



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1986

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

Le but de cette partie est la résolution de l'équation

$$(E) \quad \exp(t(x-1)) = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

dans laquelle t désigne un paramètre réel strictement positif donné. Dans tout le problème, on note indifféremment $\exp(x)$ ou e^x l'exponentielle du réel x .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(t(x-1))$ et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Nombre des racines de l'équation (E)

1. a) Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto t \exp(-t)$.

1. b) Étudier sur le segment $[0, 1]$ les variations de la fonction F définie par

$F(x) = f(x) - x$. On donnera les tableaux de variations correspondant aux cas $t \leq 1$ et $t > 1$.

En déduire, en fonction des valeurs du paramètre strictement positif t , le nombre des racines de l'équation (E) dans $[0, 1]$. On désigne par $r(t)$ la plus petite racine positive de (E).

2. Étude de la suite (u_n)

Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $r(t)$. En déduire sa convergence et sa limite. Que vaut celle-ci pour $t \leq 1$?

3. Calcul approché de $r(t)$ pour $t > 1$

On suppose dans cette question que $t > 1$.

3. a) Montrer que, s'il existe un entier naturel n tel que $F(u_n + a) < 0$, où a est un réel strictement positif, alors

$$u_n < r(t) < u_n + a.$$

3. b) On suppose également, pour le calcul numérique, que $F(1 - 10^{-6}) < 0$. Écrire en Python un programme permettant de déterminer le premier entier n pour lequel est satisfaite l'inégalité $F(u_n + 10^{-6}) < 0$, ainsi que la valeur correspondante de u_n .

D'après a), on a alors $u_n < r(t) < u_n + 10^{-6}$, donc u_n constitue une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-6} près.

3. c) Compléter le tableau suivant, dans lequel figurent pour chaque valeur de t l'entier n obtenu et la valeur approchée correspondante de u_n , que l'on donnera avec huit décimales. Les valeurs de t proposées satisfont la condition de b).

Valeur de t	Valeur de l'entier n	Valeur approchée de u_n
3		
2,5		
2		
1,5	27	0,41718765
1,25	51	0,62862881
1,1	121	0,82386493

4. Étude de la fonction $t \mapsto r(t)$

On pose, pour $0 < x < 1$, $h(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ et $h(1) = 1$.

4. a) Étudier le sens de variation de h et montrer que h réalise une bijection continue strictement monotone de $]0, 1]$ vers $[1, +\infty[$. Calculer $h'(1)$, dérivée à gauche en 1, et

tracer la courbe représentative de h .

4. b) Calculer $h(r(t))$ pour $t \geq 1$. En déduire que la fonction r est continue strictement monotone sur $[1, +\infty[$. Tracer la courbe représentative de r sur $]0, +\infty[$.
4. c) Montrer que $r(t) \ln(r(t)) = tr(t)(r(t) - 1)$. En déduire les limites de $tr(t)$ et de $r(t)e^t$ lorsque t tend vers l'infini.
5. Étude de la vitesse de convergence de (u_n) pour $t \neq 1$
 5. a) En étudiant le signe de $F'(r(t))$, montrer que $0 < tr(t) < 1$ pour $t \neq 1$.
 5. b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir, pour tout entier naturel n , les inégalités suivantes :

$$(i) \quad 0 \leq r(t) - u_{n+1} \leq tr(t)(r(t) - u_n),$$

$$(ii) \quad 0 \leq r(t) - u_n \leq (tr(t))^n.$$

Que devient (ii) pour $t < 1$?

6. Étude de la vitesse de convergence de (u_n) pour $t = 1$

Cette question n'est utilisée par la suite qu'en II.B.3. On suppose dans toute la question que $t = 1$.

6. a) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Pour $n \geq 1$, on pose

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Montrer que, si (x_n) converge vers 0, alors $(\bar{x}_n)$ converge aussi vers 0. En déduire que, si (x_n) converge vers ℓ , alors $(\bar{x}_n)$ converge aussi vers ℓ .

6. b) On pose $v_n = 1 - u_n$ et $w_n = \frac{1}{v_n}$. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de v_n et, en remarquant que (v_n) tend vers 0 dans ce cas $t = 1$, en déduire la limite de $(w_{n+1} - w_n)$.

6. c) Vérifier l'égalité

$$\frac{w_n - w_0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k),$$

puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = 2$.

Partie II

Dans une population, on convient d'appeler descendants de première génération d'un individu ses enfants, descendants de deuxième génération ses petits-enfants ; ses descendants de génération $p + 1$ sont les enfants de ses descendants de génération p , pour $p \geq 1$.

On suppose qu'il existe une variable aléatoire X_1 suivant une loi de Poisson de paramètre $t > 0$ telle que les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres de leurs enfants sont indépendantes et de même loi que X_1 . Ainsi $t = E(X_1)$ représente le nombre moyen d'enfants par individu.

Plus généralement, il existe une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres de leurs descendants de génération n sont indépendantes et de même loi que X_n .

Conditionnellement au fait qu'un individu a exactement k enfants, les k lignées issues de ces enfants sont indépendantes et, pour chaque $n \geq 1$, le nombre de descendants de génération n de chacun de ces enfants a encore la loi de X_n .

On utilise les notations suivantes :

- pour $k \in \mathbb{N}$, $p(k) = P(X_1 = k)$, probabilité pour un individu d'avoir k enfants;
- pour $n \geq 1$, $U_n = P(X_n = 0)$, avec la convention $U_0 = 0$.

Le nombre U_n est la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant de génération n . La limite de (U_n) , si elle existe, représente la probabilité pour cet individu de voir sa descendance s'éteindre.

A. Probabilité d'extinction de la descendance d'un individu

1. Expliciter $p(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et montrer que, pour tout réel x ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = f(x).$$

2. Remarquer que $U_1 = f(U_0)$. Calculer la probabilité conditionnelle pour qu'un individu n'ait pas de petits-enfants sachant qu'il a exactement k enfants. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, $U_2 = f(U_1)$.
3. Prouver que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = f(U_n)$. En déduire que (U_n) est égale à la suite (u_n) de la partie I et donner des valeurs approchées de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$, probabilité d'extinction de la descendance d'un individu, dans les sept cas suivants :

$$t = 3, \quad t = 2,5, \quad t = 2, \quad t = 1,5, \quad t = 1,25, \quad t = 1,1, \quad 0 < t \leq 1.$$

B. Nombre moyen de générations de la descendance d'un individu

Jusqu'à la fin du problème, on suppose $0 < t \leq 1$. Ainsi $u_n \rightarrow 1$, ce qui revient à supposer que la descendance s'éteint au bout d'un nombre fini de générations avec probabilité 1.

On note D la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ associant à un individu le nombre de ses générations de descendants. Ainsi $D = 0$ s'il n'a pas d'enfants, $D = 1$ s'il a des enfants mais pas de petits-enfants, etc. On note $E(D)$ son espérance lorsqu'elle existe.

On considère la série de terme général $1 - U_n$, pour $n \geq 1$, et l'on pose

$$S(n, t) = \sum_{k=1}^n (1 - U_k).$$

On note $S(t)$ la somme de cette série lorsqu'elle converge.

1. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

1. a) Calculer $P(D > n)$ et $P(D = n)$ en fonction de U_n et U_{n+1} .

1. b) Former une relation entre

$$\sum_{k=0}^n kP(D = k)$$

et $S(n, t)$.

2. Étude de la série

$$\sum_{n \geq 1} (1 - U_n)$$

pour $t < 1$

Dans cette question, on suppose $0 < t < 1$. On rappelle l'inégalité (ii) établie en I.5 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - U_n \leq t^n$.

2. a) Montrer que la série de terme général $1 - U_n$ est convergente.

2. b) Majorer $S(t) - S(n, t)$ et en déduire comment il suffit de choisir n , en fonction de t , pour que $S(n, t)$ constitue une valeur approchée de $S(t)$ à 10^{-2} près. On pourra choisir le plus petit entier $n \geq 1$ satisfaisant la borne obtenue.
2. c) Écrire en Python un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée $S(n, t)$, où n est l'entier déterminé ci-dessus. Utiliser cet algorithme pour dresser un tableau dans lequel figurent n et $S(n, t)$, donné avec trois décimales, pour

$$t = 0,5, \quad t = 0,6, \quad t = 0,7, \quad t = 0,8, \quad t = 0,9.$$

3. Existence et calcul de l'espérance de D

3. a) Prouver l'existence de $E(D)$ lorsque $0 < t < 1$ et l'exprimer en fonction de $S(t)$.
Donner une valeur approchée de $E(D)$ pour

$$t = 0,5, \quad t = 0,6, \quad t = 0,7, \quad t = 0,8, \quad t = 0,9.$$

3. b) Que peut-on dire de $E(D)$ si $t = 1$?