



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1987

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Pour alléger les écritures, posons, pour tout entier $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

On a $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n} a_n > 0$.

1. Étude de la suite (u_n) .

1. a) Comme $\binom{2}{1} = 2$, on a $u_1 = 1/2$. Pour $n \geq 1$, la formule factorielle des coefficients binomiaux donne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}.$$

Toutes les divisions sont permises puisque $n \geq 1$ et $u_n > 0$.

1. b) Procédons par récurrence, comme demandé. Pour $n = 1$, $u_1^2 = 1/4 \leq 1/3$, donc $u_1 \leq \sqrt{1/3}$.

Supposons $u_n^2 \leq n/(2n+1)$. En utilisant I.1.a,

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 \frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} \leq \frac{2n+1}{4(n+1)}.$$

Or

$$(2n + 1)(2n + 3) = 4(n + 1)^2 - 1 < 4(n + 1)^2,$$

donc, après division par des quantités strictement positives,

$$\frac{2n + 1}{4(n + 1)} < \frac{n + 1}{2n + 3}.$$

Ainsi, $u_{n+1}^2 \leq (n + 1)/(2n + 3)$; les deux côtés étant positifs, le passage aux racines carrées donne l'hypothèse au rang $n + 1$. La récurrence établit

$$u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n + 1}} \quad (n \geq 1).$$

1. c) Pour $n \geq 1$,

$$(2n + 1)^2 - 4n(n + 1) = 1 > 0.$$

Les quantités comparées sont positives; ainsi, $(2n + 1)/(2\sqrt{n(n + 1)}) > 1$. I.1.a montre donc que (u_n) est strictement croissante.

D'après I.1.b, $u_n \leq \sqrt{n/(2n + 1)} < 1/\sqrt{2}$. La suite est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel L par le théorème de la limite monotone.

Comme $u_n \geq u_1 = 1/2$, on obtient, par passage à la limite,

$$\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En particulier, L est strictement positif. La stricte croissance implique aussi $u_n < L$ pour chaque rang : $u_{n+1} > u_n$ et $L \geq u_{n+1}$.

2. Rapidité de convergence de (u_n) .

2. a) Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis, imposée par l'énoncé.

Fixons $x > 0$ et posons $a = x(x+1)$, $b = (x+1/2)^2$. Alors $a > 0$ et $b - a = 1/4$. La fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $f'(t) = 1/(2\sqrt{t})$.

Sur cet intervalle, la décroissance de f' donne

$$\frac{1}{2(x + \frac{1}{2})} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée aux bornes a, b , entraîne

$$\frac{b-a}{2(x + \frac{1}{2})} \leq \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \frac{b-a}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

Avec $b - a = 1/4$ et $\sqrt{b} = x + 1/2$, on obtient la double inégalité demandée.

Méthode 2 — Rationalisation.

Comme $(x + 1/2)^2 - x(x+1) = 1/4$, on a exactement

$$x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)} = \frac{1}{4 \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)} \right)}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Puisque $\sqrt{x(x+1)} \leq x + 1/2$, sa somme avec $x + 1/2$ est comprise entre $2\sqrt{x(x+1)}$ et $2(x + 1/2)$. En prenant les inverses, on retrouve

$$\frac{1}{8(x + \frac{1}{2})} \leq x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}.$$

La première méthode utilise une borne sur la dérivée ; la seconde est utile lorsqu'une différence de racines possède une rationalisation simple.

2. b) D'après I.1.a,

$$u_{k+1} - u_k = \frac{u_k}{\sqrt{k(k+1)}} \left(k + \frac{1}{2} - \sqrt{k(k+1)} \right).$$

Appliquons I.2.a avec $x = k \geq 1$. La borne supérieure donne

$$u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k(k+1)} = \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}.$$

La borne inférieure donne

$$u_{k+1} - u_k \geq \frac{u_k}{8(k + \frac{1}{2})\sqrt{k(k+1)}}.$$

Comme $\sqrt{k(k+1)} \leq k + 1/2 < k + 3/2$, on peut minorer cette dernière expression par

$$\frac{u_k}{8(k + \frac{1}{2})(k + \frac{3}{2})} = \frac{u_k}{8(k + \frac{1}{2})} - \frac{u_k}{8(k + \frac{3}{2})}.$$

Cela établit l'encadrement demandé. Tous les dénominateurs sont strictement positifs.

2. c) Fixons des entiers $p > n \geq 1$. Pour $n \leq k \leq p-1$, la croissance de (u_k) donne

$u_n \leq u_k \leq u_p$. Les différences de fractions dans I.2.b sont positives. On peut donc

minorer chaque borne inférieure en remplaçant u_k par u_n , et majorer chaque borne supérieure en le remplaçant par u_p .

La sommation de I.2.b pour $k = n, \dots, p-1$ donne alors, par télescopage,

$$\frac{u_n}{8} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{p + \frac{1}{2}} \right) \leq u_p - u_n \leq \frac{u_p}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right).$$

C'est un encadrement de $u_p - u_n$. Avec n fixé, faisons tendre p vers $+\infty$. On sait que $u_p \rightarrow L$ et que les termes en $1/p$ tendent vers 0. Il vient

$$\frac{u_n}{8(n + \frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \frac{L}{8n}. \quad (1)$$

La borne est obtenue par un passage à la limite dans des sommes finies télescopiques.

2. d) Posons $d_n = L - u_n \geq 0$ et

$$e_n = L - \left(1 + \frac{1}{8n}\right) u_n = d_n - \frac{u_n}{8n}.$$

La borne supérieure de (1) entraîne

$$e_n \leq \frac{L - u_n}{8n} = \frac{d_n}{8n} \leq \frac{L}{64n^2}.$$

La borne inférieure de (1) donne

$$e_n \geq \frac{u_n}{8(n + \frac{1}{2})} - \frac{u_n}{8n} = -\frac{u_n}{16n(n + \frac{1}{2})} \geq -\frac{L}{16n^2},$$

car $u_n \leq L$ et $n(n + 1/2) \geq n^2$. Ainsi,

$$-\frac{L}{16n^2} \leq e_n \leq \frac{L}{64n^2} \leq \frac{L}{16n^2}.$$

En prenant la valeur absolue, on conclut que

$$\left| L - \left(1 + \frac{1}{8n} \right) u_n \right| \leq \frac{L}{16n^2}. \quad (2)$$

La correction $u_n/(8n)$ améliore donc la borne d'erreur de l'ordre $1/n$ à l'ordre $1/n^2$.

3. Calcul approché de L .

3. a) D'après (1) et $L \leq 1/\sqrt{2}$,

$$|L - u_n| \leq \frac{1}{8\sqrt{2}n}.$$

Il suffit donc de choisir un entier n tel que

$$n \geq \frac{10^5}{8\sqrt{2}} \simeq 8838,834765.$$

Le choix $n = 8839$, et tout entier plus grand, garantit une erreur au plus égale à 10^{-5} . Il s'agit d'une condition suffisante issue de la majoration, et non d'une recherche du plus petit rang possible.

3. b) Question adaptée au programme actuel : l'algorithme demandé est rédigé en Python et les décimales demandées sont celles affichées par son exécution.

D'après (2),

$$\left| L - \left(1 + \frac{1}{8n} \right) u_n \right| \leq \frac{1}{16\sqrt{2}n^2}.$$

Il suffit donc que

$$n \geq \sqrt{\frac{10^5}{16\sqrt{2}}} \simeq 66,478698.$$

On peut choisir $n = 67$. Pour calculer u_n , la récurrence de I.1.a évite d'évaluer de très grandes factorielles.

Python

```
import numpy as np

def approximation_L(n):
    u = 0.5
    for k in range(1, n):
        u = u * (2 * k + 1) / (2 * np.sqrt(k * (k + 1)))
    return (1 + 1 / (8 * n)) * u

valeur = approximation_L(67)
print(valeur)
```

La variable u contient d'abord u_1 . À l'itération d'indice k , elle est mise à jour de u_k vers u_{k+1} . Comme la borne finale de range est exclusive, les indices sont $1, \dots, n-1$; la boucle calcule donc bien u_n , puis la fonction renvoie la valeur corrigée. print affiche cette valeur.

Code exécuté. La valeur affichée est

0,564188612641611.

Pour $n = 67$, la borne d'erreur théorique (2), avec la majoration de L , est inférieure à $4,923 \times 10^{-6}$, donc à 10^{-5} .

L'identité $L = 1/\sqrt{\pi}$, indiquée dans le sujet sans démonstration demandée, donne pour comparaison $L \simeq 0,5641895835477563$. Elle n'a pas été nécessaire pour établir la convergence, les inégalités (1)-(2), ni la garantie de précision de l'algorithme.

Partie II

A. Promenade aléatoire sur une droite

1. Calcul du nombre moyen des retours à l'origine.

1. a) Après $2n$ pas, l'abscisse est

$$X_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} A_j.$$

Si N_{2n} est le nombre d'incréments égaux à 1, alors

$$X_{2n} = N_{2n} - (2n - N_{2n}) = 2N_{2n} - 2n.$$

Les événements $\{A_j = 1\}$ sont indépendants et de probabilité $1/2$. Ainsi, N_{2n} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, 1/2)$. Le retour à l'origine équivaut à $N_{2n} = n$, donc

$$P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = a_n.$$

À un instant impair $2n + 1$, la somme de $2n + 1$ nombres impairs égaux à 1 ou -1 est impaire; elle ne peut pas être nulle. Il n'y a donc aucun retour à l'origine à un instant impair.

1. b) La variable O_m est l'indicatrice de $\{X_m = 0\}$. Elle est bornée et donc intégrable, avec $E(O_m) = P(X_m = 0)$. La question précédente donne

$$E(O_{2k}) = a_k = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}, \quad E(O_{2k+1}) = 0.$$

Ces égalités valent pour tous les indices concernés ; en particulier, $E(O_1) = 0$.

1. c) Chaque passage à l'origine entre les instants 1 et $2n$ est compté une fois par l'indicatrice correspondante. Ainsi,

$$U_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k.$$

Cette somme est finie ; U_n est bornée par $2n$ et admet une espérance. Par linéarité,

$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.$$

La linéarité de l'espérance ne demande aucune indépendance des indicatrices de retour, qui ne sont pas supposées indépendantes.

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

2. a) Méthode 1 — Récurrence, imposée par l'énoncé.

Pour $n = 1$, $E(U_1) = a_1 = 1/2$, et $(2 \times 1 + 1)a_1 - 1 = 3/2 - 1 = 1/2$. La formule est vraie au premier rang.

Supposons $E(U_n) = (2n + 1)a_n - 1$. D'après A.1.c,

$$E(U_{n+1}) = E(U_n) + a_{n+1}.$$

Or I.1.a donne $(2n+1)a_n = 2(n+1)a_{n+1}$. Par conséquent,

$$E(U_{n+1}) = 2(n+1)a_{n+1} - 1 + a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1} - 1.$$

C'est la formule au rang suivant. La récurrence établit donc

$$E(U_n) = (2n+1)a_n - 1 = (2n+1) \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - 1.$$

Méthode 2 — Identifier une différence télescopique.

Pour $k \geq 1$, la relation $a_k = (2k-1)a_{k-1}/(2k)$ entraîne

$$(2k+1)a_k - (2k-1)a_{k-1} = (2k+1)a_k - 2ka_k = a_k.$$

En sommant cette identité de $k=1$ à $k=n$, les termes intermédiaires se simplifient et donnent

$$\sum_{k=1}^n a_k = (2n+1)a_n - a_0 = (2n+1)a_n - 1.$$

Avec A.1.c, on retrouve la même formule. La récurrence vérifie une expression proposée ; le télescopage explique comment la somme se réduit à son dernier terme.

2. b) Puisque $a_n = u_n / \sqrt{n}$,

$$E(U_n) = 2\sqrt{n} u_n + \frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1.$$

Ainsi,

$$\frac{E(U_n)}{\sqrt{n}} = 2u_n + \frac{u_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 2L,$$

car $u_n \rightarrow L$ et la suite (u_n) est bornée. Pour la différence centrée,

$$E(U_n) - 2L\sqrt{n} = -2\sqrt{n}(L - u_n) + \frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1.$$

L'inégalité (1) donne $0 \leq 2\sqrt{n}(L - u_n) \leq L/(4\sqrt{n}) \rightarrow 0$. De plus, $0 \leq u_n/\sqrt{n} \leq L/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(U_n) - 2L\sqrt{n}) = -1.$$

On peut résumer les deux résultats par

$$E(U_n) = 2L\sqrt{n} - 1 + o(1), \quad E(U_n) \sim 2L\sqrt{n}.$$

Le dernier équivalent est valide puisque $2L\sqrt{n} > 0$ et que son quotient avec $E(U_n)$ tend vers 1.

B. Promenade aléatoire dans le plan

1. Calcul du nombre moyen de retours à l'origine.

1. a) Pour chacune des coordonnées, le calcul de A.1.a s'applique :

$P(X_{2n} = 0) = P(Y_{2n} = 0) = a_n$. Au temps fixé $2n$, les coordonnées sont indépendantes par hypothèse. Donc

$$P(X_{2n} = 0, Y_{2n} = 0) = P(X_{2n} = 0)P(Y_{2n} = 0) = a_n^2.$$

À un instant impair, la coordonnée X est déjà un entier impair, donc ne peut pas être nulle. Un retour à l'origine du plan est impossible à cet instant.

Cette promenade change simultanément les deux coordonnées de 1 ou de -1 ; le calcul utilise exactement les hypothèses du sujet.

1. b) Pour $m \geq 1$, introduisons l'indicatrice I_m de l'événement $\{X_m = 0, Y_m = 0\}$. Alors

$$V_n = \sum_{m=1}^{2n} I_m.$$

Ces variables sont bornées, et la somme est finie. Par linéarité,

$$E(V_n) = \sum_{m=1}^{2n} P(X_m = 0, Y_m = 0) = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Donc

$$E(V_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^2.$$

On utilise l'indépendance des deux coordonnées à un instant donné pour calculer

chaque probabilité, mais aucune indépendance des indicatrices à des instants différents n'est nécessaire.

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

Pour $n \geq 1$, $a_n^2 = u_n^2/n$, donc

$$\frac{L^2}{n} - a_n^2 = \frac{(L - u_n)(L + u_n)}{n}.$$

Les deux facteurs du numérateur sont positifs ou nuls. D'après (1), $L - u_n \leq L/(8n)$, et $L + u_n \leq 2L$. Il vient

$$0 \leq \frac{L^2}{n} - a_n^2 \leq \frac{L^2}{4n^2}.$$

Posons

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$$

et

$$J_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2.$$

En sommant les inégalités précédentes de $k = 1$ à n ,

$$0 \leq L^2 H_n - E(V_n) \leq \frac{L^2}{4} J_n.$$

Le sujet rappelle que $H_n / \ln n \rightarrow 1$ et que (J_n) converge vers un réel fini. Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc

$$L^2 \frac{H_n}{\ln n} - \frac{L^2}{4} \frac{J_n}{\ln n} \leq \frac{E(V_n)}{\ln n} \leq L^2 \frac{H_n}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers L^2 , car $J_n / \ln n \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(V_n)}{\ln n} = L^2.$$

Ainsi, $E(V_n) \sim L^2 \ln n$ et tend vers $+\infty$, puisque $L > 0$.

C. Promenade aléatoire dans l'espace

1. Calcul du nombre moyen des retours à l'origine.

1. a) Chacune des trois coordonnées a , au temps $2n$, la probabilité a_n d'être nulle.

L'indépendance mutuelle de X_{2n}, Y_{2n}, Z_{2n} , donnée dans le sujet, entraîne

$$P(X_{2n} = 0, Y_{2n} = 0, Z_{2n} = 0) = a_n^3.$$

À un instant impair, chacune des coordonnées est impaire et ne peut donc être nulle. Il n'y a aucun retour à l'origine à un instant impair.

1. b) Soit J_m l'indicatrice de l'événement $\{X_m = 0, Y_m = 0, Z_m = 0\}$. Alors

$$W_n = \sum_{m=1}^{2n} J_m.$$

Comme les indicatrices sont bornées et que la somme est finie, la linéarité de l'espérance donne

$$E(W_n) = \sum_{m=1}^{2n} E(J_m) = \sum_{k=1}^n a_k^3 = s_n.$$

Donc

$$E(W_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3.$$

2. Étude asymptotique du nombre moyen des retours à l'origine.

2. a) Pour l'inégalité (i), considérons $f(x) = 2/\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est continue sur $[n, n+1]$, dérivable à l'intérieur, et $f'(x) = -1/x^{3/2}$. Sur ce segment,

$$-\frac{1}{n^{3/2}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{(n+1)^{3/2}}.$$

L'inégalité des accroissements finis, avec un intervalle de longueur 1, donne

$$-\frac{1}{n^{3/2}} \leq f(n+1) - f(n) \leq -\frac{1}{(n+1)^{3/2}}.$$

En changeant les signes, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Pour (ii), considérons $g(x) = 2/(3x^{3/2})$. Elle est continue sur $[n, n+1]$, dérivable à l'intérieur, et $g'(x) = -1/x^{5/2}$. Le même raisonnement donne

$$\frac{1}{(n+1)^2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

Les deux séries

$$\sum k^{-3/2}$$

et

$$\sum k^{-5/2}$$

sont des séries de Riemann d'exposants strictement supérieurs à 1, donc convergentes. Leurs restes sont ainsi bien définis. Posons

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad Q_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{5/2}}.$$

D'après (i), pour $k \geq n+1$,

$$f(k) - f(k+1) \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq f(k-1) - f(k).$$

En sommant de $k = n+1$ à $k = M$ et en télescopant,

$$f(n+1) - f(M+1) \leq \sum_{k=n+1}^M \frac{1}{k^{3/2}} \leq f(n) - f(M).$$

Lorsque $M \rightarrow +\infty$, les termes $f(M)$ et $f(M+1)$ tendent vers 0. Il vient

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq T_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

De même, (ii) donne $g(k) - g(k+1) \leq k^{-5/2} \leq g(k-1) - g(k)$. La sommation finie suivie du passage à la limite fournit

$$\frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq Q_n \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}}.$$

Toutes les bornes sont obtenues à partir de l'inégalité des accroissements finis demandée, puis de sommes télescopiques convergentes.

2. b) Puisque $a_n = u_n/\sqrt{n}$,

$$\frac{L^3}{n\sqrt{n}} - a_n^3 = \frac{(L - u_n)(L^2 + Lu_n + u_n^2)}{n\sqrt{n}}.$$

Les facteurs sont positifs ou nuls; avec $u_n \leq L$, on a $L^2 + Lu_n + u_n^2 \leq 3L^2$. L'inégalité (1) donne donc

$$0 \leq \frac{L^3}{n\sqrt{n}} - a_n^3 \leq \frac{L}{8n} \frac{3L^2}{n\sqrt{n}} = \frac{3L^3}{8n^2\sqrt{n}}.$$

En particulier,

$$0 \leq a_n^3 \leq \frac{L^3}{n^{3/2}}.$$

La série de Riemann

$$\sum n^{-3/2}$$

converge. Par comparaison des séries à termes positifs, la série

$$\sum a_n^3$$

converge aussi. Sa somme s est donc finie et, comme $E(W_n) = s_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = s.$$

Son reste est $r_n = s - s_n \geq 0$. En utilisant la majoration terme à terme puis C.2.a,

$$0 \leq r_n \leq L^3 T_n \leq \frac{2L^3}{\sqrt{n}}.$$

La borne $L \leq 1/\sqrt{2}$ donne $2L^3 \leq 1/\sqrt{2}$, donc

$$|s - s_n| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Il suffit alors de choisir n tel que $1/\sqrt{2n} \leq 10^{-3}$, soit $n \geq 500000$. Cette condition suffit à garantir la précision sans utiliser la valeur exacte de L .

Plus généralement, la borne utilisant L lui-même donne la condition suffisante $n \geq 4L^6 \times 10^6$. La valeur exacte indiquée dans le sujet peut affiner ce choix, mais elle n'est pas nécessaire à la conclusion.

2. c) Posons, pour $k \geq 1$,

$$d_k = \frac{L^3}{k^{3/2}} - a_k^3.$$

C.2.b donne $0 \leq d_k \leq (3L^3/8)k^{-5/2}$. La série

$$\sum d_k$$

converge donc par comparaison. Pour son reste

$$D_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k,$$

on a

$$0 \leq D_n \leq \frac{3L^3}{8} Q_n \leq \frac{L^3}{4n\sqrt{n}}.$$

Par différence de séries convergentes,

$$r_n = L^3 T_n - D_n.$$

Il en résulte

$$s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} - s = \frac{2L^3}{\sqrt{n}} - r_n = L^3 \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - T_n \right) + D_n.$$

C.2.a donne $T_n \leq 2/\sqrt{n}$, donc cette expression est positive ou nulle. Pour la majorer, utilisons aussi $T_n \geq 2/\sqrt{n+1}$ et l'inégalité (i) :

$$0 \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - T_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

En combinant les deux majorations,

$$0 \leq s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} - s \leq \frac{L^3}{n\sqrt{n}} + \frac{L^3}{4n\sqrt{n}} = \frac{5L^3}{4n\sqrt{n}}.$$

La correction compense la partie principale du reste. Avec $L^3 \leq 1/(2\sqrt{2})$,

$$0 \leq s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} - s \leq \frac{5}{8\sqrt{2}n^{3/2}}.$$

Pour une précision 10^{-3} , il suffit donc de choisir

$$n \geq \left(\frac{5 \times 10^3}{8\sqrt{2}} \right)^{2/3}.$$

Le plus petit entier satisfaisant cette condition suffisante est $n = 59$. Au rang 59, la borne ci-dessus vaut environ 0,0009751849766, donc est strictement inférieure à 10^{-3} . Le rang 58 ne satisfait pas cette majoration.

Question adaptée au programme actuel : l'algorithme demandé est écrit en Python. Pour l'évaluation numérique de la correction, on utilise l'identité $L = 1/\sqrt{\pi}$, fournie dans le sujet sans démonstration demandée. Les preuves précédentes n'utilisent pas cette identité.

Le calcul des termes repose sur $a_0 = 1$ et la récurrence

$$a_k = a_{k-1} \frac{2k-1}{2k}, \quad k \geq 1.$$

Elle évite les factorielles et les puissances de 4 de grande taille.

Python

```
import numpy as np
```

```
def approximation_s(n):
```

```

a = 1.0
somme = 0.0

for k in range(1, n + 1):
    a = a * (2 * k - 1) / (2 * k)
    somme = somme + a ** 3

L = 1 / np.sqrt(np.pi)

return somme + 2 * L ** 3 / np.sqrt(n)

valeur = approximation_s(59)

print(valeur)

```

À l'itération k , la variable a devient a_k et $somme$ devient s_k . La borne finale $n + 1$ de `range` est exclusive : le dernier indice effectivement utilisé est bien n . La fonction renvoie la somme partielle corrigée, puis `print` l'affiche.

Code exécuté. Pour $n = 59$, les valeurs calculées sont

$$s_{59} \simeq 0,346738357423735,$$

$$s_{59} + \frac{2L^3}{\sqrt{59}} \simeq 0,3934988611350463.$$

Cette dernière valeur approche s à 10^{-3} près. La borne théorique montre en outre que la valeur corrigée est supérieure ou égale à s ; les décimales affichées décrivent le résultat du calcul, et ne constituent pas une garantie de cette précision pour toutes les décimales de s .

D. Conclusion

Les résultats portent sur le nombre de retours entre les instants 1 et $2n$ compris ; le passage initial en 0 n'est pas compté.

Promenade	Nombre moyen	Comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$
Sur une droite	$E(U_n)$	$E(U_n) \sim 2L\sqrt{n}$
Dans le plan	$E(V_n)$	$E(V_n) \sim L^2 \ln n$
Dans l'espace	$E(W_n)$	$E(W_n) \rightarrow s < +\infty$

Sur la droite, le nombre moyen de retours diverge avec une croissance en racine carrée, et l'on a même $E(U_n) = 2L\sqrt{n} - 1 + o(1)$. Dans le plan, il diverge également, mais avec une croissance logarithmique plus lente. Dans l'espace, il reste borné et converge vers une limite finie s , dont une valeur approchée à 10^{-3} près est 0,3934988611350463.

Si l'on utilise l'identité donnée $L = 1/\sqrt{\pi}$, les deux équivalents deviennent

$$E(U_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}, \quad E(V_n) \sim \frac{1}{\pi} \ln n.$$

Les probabilités de retour au temps $2n$ sont respectivement a_n, a_n^2, a_n^3 . Comme $a_n = u_n/\sqrt{n} \sim L/\sqrt{n}$, elles sont respectivement équivalentes à $L/\sqrt{n}, L^2/n, L^3/n^{3/2}$. Cela explique la différence entre les trois sommes d'espérances.

Relevé des adaptations

- I.1 à II.C.2 : remplacement de la notation ancienne C_{2n}^n par $\binom{2n}{n}$ et écriture explicite des fractions. Les dénominateurs sont interprétés conformément à la note mathématique jointe au PDF; les énoncés et les constantes sont conservés.
- I.3.b : algorithme demandé en Python, avec affichage des décimales numériques à la place de la référence à une calculatrice. L'identité $L = 1/\sqrt{\pi}$, déjà indiquée dans le sujet, est conservée et rendue explicitement utilisable pour les évaluations numériques ultérieures; sa démonstration n'est pas demandée.

- II.C.2.c : algorithme demandé en Python, sans modification de la correction $2L^3/\sqrt{n}$ ni de la précision 10^{-3} .