



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1986

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I

On fixe $t > 0$. La fonction $f(x) = e^{t(x-1)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, et $F(x) = f(x) - x$.

1. Nombre des racines de (E)

1. a) Maximum de $t \mapsto te^{-t}$

Posons $g(t) = te^{-t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Sa dérivée vaut

$$g'(t) = e^{-t}(1 - t).$$

Comme $e^{-t} > 0$, g est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc un maximum global unique en $t = 1$, égal à

$$g(1) = e^{-1}.$$

En particulier, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \leq e^{-1} < 1$.

1. b) Variations de F et racines

On calcule

$$F'(x) = te^{t(x-1)} - 1, \quad F''(x) = t^2 e^{t(x-1)} > 0.$$

Ainsi F' est strictement croissante. Les valeurs aux bornes sont $F(0) = e^{-t} > 0$ et $F(1) = 0$.

Si $0 < t < 1$, pour $0 \leq x \leq 1$, on a $F'(x) \leq t - 1 < 0$. Si $t = 1$, $F'(x) = e^{x-1} - 1 < 0$ pour $x < 1$, et $F'(1) = 0$. Dans les deux cas, F est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et ne s'annule qu'en 1.

Cas $0 < t < 1$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$
Signe de F'	—	—	—
Variations de F	e^{-t}	décroît	0

Cas $t = 1$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$
Signe de F'	—	—	0
Variations de F	e^{-1}	décroît	0

Supposons maintenant $t > 1$. Par I.1.a,

$$F'(0) = te^{-t} - 1 < 0, \quad F'(1) = t - 1 > 0.$$

La dérivée s'annule une seule fois, en

$$\alpha = 1 - \frac{\ln t}{t}.$$

On a $0 < \alpha < 1$. En effet, $\ln t > 0$ et $\ln t < t - 1 < t$: pour la première inégalité stricte, la fonction $t - 1 - \ln t$ vaut 0 en 1 et a une dérivée $1 - 1/t > 0$ pour $t > 1$.

Au minimum de F ,

$$F(\alpha) = \frac{1}{t} - \alpha = \frac{1 + \ln t - t}{t} < 0.$$

Cas $t > 1$	$x = 0$	$0 < x < \alpha$	$x = \alpha$	$\alpha < x < 1$	$x = 1$
Signe de F'	—	—	0	+	+
Variations de F	e^{-t}	décroît	$F(\alpha) < 0$	croît	0

Sur $[0, \alpha]$, F est continue strictement décroissante et ses valeurs aux bornes sont de signes opposés ; le théorème de la bijection donne une unique racine $r(t) \in]0, \alpha[$. Sur $[\alpha, 1]$, elle est strictement croissante et sa seule racine est 1.

En conclusion, (E) a une seule racine, $r(t) = 1$, si $0 < t \leq 1$, et deux racines, $r(t) \in]0, 1[$ et 1, si $t > 1$. Dans ce dernier cas,

$$F(x) > 0 \text{ sur } [0, r(t)[, \quad F(x) < 0 \text{ sur }]r(t), 1[.$$

On utilisera également que $F(x) > 0$ pour $x > 1$ lorsque $t > 1$: en effet $F'(x) > t - 1 > 0$ sur cet intervalle et $F(1) = 0$.

2. Convergence de (u_n)

On prouve d'abord les inégalités strictes $u_n < r(t)$ et $u_{n+1} > u_n$.

Comme $u_0 = 0 < r(t)$, si $u_n < r(t)$, la stricte croissance de f donne

$$u_{n+1} = f(u_n) < f(r(t)) = r(t).$$

La majoration stricte est donc établie par récurrence. D'autre part, $u_1 = e^{-t} > 0 = u_0$. Si $u_{n+1} > u_n$, la même croissance donne $u_{n+2} > u_{n+1}$. Ainsi (u_n) est strictement croissante et majorée par $r(t)$.

Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers une limite $\ell \in [0, r(t)]$. Par continuité de f et par la relation de récurrence, $\ell = f(\ell)$. En particulier $\ell > 0$.

Comme $r(t)$ est la plus petite racine positive, on a $\ell \geq r(t)$; avec $\ell \leq r(t)$, cela donne

$$u_n \longrightarrow r(t).$$

Pour $0 < t \leq 1$, la limite est donc 1.

3. Calcul approché de $r(t)$ pour $t > 1$

3. a) Encadrement obtenu par le signe de F

On sait déjà que $u_n < r(t)$ pour tout n . Supposons que $F(u_n + a) < 0$, avec $a > 0$.

Le nombre $u_n + a$ est strictement positif. D'après l'étude de I.1.b, pour $t > 1$, F ne prend des valeurs négatives que dans $]r(t), 1[$ parmi les réels non négatifs. Ainsi

$$r(t) < u_n + a < 1.$$

On obtient l'encadrement demandé : $u_n < r(t) < u_n + a$.

3. b) Programme Python et terminaison

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la condition suffisante $F(1 - a) < 0$, avec $a = 10^{-6}$, assure la terminaison du test demandé; elle est ajoutée pour les calculs numériques. La seule hypothèse $t > 1$ ne garantit pas cette condition lorsque t est arbitrairement proche de 1.

Comme $1 - a \in]0, 1[$, $F(1 - a) < 0$ implique $r(t) < 1 - a$. Donc $r(t) + a \in]r(t), 1[$ et $F(r(t) + a) < 0$. Par I.2 et par continuité,

$$F(u_n + a) \longrightarrow F(r(t) + a) < 0.$$

Il existe donc un premier indice pour lequel le test est vérifié.

Python

```
from numpy import exp

def premier_indice(t):
    a = 1e-6
    n = 0
    u = 0.0
    while exp(t * (u + a - 1)) - (u + a) >= 0:
        u = exp(t * (u - 1))
        n = n + 1
    return n, u
```

La variable u contient u_n ; le compteur n commence à 0, ce qui permet de vérifier aussi le premier terme. Chaque passage calcule u_{n+1} puis augmente le compteur. La boucle continue tant que l'inégalité stricte demandée n'est pas satisfaite. Le couple renvoyé contient le premier indice et le terme associé.

L'import fournit la fonction exponentielle de NumPy. Le programme utilise l'arithmétique flottante pour les calculs pratiques ; la preuve de l'encadrement est celle de I.3.a.

Pour les valeurs du tableau, toutes supérieures ou égales à 1,1, la condition ajoutée est satisfaite. On peut le vérifier rigoureusement : pour $a = 10^{-6}$, la formule de Taylor appliquée à e^{-s} donne $e^{-s} \leq 1 - s + s^2/2$ pour $s \geq 0$. Par décroissance de l'exponentielle,

$$F(1 - a) = e^{-ta} - 1 + a \leq e^{-1,1a} - 1 + a \leq -0,1a + 0,605a^2 < 0.$$

Le programme a été exécuté pour les six paramètres du tableau.

3. c) Tableau numérique

Le premier indice est recherché à partir de $n = 0$. Les résultats, arrondis à huit décimales, sont :

t	Premier indice n	u_n arrondi
3	7	0,05951990
2,5	9	0,10735459
2	14	0,20318737
1,5	27	0,41718765
1,25	51	0,62862882
1,1	121	0,82386494

Les deux dernières valeurs préremplies du PDF sont des troncatures à huit décimales. Les termes calculés valent respectivement environ 0,628628815291 et 0,823864938101 ; leur arrondi au plus proche donne les deux valeurs ci-dessus. Les données préremplies sont conservées dans le sujet.

La certification $u_n < r(t) < u_n + 10^{-6}$ concerne le terme calculé avant son arrondi d'affichage. Le choix du premier indice et les chiffres affichés ont également été contrôlés avec une arithmétique décimale de précision supérieure.

4. Étude de $t \mapsto r(t)$

4. a) Variations de h et dérivée en 1

Pour $0 < x < 1$, h est dérivable et

$$h'(x) = \frac{(x-1)/x - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - 1/x - \ln x}{(x-1)^2}.$$

Posons $q(x) = 1 - 1/x - \ln x$. Sur $]0, 1[$,

$$q'(x) = \frac{1-x}{x^2} > 0,$$

et $q(1) = 0$. Ainsi $q(x) < 0$ pour $x < 1$, donc $h'(x) < 0$. La fonction h est strictement décroissante.

À gauche de 1, posons $s = x - 1 \rightarrow 0^-$. Le développement limité du logarithme en 0 donne

$$\ln(1 + s) = s - \frac{s^2}{2} + o(s^2),$$

puis, en divisant par $s \neq 0$,

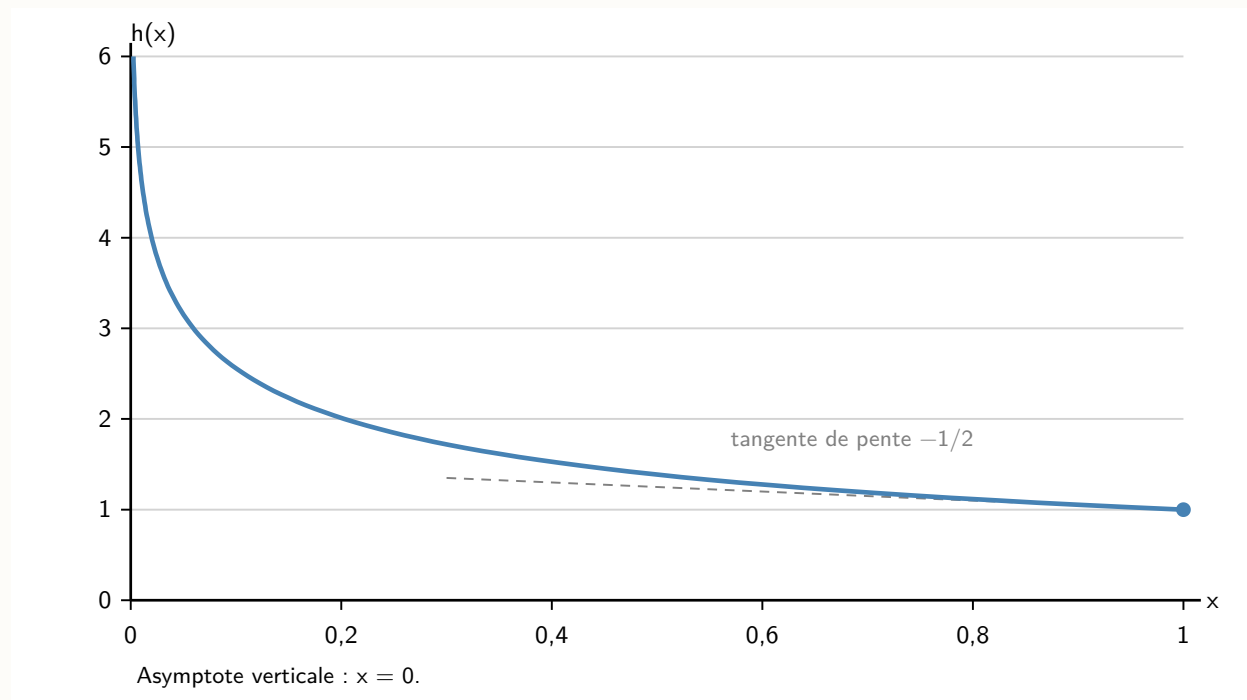
$$h(1 + s) = 1 - \frac{s}{2} + o(s).$$

Ainsi $h(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1^-$, ce qui justifie le prolongement $h(1) = 1$, et

$$h'(1) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{h(1 + s) - 1}{s} = -\frac{1}{2}.$$

À l'autre borne, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $x - 1 \rightarrow -1$, donc $h(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. La continuité et la stricte décroissance montrent que h est une bijection de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$.

La courbe admet l'asymptote verticale $x = 0$ et passe par $(1, 1)$, avec tangente $y = 1 - (x - 1)/2$ à cette extrémité. Le tracé ci-dessous est calculé à partir de la formule de h ; seule la portion avec $h(x) \leq 6$ est affichée.



4. b) Fonction réciproque et courbe de r

Pour $t > 1$, $r(t) \in]0, 1[$ et l'équation donne, puisque $r(t) > 0$,

$$\ln(r(t)) = t(r(t) - 1).$$

On peut diviser par $r(t) - 1 \neq 0$, d'où $h(r(t)) = t$. Pour $t = 1$, on utilise directement $r(1) = 1$ et $h(1) = 1$: l'égalité reste vraie sans diviser par zéro.

Ainsi, sur $[1, +\infty[$,

$$r = h^{-1}.$$

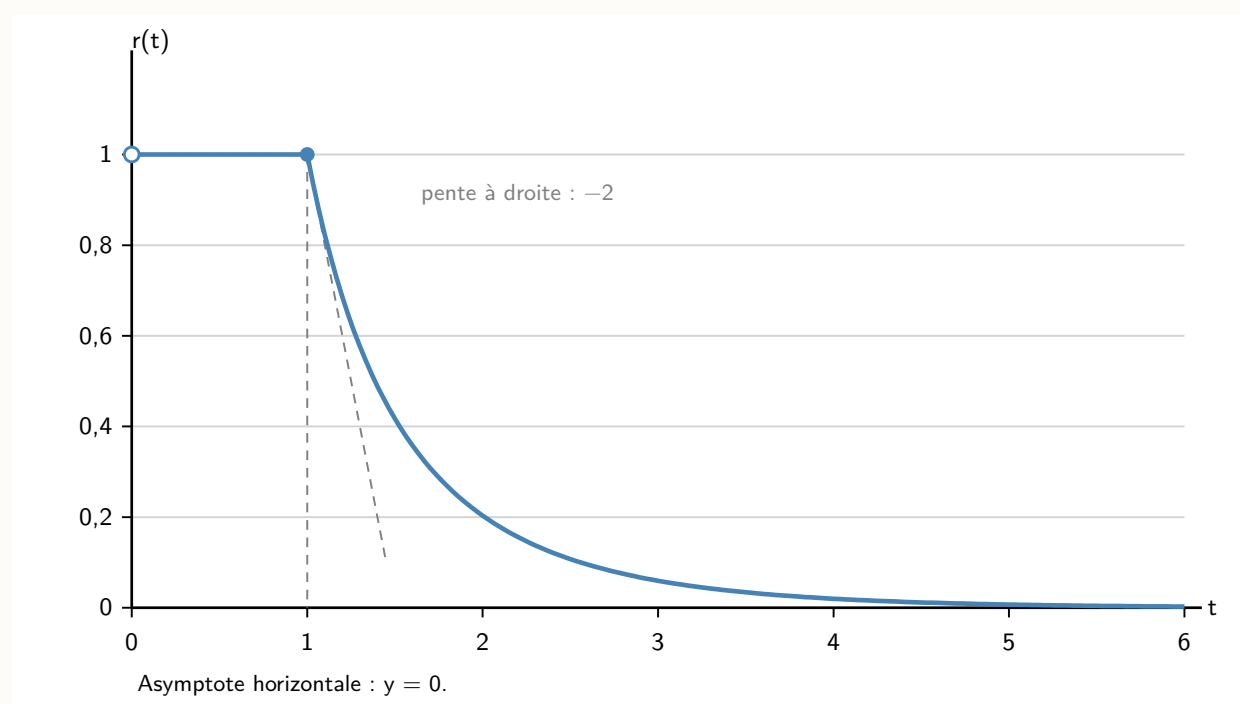
Le théorème de la bijection assure que la réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est continue et de même sens de variation. La fonction r est donc continue strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Pour $0 < t \leq 1$, on a $r(t) = 1$. Pour $t > 1$, $r(t)$ décroît de 1 vers 0. Pour justifier cette dernière limite, la décroissance assure une limite $L \geq 0$. Si $L > 0$, $h(r(t))$ tendrait vers $h(L)$, valeur finie, alors qu'il vaut $t \rightarrow +\infty$. Donc $L = 0$.

La courbe est ainsi horizontale à hauteur 1 pour $0 < t \leq 1$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $y = 0$. Elle est continue en 1. Sa pente à droite en 1 vaut -2 , car

$$\frac{r(t) - 1}{t - 1} = \frac{r(t) - 1}{h(r(t)) - h(1)} \rightarrow \frac{1}{h'(1)} = -2.$$

La pente à gauche vaut 0 : il y a un point anguleux en $(1, 1)$. Le tracé suivant est calculé à partir de $r(t) = 1$ pour $t \leq 1$ et de la relation réciproque $h(r(t)) = t$ pour $t > 1$.



4. c) Comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$

Méthode 1 — Identité logarithmique demandée

En multipliant $\ln(r(t)) = t(r(t) - 1)$ par $r(t)$, on obtient

$$r(t) \ln(r(t)) = tr(t)(r(t) - 1).$$

Par I.4.b, $r(t) \rightarrow 0$. La limite usuelle $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ résulte par exemple de $\ln y/y \rightarrow 0$ avec $y = 1/x \rightarrow +\infty$. Donc $r(t) \ln(r(t)) \rightarrow 0$.

Pour $t > 1$, $r(t) - 1 \neq 0$, et ce facteur tend vers -1 . On peut écrire

$$tr(t) = \frac{r(t) \ln(r(t))}{r(t) - 1} \rightarrow 0.$$

Enfin, l'équation de définition donne

$$r(t)e^t = e^{tr(t)} \rightarrow 1.$$

Ainsi $tr(t) \rightarrow 0$ et $r(t)e^t \rightarrow 1$, ou encore $r(t) \sim e^{-t}$.

Méthode 2 — Encadrement exponentiel

Comme $r(t) \rightarrow 0$, pour t assez grand on a $r(t) \leq 1/2$. L'équation s'écrit $r(t) = e^{-t(1-r(t))}$, d'où

$$0 < r(t) \leq e^{-t/2}.$$

Ainsi $0 < tr(t) \leq te^{-t/2} \rightarrow 0$ par croissance comparée. On retrouve ensuite $r(t)e^t = e^{tr(t)} \rightarrow 1$.

L'identité logarithmique est la démarche prévue par le sujet ; l'encadrement donne une autre manière de contrôler la petite racine sans manipuler le produit $r(t) \ln r(t)$.

5. Vitesse de convergence pour $t \neq 1$

5. a) Signe de $F'(r(t))$

Puisque $f(r(t)) = r(t)$,

$$F'(r(t)) = tf(r(t)) - 1 = tr(t) - 1.$$

Si $0 < t < 1$, $r(t) = 1$, donc $F'(r(t)) = t - 1 < 0$. Si $t > 1$, la racine $r(t)$ appartient à $]0, \alpha[$, où F' est strictement négative par I.1.b.

Dans les deux cas, $tr(t) - 1 < 0$. Comme $t > 0$ et $r(t) > 0$,

$$0 < tr(t) < 1 \quad (t \neq 1).$$

5. b) Majoration de l'erreur

Sur $[0, r(t)]$, la dérivée de f est positive et majorée par

$$f'(x) = tf(x) \leq tf(r(t)) = tr(t).$$

La fonction f est continue sur le segment $[u_n, r(t)]$ et dérivable sur son intérieur. L'inégalité des accroissements finis donne donc

$$0 \leq r(t) - u_{n+1} = f(r(t)) - f(u_n) \leq tr(t)(r(t) - u_n).$$

Posons $q = tr(t) \in]0, 1[$. En itérant cette majoration,

$$0 \leq r(t) - u_n \leq q^n(r(t) - u_0) = r(t)q^n \leq q^n,$$

puisque $r(t) \leq 1$. C'est l'inégalité (ii).

Si $0 < t < 1$, $r(t) = 1$ et $q = t$, donc elle devient

$$0 \leq 1 - u_n \leq t^n \quad (n \geq 0).$$

6. Vitesse de convergence pour $t = 1$

6. a) Convergence des moyennes

Supposons d'abord $x_n \rightarrow 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que $|x_k| \leq \varepsilon/2$ pour tout $k \geq N$.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|,$$

somme finie. Pour $n > N$,

$$|\bar{x}_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} |x_k| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour n assez grand, $A/n \leq \varepsilon/2$, donc $|\bar{x}_n| \leq \varepsilon$. Ainsi $\bar{x}_n \rightarrow 0$.

Si maintenant $x_n \rightarrow \ell$, la suite $x_n - \ell$ tend vers 0 et sa moyenne vaut $\bar{x}_n - \ell$. Le résultat précédent donne $\bar{x}_n \rightarrow \ell$.

Ce résultat particulier sur les moyennes a été entièrement démontré; il peut donc être utilisé à la question suivante sans invoquer un théorème supplémentaire.

6. b) Différence des inverses

Pour $t = 1$, I.2 donne $u_n < 1$ et $u_n \rightarrow 1$. Ainsi $v_n = 1 - u_n > 0$, $v_n \rightarrow 0$, et $w_n = 1/v_n$ est bien défini.

La récurrence devient

$$v_{n+1} = 1 - e^{-v_n}.$$

Puisque $v_n > 0$, le dénominateur $1 - e^{-v_n}$ est strictement positif. On obtient

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{1 - e^{-v_n}} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - 1 + e^{-v_n}}{v_n(1 - e^{-v_n})}.$$

On utilise le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2 :

$$e^{-v} = 1 - v + \frac{v^2}{2} + o(v^2) \quad (v \rightarrow 0).$$

Le numérateur vaut $v^2/2 + o(v^2)$ et le dénominateur vaut $v^2 + o(v^2)$. On divise les deux par $v^2 > 0$ avant de passer à la limite. Ainsi

$$w_{n+1} - w_n \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

6. c) Équivalent de l'erreur

La somme des différences est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_0.$$

La division par $n \geq 1$ donne l'égalité demandée. D'après I.6.b, la suite des différences tend vers $1/2$. Le résultat de I.6.a appliqué à cette suite donne

$$\frac{w_n - w_0}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Comme $w_0 = 1$, $w_0/n \rightarrow 0$, donc $w_n/n \rightarrow 1/2$. Ces quantités sont positives, et leur limite est non nulle ; on peut prendre leurs inverses :

$$n(1 - u_n) = nv_n = \frac{n}{w_n} \rightarrow 2.$$

En particulier, $1 - u_n \sim 2/n$ lorsque $t = 1$.

Partie II

On utilise l'hypothèse de branchement conditionnel explicitée dans le sujet : sachant le nombre d'enfants d'un individu, les lignées de ces enfants évoluent indépendamment et gardent les lois de descendance indiquées. Elle permet les calculs conditionnels ci-dessous.

A. Probabilité d'extinction de la descendance d'un individu

1. Loi du nombre d'enfants et somme exponentielle

Puisque $X_1 \sim \mathcal{P}(t)$ avec $t > 0$,

$$p(k) = P(X_1 = k) = e^{-t} \frac{t^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série est absolument convergente, car

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p(k)x^k| = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t|x|)^k}{k!} = e^{-t} e^{t|x|} < +\infty.$$

La série exponentielle, applicable à tout réel tx , donne alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} = e^{-t} e^{tx} = e^{t(x-1)} = f(x).$$

On n'utilise ici aucune théorie générale des séries de fonctions : chaque valeur de x est fixée et le calcul repose sur la série exponentielle numérique.

2. Absence de petits-enfants

On a $U_1 = P(X_1 = 0) = e^{-t} = f(0) = f(U_0)$.

Sachant que l'individu a k enfants, il n'a aucun petit-enfant si chacun de ces k enfants n'a lui-même aucun enfant. Par l'hypothèse conditionnelle de branchement, ces événements sont indépendants et ont tous probabilité U_1 . Ainsi

$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = k) = U_1^k.$$

Pour $k = 0$, la probabilité vaut 1 : il n'y a aucun enfant dont il faudrait examiner la descendance. Cela correspond à la convention du produit vide $U_1^0 = 1$.

Tous les événements $\{X_1 = k\}$ ont une probabilité positive et forment un système complet. La formule des probabilités totales donne

$$U_2 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = 0 \mid X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)U_1^k = f(U_1).$$

La dernière égalité est celle de II.A.1 avec $x = U_1 \in [0, 1]$.

3. Récurrence et probabilité d'extinction

Question adaptée au programme actuel : le caractère indépendant et inchangé des lois des lignées sous le conditionnement $X_1 = k$ est rendu explicite dans le sujet. Sans cette précision, la multiplication des probabilités conditionnelles ne serait pas justifiée par la seule formulation d'une indépendance non conditionnée.

Pour $n \geq 1$, sachant $X_1 = k$, l'absence de descendants de génération $n + 1$ de l'individu signifie que chacun de ses k enfants n'a aucun descendant de génération n . Par le même raisonnement conditionnel,

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) = U_n^k.$$

La formule des probabilités totales et II.A.1 donnent

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)U_n^k = f(U_n).$$

Le cas $n = 0$ est déjà établi en II.A.2. Ainsi la relation est valable pour tout $n \geq 0$.

Comme $U_0 = u_0 = 0$ et que les deux suites vérifient la même récurrence, une récurrence immédiate sur l'indice montre $U_n = u_n$ pour tout n .

L'extinction à une génération est définitive : une génération vide ne peut produire aucun individu. Les événements $\{X_n = 0\}$ sont donc croissants en n ; leur réunion est l'événement d'extinction en un nombre fini de générations. Par continuité croissante des probabilités,

$$P(\text{extinction}) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = r(t).$$

En reprenant les valeurs de I.3.c, on obtient les approximations suivantes à environ 10^{-6} près ; la valeur pour $t \leq 1$ est exacte.

Paramètre t	Probabilité d'extinction $r(t)$ approchée
3	0,05951990
2,5	0,10735459
2	0,20318737
1,5	0,41718765
1,25	0,62862882
1,1	0,82386494

Paramètre t	Probabilité d'extinction $r(t)$ approchée
$0 < t \leq 1$	1

Pour $t > 1$, la probabilité de survie indéfinie est donc $1 - r(t) > 0$. Pour $0 < t \leq 1$, l'extinction est presque sûre.

B. Nombre moyen de générations de la descendance d'un individu

On suppose désormais $0 < t \leq 1$, donc l'extinction est presque sûre et D est fini presque sûrement. Le nombre D est l'indice de la dernière génération de descendants non vide, avec $D = 0$ lorsque la première génération est déjà vide.

1. Loi de D et somme partielle des moments

1. a) Probabilités de queue et probabilités ponctuelles

Avoir $D > n$ signifie avoir au moins un descendant de génération $n + 1$. Par conséquent,

$$P(D > n) = P(X_{n+1} > 0) = 1 - U_{n+1}.$$

Avoir $D = n$ signifie que la génération n est non vide mais que la génération $n + 1$ est vide. Comme une génération vide entraîne l'absence de toutes les générations suivantes,

$$\{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}.$$

Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$P(D = n) = U_{n+1} - U_n.$$

La même formule vaut pour $n = 0$ avec $U_0 = 0$, puisque $P(D = 0) = P(X_1 = 0) = U_1$.

On peut aussi écrire $P(D \geq n) = 1 - U_n$ pour $n \geq 1$. Le décalage d'un indice entre $D > n$ et $D \geq n$ sera essentiel pour les sommes suivantes.

1. b) Relation avec $S(n, t)$

Méthode 1 — Décalage d'indices dans une somme finie

Posons

$$M_n = \sum_{k=0}^n kP(D = k).$$

Par II.B.1.a, le terme de rang 0 étant nul,

$$M_n = \sum_{k=1}^n k(U_{k+1} - U_k).$$

En décalant la première somme, les coefficients des termes intermédiaires se simplifient :

$$M_n = \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)U_j - \sum_{j=1}^n jU_j = nU_{n+1} - \sum_{j=1}^n U_j.$$

Comme

$$S(n, t) = n - \sum_{j=1}^n U_j,$$

on obtient

$$M_n = S(n, t) - n(1 - U_{n+1}).$$

Méthode 2 — Comptage des générations par indicatrices

Pour chaque réalisation de D ,

$$\min(D, n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{D \geq j\}}.$$

La somme est finie et la variable $\min(D, n)$ est bornée. En prenant l'espérance et en utilisant II.B.1.a,

$$E(\min(D, n)) = \sum_{j=1}^n P(D \geq j) = \sum_{j=1}^n (1 - U_j) = S(n, t).$$

D'autre part, $\min(D, n) = D$ pour $D \leq n$, et vaut n sinon. Sa loi donne donc

$$E(\min(D, n)) = M_n + nP(D > n) = M_n + n(1 - U_{n+1}).$$

On retrouve $M_n = S(n, t) - n(1 - U_{n+1})$. La première méthode utilise les probabilités ponctuelles ; la seconde explique pourquoi la somme des probabilités de présence à chaque génération représente une espérance tronquée.

2. Convergence de la série pour $0 < t < 1$

2. a) Convergence de $S(t)$

Par I.5.b et II.A.3,

$$0 \leq 1 - U_n \leq t^n \quad (n \geq 1).$$

La série géométrique

$$\sum_{n \geq 1} t^n$$

converge puisque $0 < t < 1$. La comparaison des séries à termes positifs montre donc que

$$\sum_{n \geq 1} (1 - U_n)$$

converge et que

$$0 \leq S(t) \leq \frac{t}{1-t}.$$

2. b) Majoration du reste et choix de n

Pour tout $n \geq 1$, la série étant convergente à termes positifs,

$$0 \leq S(t) - S(n, t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - U_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{t^{n+1}}{1-t} \leq 10^{-2}.$$

Comme $1 - t > 0$ et $\ln t < 0$, cette condition est équivalente à

$$n + 1 \geq \frac{\ln(10^{-2}(1 - t))}{\ln t}.$$

On choisit le plus petit entier $n \geq 1$ satisfaisant cette inégalité. L'existence de cet entier découle de $t^{n+1} \rightarrow 0$; on peut le déterminer par une boucle sans fonction d'arrondi entier supplémentaire.

2. c) Programme Python et tableau

Code adapté en Python. Le programme choisit le plus petit $n \geq 1$ pour lequel la borne du reste est inférieure ou égale à eps , puis calcule $U_1, \dots, U_n$ et leur somme de survie.

Python

```
from numpy import exp

def approx_somme(t, eps=1e-2):
    n = 1
    while t ** (n + 1) / (1 - t) > eps:
        n = n + 1
    u = 0.0
    s = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        u = exp(t * (u - 1))
        s = s + 1 - u
    return n, s
```

Le paramètre vérifie $0 < t < 1$ et la précision eps est strictement positive. Sa valeur par défaut est 10^{-2} . La première boucle se termine car $t^{n+1}/(1 - t) \rightarrow 0$.

Dans la seconde boucle, après le passage d'indice k , u vaut U_k et s vaut

$$\sum_{j=1}^k (1 - U_j).$$

La borne exclusive de range justifie l'argument $n + 1$, qui permet d'inclure le terme U_n .
Le couple renvoyé est $(n, S(n, t))$.

Le code a été exécuté pour les cinq paramètres demandés. On obtient :

t	Entier n	$S(n, t)$ arrondi à trois décimales
0,5	7	0,735
0,6	10	1,003
0,7	16	1,373
0,8	27	1,934
0,9	65	2,996

La borne 10^{-2} porte sur la somme calculée avant l'arrondi d'affichage. L'arrondi à trois décimales peut ajouter au plus 5×10^{-4} à l'erreur. Les valeurs non arrondies sont approximativement 0,735412355, 1,003188860, 1,372715824, 1,933678128 et 2,995773607.

3. Existence et calcul de l'espérance de D

3. a) Cas $0 < t < 1$

Méthode 1 — Limite des moments partiels

La formule de II.B.1.b donne

$$\sum_{k=0}^n kP(D = k) = S(n, t) - n(1 - U_{n+1}).$$

Le premier terme tend vers la somme finie $S(t)$. Pour le second, I.5.b donne

$$0 \leq n(1 - U_{n+1}) \leq nt^{n+1} \longrightarrow 0,$$

par croissance comparée, puisque $0 < t < 1$. La série à termes positifs

$$\sum_{k \geq 0} kP(D = k)$$

converge donc vers $S(t)$. C'est exactement la condition d'existence de l'espérance pour la variable discrète non négative D . Ainsi

$$E(D) = S(t) < +\infty.$$

Méthode 2 — Formule de queue démontrée par sommes finies

Pour $k \geq 1$, $P(D = k) \leq P(D \geq k) = 1 - U_k \leq t^k$. La série

$$\sum_{k \geq 1} kt^k$$

converge et vaut $t/(1-t)^2$, d'après la série géométrique dérivée. Donc

$$\sum kP(D = k)$$

converge et D est intégrable.

L'identité finie de II.B.1.b donne $E(\min(D, n)) = S(n, t)$. De plus, par la loi de D ,

$$0 \leq E(D) - E(\min(D, n)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)P(D = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(D = k).$$

Le dernier membre est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0. On en déduit $E(D) = \lim_n S(n, t) = S(t)$.

La première méthode exploite le terme de bord de la somme télescopique ; la seconde explique la relation entre le nombre total de générations et les probabilités d'atteindre chacune d'elles. Aucun échange non justifié de deux sommes infinies n'est nécessaire.

Les sommes du tableau de II.B.2.c donnent déjà des approximations à 10^{-2} près avant arrondi. Pour fournir des valeurs arrondies plus précises de l'espérance elle-même, le même programme a été réexécuté avec $\text{eps} = 1\text{e-}8$:

t	Entier utilisé pour la précision 10^{-8}	$E(D)$ approchée	Arrondi à trois décimales
0,5	27	0,740536089	0,741
0,6	37	1,008255537	1,008
0,7	55	1,376191869	1,376
0,8	89	1,936794930	1,937
0,9	196	2,997454245	2,997

La certification concerne la borne du reste de la série. Les résultats numériques ont été contrôlés avec une précision décimale supérieure afin de vérifier les arrondis et les indices.

3. b) Cas critique $t = 1$

D'après I.6.c et II.A.3,

$$1 - U_n \sim \frac{2}{n}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} (1 - U_n)$$

diverge donc vers $+\infty$, par comparaison par équivalence avec la série harmonique à termes positifs. Ainsi $S(n, 1) \rightarrow +\infty$.

Dans la formule du moment partiel, le terme de bord reste borné et tend même vers 2, car

$$n(1 - U_{n+1}) = \frac{n}{n+1}((n+1)(1 - U_{n+1})) \rightarrow 2.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n kP(D = k) = S(n, 1) - n(1 - U_{n+1}) \rightarrow +\infty.$$

La série définissant l'espérance de D diverge : D n'admet pas d'espérance finie. On peut écrire $E(D) = +\infty$ si l'on emploie la convention d'une espérance étendue pour une variable non négative.

Pourtant, l'extinction reste presque sûre et D est fini presque sûrement. La queue de sa loi décroît trop lentement pour que sa moyenne soit finie.

Relevé des adaptations

- I.3.b et I.3.c : programmes demandés dans un ancien langage remplacés par du Python. Code adapté en Python, avec conservation du test $F(u_n + 10^{-6}) < 0$ et de la recherche du premier indice à partir de u_0 .

- I.3.b et I.3.c : ajout de la condition suffisante $F(1 - 10^{-6}) < 0$ pour garantir la terminaison du test proposé. Elle est vérifiée pour toutes les valeurs du tableau ; la seule condition $t > 1$ ne fournit pas cette garantie pour un paramètre arbitrairement proche de 1.
- I.4.a : la dérivée en 1 est précisée comme une dérivée à gauche, puisque h est définie sur $]0, 1]$.
- II.A.2 et II.A.3 : hypothèse de branchement conditionnel explicitée : sachant le nombre d'enfants, leurs lignées restent indépendantes et conservent les lois de descendance annoncées. Cette précision justifie les produits de probabilités sous conditionnement.
- II.B.2.b et II.B.2.c : choix du plus petit entier $n \geq 1$ satisfaisant la borne $t^{n+1}/(1-t) \leq 10^{-2}$ précisé pour rendre les indices du tableau reproductibles.
- II.B.2.c : algorithme transcrit en Python, avec la même somme $S(n, t)$ et le même contrôle du reste. Code adapté en Python.