



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**ESSEC**

Mathématiques 2

**1985**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

## Notations

$E$  désigne l'espace vectoriel réel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}[X]$  désigne le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $e_n$  la fonction polynôme définie par  $e_n(x) = x^n$ , et  $\mathbb{R}_n[X]$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  engendré par la famille  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ .

À toute fonction  $f \in E$ , on associe la fonction  $\Phi$  définie, pour tout réel  $x$ , par

$$\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Le problème propose l'étude de quelques propriétés de l'application  $f \mapsto \Phi$ . Les parties III, IV et V, indépendantes entre elles, utilisent des résultats de la partie II, que l'on pourra éventuellement admettre.

## Partie I — Étude de trois exemples

---

Déterminer les fonctions  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  associées respectivement aux fonctions  $f_1, f_2, f_3$  suivantes.

I.1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x \cos(2\pi x)$ .

I.2) On définit

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1], \\ 4x & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 4(1-x) & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Tracer la courbe représentative de  $\Phi_2$ .  $\Phi_2$  est-elle indéfiniment dérivable ?

I.3) On définit

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1, \\ \ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\Phi_3(x) - f_3(x))$ .

Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près des coordonnées du point de la courbe représentative de  $\Phi_3$  à tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Tracer les courbes représentatives de  $f_3$  et de  $\Phi_3$  dans un même repère.

## Partie II — Étude de l'application $L : E \rightarrow E, f \mapsto \Phi$

II.1.a) Pour  $f \in E$ , dire pourquoi  $\Phi$  est dérivable et calculer sa dérivée.

II.1.b) Montrer que l'application  $L : E \rightarrow E$  définie par  $L(f) = \Phi$  est linéaire. Est-elle surjective ?

II.1.c) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Calculer  $\Phi$  si  $f$  est définie, pour tout réel  $x$ , par  $f(x) = \cos(\alpha x)$ .  $L$  est-elle injective ?

II.2.a) Montrer que, si  $f$  est bornée,  $L(f)$  est bornée.

II.2.b) Montrer que, si  $f$  est périodique,  $\Phi = L(f)$  l'est également.

II.2.c) Soient  $f \in E, a \in \mathbb{R}, \Phi = L(f), g$  définie par  $g(x) = f(a - x)$  pour tout réel  $x$ , et  $\gamma = L(g)$ .

Trouver un lien entre  $\gamma$  et  $\Phi$ .

En déduire un élément de symétrie de la courbe représentative de  $\Phi$  lorsque  $f$  est paire, respectivement impaire.

Donner une condition suffisante sur  $f$  pour que  $\Phi$  soit paire, respectivement impaire.

II.3.a) Montrer que, si  $f$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , respectivement  $x \rightarrow -\infty$ ,  $L(f)$  possède la même limite.

Y a-t-il réciproque ? Donner un contre-exemple.

II.3.b) On suppose l'existence d'un triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et d'une fonction numérique  $\varepsilon$  tels que, pour  $x \neq 0$ ,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Le symbole  $\infty$  représente ici indifféremment  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Montrer qu'il existe  $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ , à déterminer en fonction de  $(a, b, c)$ , et une fonction numérique  $\varepsilon'$  tels que, pour  $x \neq 0$ ,

$$\Phi(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon'(x) = 0.$$

### Partie III — Étude d'un exemple

---

$\sqrt[3]{A}$  désigne le nombre réel unique, éventuellement négatif, dont le cube vaut  $A$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)}.$$

III.1) Étudier  $f$  : continuité, dérivabilité, variations et limites. Tracer sa courbe représentative et déterminer en particulier son asymptote oblique.

III.2) Étudier la fonction  $\Phi = L(f)$  associée, sans chercher à l'expliciter.

Écrire en Python un programme donnant des valeurs approchées du minimum et du maximum relatifs de  $\Phi$ . On pourra utiliser la méthode des rectangles à gauche en divisant l'intervalle d'intégration en dix parties égales ; elle donne respectivement environ 0,358 et 0,387. On pourra augmenter le nombre de subdivisions pour affiner les approximations.

On peut calculer la racine cubique réelle de tout réel  $u$  avec `numpy.cbrt(u)` ; cette commande renvoie une racine cubique négative lorsque  $u$  est négatif.

Tracer la courbe représentative de  $\Phi$  et déterminer en particulier son asymptote oblique.

## Partie IV — Étude des valeurs propres de $L$

---

Un réel  $\lambda$  est appelé valeur propre de  $L$  s'il existe une fonction non nulle  $f \in E$ , appelée fonction propre associée à  $\lambda$ , telle que  $L(f) = \lambda f$ .

Pour une valeur propre  $\lambda$  de  $L$ , on note

$$E_\lambda = \{f \in E : L(f) = \lambda f\}.$$

IV.1.a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $L$ , ainsi que  $\mathbb{R}[X]$ .

IV.1.b) Écrire la matrice  $A_n$  de la restriction  $\ell_n$  de  $L$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ .

IV.1.c) Quelles sont les valeurs propres de  $\ell_n$ ?  $\ell_n$  est-elle diagonalisable?

IV.2.a) 0 est-il une valeur propre de  $L$ ?

IV.2.b) Montrer que, si  $f \in E$  est une fonction propre associée à une valeur propre non nulle  $\lambda$ , elle est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives appartiennent à  $E_\lambda$ .

IV.3.a) Montrer que, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto e^{\omega x}$  est une fonction propre de  $L$ , et déterminer la valeur propre  $\lambda(\omega)$  associée.

IV.3.b) Étudier les variations de la fonction  $\lambda : \omega \mapsto \lambda(\omega)$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Cette fonction est-elle dérivable en 0?

IV.3.c) En déduire que tout réel positif est une valeur propre de  $L$ .

IV.4) Montrer que toute fonction propre associée à une valeur propre supérieure à 1 est non bornée. Utiliser II.2.a.

## Partie V — Cas où $f \in E$ est la densité d'une variable aléatoire réelle $X$

V.1) Exprimer  $\Phi = L(f)$  en fonction de la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

Montrer que  $\Phi$  est la densité d'une variable aléatoire  $Y$ . On vérifiera en particulier, en utilisant II.3.a, que les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \Phi(t) dt$$

convergent.

V.2) On suppose  $f$  nulle en dehors d'un segment  $[a, b]$ , avec  $a < b$ . Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $E(Y^n)$  en fonction de la famille  $(E(X^k))_{0 \leq k \leq n}$ .

En déduire  $E(Y)$  et  $V(Y)$  en fonction de  $E(X)$  et de  $V(X)$ .

V.3) Montrer que l'expression de  $E(Y^n)$  en fonction de  $(E(X^k))_{0 \leq k \leq n}$  obtenue à la question précédente reste valable si l'on suppose uniquement que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E(X^n)$  existe.