



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1987

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

Le but de cette partie est l'étude de la suite

$$\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)_{n \geq 1}$$

à l'aide de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \sqrt{n} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

1. Étude de la suite (u_n) .

1. a) Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. b) Prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$

1. c) Étudier le sens de variation de (u_n) et montrer qu'elle converge vers un réel L tel que

$$\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Rapidité de convergence de (u_n) .

2. a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur un intervalle convenable, prouver que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{8(x + \frac{1}{2})} \leq x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}.$$

2. b) En déduire, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{u_k}{8(k + \frac{1}{2})} - \frac{u_k}{8(k + \frac{3}{2})} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}.$$

2. c) Par sommation de ces inégalités, trouver un encadrement de $u_p - u_n$ pour $p > n$, puis établir

$$\frac{u_n}{8(n + \frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \frac{L}{8n}. \quad (1)$$

2. d) En déduire

$$\left| L - \left(1 + \frac{1}{8n}\right) u_n \right| \leq \frac{L}{16n^2}. \quad (2)$$

3. Calcul approché de L .

3. a) Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près?
3. b) Comment suffit-il de choisir n pour que $\left(1 + \frac{1}{8n}\right) u_n$ soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près? Écrire un algorithme en Python permettant le calcul de cette valeur approchée et donner la valeur numérique obtenue avec toutes les décimales affichées.

On peut montrer, ce que l'on ne demande pas, que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Cette identité pourra être utilisée pour les évaluations numériques ultérieures.

Partie II

A. Promenade aléatoire sur une droite

Une droite est rapportée à un repère orthonormé (O, i) . Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et son abscisse à l'instant $n \in \mathbb{N}$ est une variable aléatoire X_n .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $A_n = X_n - X_{n-1}$. Ainsi,

$$X_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

On suppose que les variables A_n sont indépendantes et que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(A_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq 1$, U_n indique le nombre de passages à l'origine entre les instants 1 et $2n$ compris.

1. Calcul du nombre moyen des retours à l'origine.

1. a) Quelle est la probabilité que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n$? Peut-il être à l'origine à un instant impair?

1. b) Pour $k \geq 1$, soit O_k la variable aléatoire égale à 1 si l'individu est à l'origine à l'instant k , et à 0 sinon. Calculer $E(O_{2k})$ et $E(O_{2k+1})$.

1. c) Exprimer U_n à l'aide des variables O_k , pour $1 \leq k \leq 2n$, et calculer $E(U_n)$.

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

2. a) Établir par récurrence que

$$E(U_n) = (2n + 1) \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - 1.$$

2. b) Exprimer $E(U_n)$ à l'aide de u_n . En déduire la limite de la suite $\left(\frac{E(U_n)}{\sqrt{n}}\right)$ et, à l'aide de l'inégalité (1), la limite de la suite $(E(U_n) - 2L\sqrt{n})$.

B. Promenade aléatoire dans le plan

Un plan est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) . Un individu se trouve à l'origine à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant $n \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires X_n, Y_n .

Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_n = X_n - X_{n-1}$ et $B_n = Y_n - Y_{n-1}$.

On suppose :

- Que les variables de la suite (A_n) sont indépendantes, de même que celles de la suite (B_n) , et que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(A_n = 1) = P(A_n = -1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_n = 1) = P(B_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

- Que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, V_n indique le nombre de passages à l'origine entre les instants 1 et $2n$ compris.

1. Calcul du nombre moyen de retours à l'origine.

1. a) Quelle est la probabilité que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n$? Peut-il être à l'origine à un instant impair?

1. b) En raisonnant comme en A, calculer $E(V_n)$.

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

On rappelle les deux résultats classiques suivants :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Déduire de l'inégalité (1) l'encadrement

$$0 \leq \frac{L^2}{n} - \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2 \leq \frac{L^2}{4n^2}.$$

En déduire la limite de $\left(\frac{E(V_n)}{\ln n} \right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

C. Promenade aléatoire dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k) . Un individu se trouve à l'origine à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant $n \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n .

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$A_n = X_n - X_{n-1}, \quad B_n = Y_n - Y_{n-1}, \quad C_n = Z_n - Z_{n-1}.$$

On suppose :

- Que les variables de chacune des suites (A_n) , (B_n) et (C_n) sont indépendantes, et que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(A_n = 1) = P(A_n = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(B_n = 1) = P(B_n = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(C_n = 1) = P(C_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

- Que X_n, Y_n, Z_n sont mutuellement indépendantes pour tout $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, W_n indique le nombre de passages à l'origine entre les instants 1 et $2n$ compris.

1. Calcul du nombre moyen des retours à l'origine.

1. a) Quelle est la probabilité que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n$? Peut-il être à l'origine à un instant impair ?

1. b) En raisonnant comme en A, calculer $E(W_n)$.

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul. Sous réserve d'existence, on pose

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3,$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3.$$

2. a) Résultats préliminaires.

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}. \quad (\text{i})$$

$$\frac{1}{(n+1)^2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}}. \quad (\text{ii})$$

En déduire des encadrements des sommes suivantes, dont on justifiera l'existence :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}}.$$

2. b) Existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$.

Déduire de l'inégalité (1) que

$$0 \leq \frac{L^3}{n\sqrt{n}} - \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^3 \leq \frac{3L^3}{8n^2\sqrt{n}}.$$

Donner une majoration de

$$\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^3$$

et prouver l'existence de s , donc de $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$. À l'aide d'une majoration de r_n , indiquer comment il suffit de choisir n pour que s_n soit une valeur approchée de s à 10^{-3} près.

2. c) Accélération de convergence et calcul approché de s .

À l'aide des résultats précédents, montrer que

$$0 \leq s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} - s \leq \frac{5L^3}{4n\sqrt{n}}.$$

Comment suffit-il alors de choisir n pour que $s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}}$ soit une valeur approchée de s à 10^{-3} près? Écrire un algorithme en Python permettant le calcul de cette valeur approchée et donner la valeur numérique obtenue.

D. Conclusion

À l'aide des résultats obtenus, comparer le nombre moyen des retours à l'origine pour les promenades aléatoires sur une droite, dans un plan et dans l'espace.