas de l'histoire choisie. En appliquant les probabilités totales à ces histoires possibles, on obtient la même loi pour Y_j .

Ainsi Y_j suit une loi géométrique de paramètre $(n-j)/n$, avec $E(Y_j) = n/(n-j)$. Pour $j=0$, il s'agit de la loi certaine en 1. On a

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} Y_j.$$

Aucune indépendance entre les Y_j n'est nécessaire pour appliquer la linéarité à cette

somme finie de variables intégrables.

$$E(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \sum_{r=1}^n \frac{1}{r}.$$

Les deux méthodes donnent :

$$E(X_n) = nH_n.$$

La première exploite le crible et l'identité intégrale ; la seconde explique pourquoi la collecte devient de plus en plus lente à mesure que les boules manquantes se raréfient.

(c) Algorithme et valeurs numériques

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : les valeurs sont demandées avec un arrondi explicite à deux décimales.

Python

```
import numpy as np

def esperance_collecte(n):
    h = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        h = h + 1.0 / k
    return n * h

effectifs = np.array([10, 20, 50, 100])
resultats = np.zeros(4)
for j in range(4):
    resultats[j] = esperance_collecte(effectifs[j])
```

La variable h accumule H_n . La borne supérieure exclusive de `range(1, n + 1)` permet d'inclure le terme $1/n$. La fonction renvoie nH_n . Le tableau `resultats` contient les quatre espérances dans l'ordre de `effectifs`.

Ce code a été exécuté. Les valeurs numériques sont :

n	$E(X_n)$ approchée	Arrondi à deux décimales
10	29,289682539683	29,29
20	71,954793142874	71,95
50	224,960266916471	224,96
100	518,737751763962	518,74

Ces évaluations illustrent la formule exacte $E(X_n) = nH_n$; elles ne remplacent pas sa démonstration.

Partie II

1. Étude de $H_n - \ln(n)$

(a) Encadrement d'un accroissement du logarithme

Pour $x > 0$, la fonction logarithme est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Le théorème des accroissements finis donne un réel $\xi \in]x, x+1[$ tel que :

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{\xi}.$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(b) Suites adjacentes et constante γ

On calcule les différences consécutives :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] < 0,$$

d'après (a) avec $x = n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+2) - \ln(n+1)] > 0,$$

d'après (a) avec $x = n + 1$. La suite (v_n) est strictement croissante.

Enfin :

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Il s'ensuit $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$. Ainsi (u_n) est minorée et (v_n) est majorée ; le théorème de la limite monotone assure leur convergence. Leur différence tend vers 0 par continuité du logarithme en 1. Elles ont donc la même limite, notée γ :

$$\boxed{u_n \longrightarrow \gamma, \quad v_n \longrightarrow \gamma, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n}.$$

Ce sont des suites adjacentes. En particulier $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.

(c) Première approximation de γ

D'après (a), $u_n - v_n < 1/n$. Comme $v_n \leq \gamma \leq u_n$, on a :

$$u_n - \frac{1}{n} < v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

En particulier, l'encadrement demandé est vérifié :

$$\boxed{u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n}.$$

Ainsi $0 \leq u_n - \gamma \leq 1/n$. Il suffit donc de choisir :

$$\boxed{n \geq 10000},$$

pour garantir une erreur absolue au plus égale à 0,0001. Il s'agit d'une condition suffisante issue de cette borne, et non d'une affirmation sur le plus petit indice possible.

2. Étude d'une fonction auxiliaire

(a) Dérivée et majoration de F

La fonction F est dérivable sur $] -1, +\infty[$. Pour $x \geq 0$:

$$F'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2}.$$

Comme $(1+x)^2 \geq 1$, on a $0 \leq F'(x) \leq x^2/2$. De plus, $F(0) = 0$. Le théorème fondamental du calcul intégral, appliqué à une fonction de dérivée continue sur $[0, x]$, donne :

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t)^2} dt.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6}.$$

(b) Développement limité et meilleure constante

Au voisinage de 0, une division polynomiale donne :

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Le développement limité usuel du logarithme est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On additionne ces développements, sans composition :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x - x^2 + x^3) + \frac{x}{2} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3).$$

$$F(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Si une constante k satisfait $F(x) \leq kx^3$ pour tout $x \geq 0$, alors pour $x > 0$, $F(x)/x^3 \leq k$.

En faisant tendre x vers 0^+ , on obtient $1/6 \leq k$.

Or (a) montre que $k = 1/6$ convient pour tout $x \geq 0$. La plus petite constante est donc :

$$k = \frac{1}{6}.$$

3. Étude asymptotique de H_n

(a) Série télescopique et valeur exacte du reste

Pour $p > n$, la somme demandée est finie et télescopique :

$$\sum_{k=n+1}^p (w_{k+1} - w_k) = w_{p+1} - w_{n+1}.$$

Comme $w_j = u_j - 1/(2j)$ et $u_j \rightarrow \gamma$, on a $w_j \rightarrow \gamma$. Les sommes partielles convergent donc et définissent une série convergente, de somme :

$$r_n = \gamma - w_{n+1}.$$

Le décalage d'indice est essentiel : la borne inférieure de la somme est $n + 1$, donc le premier terme est $w_{n+2} - w_{n+1}$ et non $w_{n+1} - w_n$. Aucun indice de l'énoncé n'a été modifié.

(b) Lien avec F et comparaison série-intégrale

Pour $k \geq 1$, on calcule :

$$w_{k+1} - w_k = \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k}.$$

$$w_{k+1} - w_k = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right).$$

La question 2(a) entraîne :

$$0 \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{1}{6k^3}.$$

La série de majorants est une série de Riemann convergente. Pour comparer sa queue à une intégrale, on remarque que $t \mapsto t^{-3}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $k \geq n + 1$:

$$\frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}.$$

En sommant d'abord de $n + 1$ à p , puis en passant à la limite, on obtient :

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{6} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{12n^2}.$$

L'intégrale impropre converge, puisque sa primitive est $-1/(2t^2)$. Ainsi :

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

On a aussi montré que (w_n) est croissante et converge vers γ ; en particulier, $w_n \leq \gamma$ pour tout $n \geq 1$.

(c) Choix de l'indice et valeur numérique

Pour $n \geq 2$, la relation exacte de (a) donne $\gamma - w_n = r_{n-1}$. On applique donc (b) à l'indice $n - 1$:

$$0 \leq \gamma - w_n \leq \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Pour que cette borne soit au plus 10^{-4} , il suffit que :

$$(n-1)^2 \geq \frac{10000}{12}.$$

Comme $28^2 = 784 < 10000/12$ et $29^2 = 841 > 10000/12$, on peut choisir :

$$n = 30.$$

On obtient, en affichant quinze décimales :

$$w_{30} = H_{30} - \ln(30) - \frac{1}{60} \simeq 0,577123082591569.$$

Le majorant théorique de l'erreur est $1/(12 \times 29^2) = 1/10092 < 10^{-4}$. Les quinze décimales affichées sont des décimales de w_{30} ; elles ne signifient pas que γ est connue à quinze décimales grâce à ce seul calcul.

Question adaptée au programme actuel : le nombre de décimales affichées est explicite, au lieu de dépendre d'une calculatrice non spécifiée. Le code suivant calcule cette approximation avec les outils autorisés :

Python

```
import numpy as np

def approximation_gamma(n):
    h = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        h = h + 1.0 / k
    return h - np.log(n) - 1.0 / (2 * n)

valeur = approximation_gamma(30)
```

Ce code a été exécuté ; il donne environ 0,577123082591569, à l'erreur d'arrondi numérique près. Le contrôle de précision pour γ repose sur l'encadrement prouvé, et non sur le nombre de chiffres affichés.

4. Conclusion

Coefficients de l'expansion et premier contrôle du reste

Posons $R_n = \gamma - w_n$. On sait que $R_n \geq 0$ et, pour $n \geq 2$, $R_n \leq 1/[12(n-1)^2]$. Puisque $w_n = H_n - \ln n - 1/(2n)$, on a l'égalité exacte :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - R_n.$$

En multipliant par n et en utilisant $E(X_n) = nH_n$:

$$E(X_n) = n \ln n + \gamma n + \frac{1}{2} - nR_n.$$

On peut donc choisir :

$$a = 1, \quad b = \gamma, \quad c = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_n = -nR_n.$$

Pour $n \geq 2$, $|\varepsilon_n| \leq n/[12(n-1)^2] \rightarrow 0$. La valeur de ε_1 est simplement $1 - \gamma - 1/2$. Cela définit bien une suite de limite nulle sur tous les entiers strictement positifs.

L'approximation $A_n = n \ln n + \gamma n + 1/2$ est une majoration de l'espérance, avec :

$$0 \leq A_n - E(X_n) \leq \frac{n}{12(n-1)^2} \quad (n \geq 2).$$

Ce majorant vaut environ 0,010289 pour $n = 10$, 0,004617 pour $n = 20$, 0,001736 pour $n = 50$ et 0,000851 pour $n = 100$. Il donne une approximation contrôlée, mais ne suffit pas à retrouver tous les arrondis de I.4(c). On affine donc le reste par un calcul élémentaire supplémentaire.

Affinement permettant de retrouver les deux décimales

Pour $x \geq 0$, définissons :

$$B(x) = \frac{1}{12} \left[x^2 - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right], \quad D(x) = \frac{1}{120} \left[x^4 - \left(\frac{x}{1+x} \right)^4 \right].$$

On va établir $0 \leq B(x) - F(x) \leq D(x)$. Le calcul de la dérivée de B donne :

$$B'(x) = \frac{x}{6} \left[1 - \frac{1}{(1+x)^3} \right].$$

En soustrayant la dérivée de F calculée en II.2(a), on obtient :

$$B'(x) - F'(x) = \frac{x[(1+x)^3 - 1 - 3x(1+x)]}{6(1+x)^3} = \frac{x^4}{6(1+x)^3} \geq 0.$$

Comme $B(0) = F(0) = 0$, l'intégration sur $[0, x]$ donne $B(x) - F(x) \geq 0$. D'autre part :

$$D'(x) = \frac{x^3}{30} \left[1 - \frac{1}{(1+x)^5} \right].$$

En soustrayant $B'(x) - F'(x)$ et en développant le numérateur :

$$D'(x) - [B'(x) - F'(x)] = \frac{x^3[(1+x)^5 - 1 - 5x(1+x)^2]}{30(1+x)^5} = \frac{x^6(5 + 5x + x^2)}{30(1+x)^5} \geq 0.$$

Toutes les fonctions sont nulles en 0. Une nouvelle intégration donne bien :

$$0 \leq B(x) - F(x) \leq D(x).$$

Par télescopage à partir de l'indice n , on a

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} F(1/k).$$

Cette identité résulte des sommes partielles $w_{p+1} - w_n$ et de la limite $w_{p+1} \rightarrow \gamma$, et vaut aussi pour $n = 1$.

Or :

$$B(1/k) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right),$$

$$D(1/k) = \frac{1}{120} \left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4} \right).$$

On somme d'abord les inégalités $0 \leq B(1/k) - F(1/k) \leq D(1/k)$ de $k = n$ à un indice fini, puis on passe à la limite. Les sommes de B et de D sont télescopiques et les termes de bord tendent vers 0. Il vient :

$$\boxed{\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} \leq R_n \leq \frac{1}{12n^2}}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{E(X_n) = n \ln n + \gamma n + \frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + \theta_n, \quad 0 \leq \theta_n \leq \frac{1}{120n^3}}.$$

Ce résultat particulier a été démontré uniquement par dérivation, intégration sur des segments et sommes télescopiques ; aucun développement asymptotique extérieur au référentiel n'est invoqué.

Valeurs numériques et majorants de l'erreur

Pour utiliser la dernière formule, il faut une approximation de γ plus précise que celle de II.3(c). En prenant $N = 100000$, une évaluation suffisamment précise de w_N donne l'arrondi $g = 0,577215664893200$ à quinze décimales. La borne de II.3(c), augmentée de l'erreur de cet arrondi, donne :

$$|\gamma - g| \leq \frac{1}{12(99999)^2} + 5 \times 10^{-16} < 8,335 \times 10^{-12}.$$

Posons $T_n = n \ln n + ng + 1/2 - 1/(12n)$. Alors :

$$|E(X_n) - T_n| \leq \frac{1}{120n^3} + n \times 8,335 \times 10^{-12}.$$

Les valeurs du tableau sont affichées à neuf décimales. Les majorants incluent donc aussi 5×10^{-10} pour l'arrondi de cet affichage :

n	Approximation affichée de T_n	Majorant de l'erreur absolue	Arrondi de $E(X_n)$
10	29,289674246	$8,334 \times 10^{-6}$	29,29
20	71,954792102	$1,043 \times 10^{-6}$	71,95
50	224,960266849	$6,759 \times 10^{-8}$	224,96
100	518,737751755	$9,667 \times 10^{-9}$	518,74

Chaque intervalle défini par l'approximation affichée et son majorant reste dans une même plage d'arrondi à deux décimales. On retrouve donc les quatre résultats de I.4(c) avec un contrôle effectif de l'erreur. Les calculs numériques de ces valeurs et de w_N ont été contrôlés à précision accrue ; les preuves des encadrements sont celles données ci-dessus.

Relevé des adaptations

- Préambule : explicitation de l'indépendance et de l'équiprobabilité des tirages, nécessaires pour déterminer les lois à partir du modèle de l'urne ; précision de la convention des puissances d'exposant nul utilisée en I.3(c), I.3(d) et aux valeurs de bord.
- I.3(b) : ajout de la formule du crible pour une famille finie et d'une indication permettant de la démontrer par le binôme de Newton. Le corrigé en fournit la preuve élémentaire, sans la supposer connue hors du cadre à deux ou trois événements du référentiel.

- I.4(c) : Code adapté en Python ; remplacement de la précision dépendant d'une calculatrice par un arrondi explicite à deux décimales.
- II.3(c) : indication explicite du nombre de décimales affichées pour l'approximation, sans attribuer à ces chiffres une précision injustifiée pour γ .

Les indices de II.3(a) sont conservés : $r_n = \gamma - w_{n+1}$. Leur utilisation en II.3(c) donne la condition suffisante $n \geq 30$. Aucune question n'est supprimée et aucun résultat n'est admis sans démonstration.