



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1985

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Notations

Pour $f \in E$, on note $L(f) = \Phi$, où $\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$. Toutes les intégrales sur un segment existent puisque f est continue. Les fonctions étudiées dans la partie I sont bien continues, y compris aux points où leur expression change.

Partie I — Étude de trois exemples

I.1)

Méthode 1 — Primitive obtenue par intégration par parties

Une intégration par parties sur le segment $[x, x + 1]$ donne

$$\int t \cos(2\pi t) dt = \frac{t \sin(2\pi t)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi t)}{4\pi^2}.$$

On évalue cette primitive aux deux bornes. Les fonctions sinus et cosinus ont la même valeur en $2\pi x$ et en $2\pi(x + 1)$; les termes en cosinus se compensent, tandis que les coefficients de sinus diffèrent de 1. Ainsi,

$$\Phi_1(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Méthode 2 — Dérivée de l'intégrale à bornes variables

Le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\Phi'_1(x) = f_1(x + 1) - f_1(x) = (x + 1) \cos(2\pi x) - x \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x).$$

Il existe donc une constante C telle que $\Phi_1(x) = \sin(2\pi x)/(2\pi) + C$. Pour la déterminer, on calcule sur $[0, 1]$:

$$\Phi_1(0) = \left[\frac{t \sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = 0.$$

Ainsi $C = 0$, ce qui redonne la même formule. La première méthode calcule directement l'intégrale ; la seconde réduit le calcul à une dérivée et une valeur initiale.

I.2)

On introduit une primitive cumulée de f_2 :

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ 2t^2 & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1 - 2(1-t)^2 & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

En effet, l'intégrale de $4t$ sur $[0, 1/2]$ vaut $1/2$, celle de $4(1-t)$ sur $[1/2, 1]$ vaut aussi $1/2$, et les expressions se raccordent avec la même dérivée. On a donc $G' = f_2$ et $\Phi_2(x) = G(x+1) - G(x)$.

En distinguant les positions de x et de $x+1$ relativement à $0, 1/2, 1$, on obtient

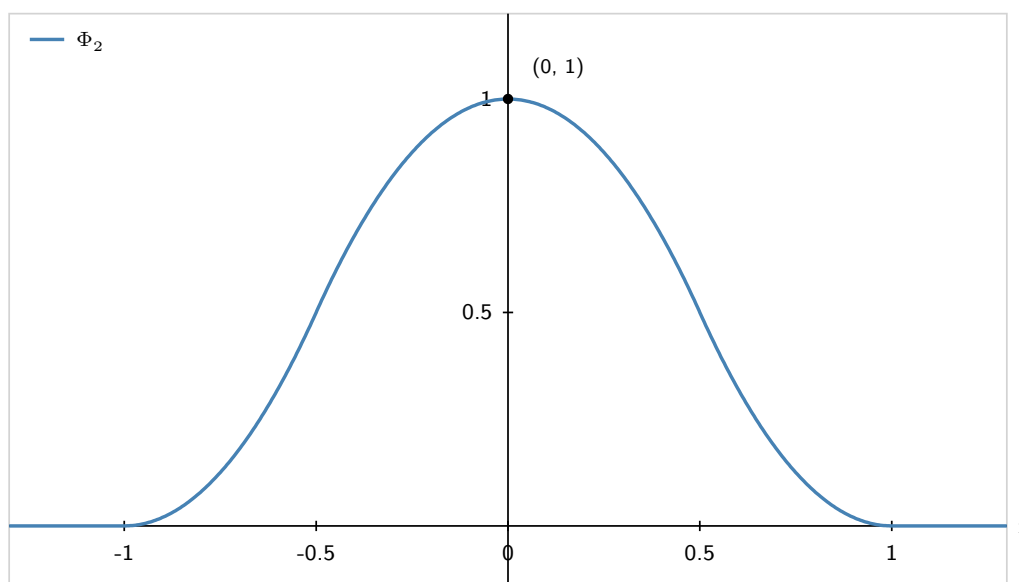
$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ 2(x+1)^2 & -1 \leq x \leq -1/2, \\ 1 - 2x^2 & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x)^2 & 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions intermédiaires de part et d'autre de 0 sont identiques, d'où le regroupement sur $[-1/2, 1/2]$. La fonction est paire, nulle hors de $[-1, 1]$, positive sur

$] -1, 1[$, strictement croissante sur $[-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$. Son maximum est $\Phi_2(0) = 1$, et $\Phi_2(\pm 1/2) = 1/2$.

Les dérivées premières des morceaux sont respectivement $0, 4(x+1), -4x, 4(x-1)$ et 0 . Elles se raccordent aux quatre points $-1, -1/2, 1/2, 1$. La fonction est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

En revanche, les dérivées secondes sur les intervalles ouverts successifs valent $0, 4, -4, 4$ et 0 . Les dérivées unilatérales de Φ_2' ne coïncident pas aux quatre raccords : Φ_2 n'y est pas deux fois dérivable. Elle n'est donc pas indéfiniment dérivable. Elle est de classe C^∞ sur chacun des intervalles séparés par ces quatre points, en particulier au voisinage de 0 .



I.3)

Calcul de la fonction associée

Pour $x \leq 0$, tout le segment $[x, x+1]$ est situé à gauche de 1 , donc

$$\Phi_3(x) = \int_x^{x+1} (1-t) dt = \frac{1}{2} - x.$$

Pour $0 < x < 1$, on partage l'intégrale au point 1 :

$$\Phi_3(x) = \int_x^1 (1-t) dt + \int_1^{x+1} \ln(t) dt = \frac{(1-x)^2}{2} + (x+1) \ln(x+1) - x.$$

Pour $x \geq 1$, une primitive du logarithme est $t \ln(t) - t$, d'où

$$\Phi_3(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x) - 1.$$

Les expressions se raccordent en 0 et en 1. La formule complète est

$$\Phi_3(x) = \begin{cases} 1/2 - x & x \leq 0, \\ (1-x)^2/2 + (x+1) \ln(x+1) - x & 0 < x < 1, \\ (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x) - 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Limite demandée — Méthode 1 : développement limité en zéro

Pour $x \geq 1$, $f_3(x) = \ln(x)$ et

$$\Phi_3(x) - \ln(x) = (x+1) \ln(1 + 1/x) - 1.$$

On pose $z = 1/x \rightarrow 0^+$ et on utilise le développement limité en zéro

$\ln(1+z) = z - z^2/2 + o(z^2)$. Par multiplication,

$$\left(\frac{1}{z} + 1\right) \ln(1+z) - 1 = \frac{z}{2} + o(z).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\Phi_3(x) - f_3(x)) = \frac{1}{2}.$$

Il s'agit d'un changement de variable suivi d'une multiplication de développements, sans composition de développements limités.

Limite demandée — Méthode 2 : encadrement de l'intégrale

Le changement de variable affine $t = x + u$ donne

$$\Phi_3(x) - \ln(x) = \int_0^1 \ln(1 + u/x) du.$$

Pour $y \geq 0$, on a $0 \leq y - \ln(1 + y) \leq y^2/2$. Pour le vérifier, la fonction de gauche s'annule en 0 et sa dérivée vaut $y/(1 + y)$, comprise entre 0 et y ; l'intégration sur $[0, y]$ donne les deux bornes.

En appliquant cette inégalité à $y = u/x$, puis en intégrant,

$$0 \leq \frac{1}{2} - x \int_0^1 \ln(1 + u/x) du \leq \frac{1}{6x}.$$

Le théorème d'encadrement donne à nouveau la limite $1/2$. La première méthode extrait un terme asymptotique; la seconde donne aussi une majoration explicite de l'erreur.

Point à tangente horizontale et tracé

La dérivée de Φ_3 , obtenue par les formules précédentes ou par les bornes variables, est

$$\Phi'_3(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0, \\ x - 1 + \ln(x + 1) & 0 < x < 1, \\ \ln((x + 1)/x) & x \geq 1. \end{cases}$$

Sur $]0, 1[$, la fonction $u(x) = x - 1 + \ln(x + 1)$ a une dérivée $1 + 1/(x + 1) > 0$. De plus, $u(0) = -1$ et $u(1) = \ln(2) > 0$. Par continuité et stricte monotonie, il existe un unique $\xi \in]0, 1[$ tel que $u(\xi) = 0$.

La dérivée de Φ_3 est négative avant ξ et positive après ξ . C'est donc l'unique point à tangente horizontale, et un minimum global. La dichotomie ci-dessous calcule ses coordonnées.

Python

```
import numpy as np

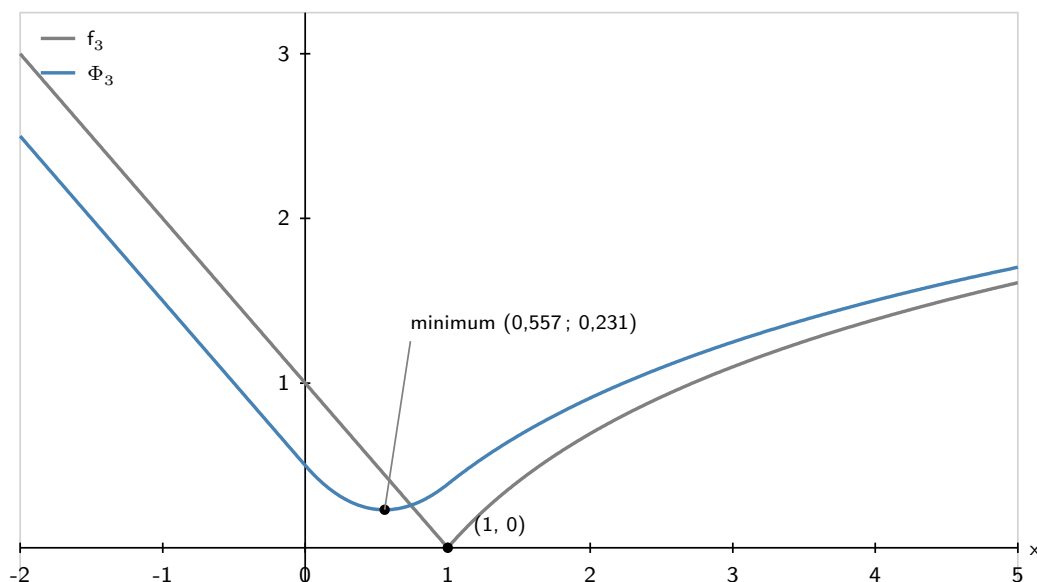
def phi3(x):
    if x <= 0:
        return 0.5 - x
    elif x < 1:
        return (1 - x)**2 / 2 + (x + 1) * np.log(x + 1) - x
    else:
        return (x + 1) * np.log(x + 1) - x * np.log(x) - 1

gauche = 0.0
droite = 1.0
for j in range(30):
    milieu = (gauche + droite) / 2
    if milieu - 1 + np.log(milieu + 1) < 0:
        gauche = milieu
    else:
        droite = milieu
xi = (gauche + droite) / 2
print(xi, phi3(xi))
```

Ce code a été exécuté. Il donne $\xi \simeq 0,557145599$ et $\Phi_3(\xi) \simeq 0,230503193$. Les coordonnées demandées à 10^{-3} près sont donc $(0,557; 0,231)$. La largeur de l'intervalle de dichotomie est 2^{-30} ; sur $[0, 1]$, $|\Phi'_3| \leq 1$, ce qui contrôle également l'erreur de l'ordonnée due à l'approximation de l'abscisse.

Pour le tracé, f_3 décroît de $+\infty$ à 0 sur $] -\infty, 1]$, puis croît vers $+\infty$. Sa courbe a un point

anguleux en $(1, 0)$. La fonction Φ_3 tend vers $+\infty$ aux deux extrémités, coïncide avec la droite $y = 1/2 - x$ pour $x \leq 0$, puis atteint le minimum ci-dessus et croît. Au voisinage de $+\infty$, $\Phi_3(x) - \ln(x) \rightarrow 0$; la courbe de Φ_3 se rapproche donc de celle de f_3 .



Partie II — Étude de l'application L

II.1.a)

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède la primitive $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, dérivable avec $G' = f$. On écrit $\Phi(x) = G(x+1) - G(x)$.

La dérivation et la règle de composition donnent

$$\Phi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

Cette dérivée est continue. Ainsi Φ est de classe C^1 , ce qui assure en particulier qu'elle appartient à E .

II.1.b)

Pour $f, g \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale sur tout segment donne, pour tout x ,

$$L(af + bg)(x) = \int_x^{x+1} (af(t) + bg(t)) dt = aL(f)(x) + bL(g)(x).$$

L'application $L : E \rightarrow E$ est donc linéaire.

Elle n'est pas surjective : par II.1.a, toute fonction de son image est dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction $x \mapsto |x|$ appartient à E mais n'est pas dérivable en 0. Cette fonction n'a donc aucun antécédent par L .

II.1.c)

Puisque $\alpha > 0$, une primitive de $\cos(\alpha t)$ est $\sin(\alpha t)/\alpha$. Ainsi,

$$\Phi(x) = \frac{\sin(\alpha(x+1)) - \sin(\alpha x)}{\alpha}.$$

Pour $\alpha = 2\pi$, cette expression est identiquement nulle, alors que $x \mapsto \cos(2\pi x)$ n'est pas la fonction nulle. Le noyau de L contient donc une fonction non nulle et L n'est pas injective.

II.2.a)

Si f est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout t . L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent

$$|L(f)(x)| \leq \int_x^{x+1} |f(t)| dt \leq \int_x^{x+1} M dt = M.$$

Cette borne est indépendante de x . Donc $L(f)$ est bornée. Plus précisément, si $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, on a $\|L(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

II.2.b)

Soit $p > 0$ une période de f . Par le changement de variable affine $t = u + p$,

$$L(f)(x+p) = \int_{x+p}^{x+p+1} f(t) dt = \int_x^{x+1} f(u+p) du = \int_x^{x+1} f(u) du = L(f)(x).$$

Ainsi p est également une période de $L(f)$. Cette conclusion n'impose pas que p soit sa plus petite période ; la fonction associée peut notamment être constante.

II.2.c)

On effectue le changement de variable affine $u = a - t$, qui inverse l'ordre des bornes :

$$\gamma(x) = \int_x^{x+1} f(a-t) dt = \int_{a-x-1}^{a-x} f(u) du = \Phi(a-x-1).$$

Si f est paire, on prend $a = 0$: alors $g = f$, donc $\Phi(x) = \Phi(-x-1)$. La courbe de Φ est symétrique par rapport à la droite $x = -1/2$.

Si f est impaire, avec $a = 0$ on a $g = -f$ et, par linéarité, $\gamma = -\Phi$. Ainsi $\Phi(-x-1) = -\Phi(x)$. La courbe possède le centre de symétrie $(-1/2, 0)$.

Pour obtenir la parité de Φ par rapport à l'origine, on prend plutôt $a = 1$. Une condition suffisante pour que Φ soit paire est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(1-x) = f(x).$$

En effet, on a alors $g = f$ et $\Phi(-x) = \Phi(x)$. Cela signifie que la courbe de f est symétrique par rapport à $x = 1/2$.

Une condition suffisante pour que Φ soit impaire est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(1-x) = -f(x).$$

Cette fois $g = -f$ donne $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; la courbe de f possède le centre de symétrie $(1/2, 0)$. Ces conditions sont suffisantes, sans être présentées comme nécessaires.

II.3.a)

Supposons $f(t) \rightarrow \ell$ quand $t \rightarrow +\infty$. Pour tout $\eta > 0$, il existe A tel que $t \geq A$ implique $|f(t) - \ell| \leq \eta$. Si $x \geq A$, tous les points de $[x, x+1]$ vérifient cette inégalité. Donc

$$|L(f)(x) - \ell| = \left| \int_x^{x+1} (f(t) - \ell) dt \right| \leq \eta.$$

Cela établit $L(f)(x) \rightarrow \ell$ en $+\infty$.

Si $f(t) \rightarrow \ell$ quand $t \rightarrow -\infty$, on choisit A tel que $t \leq A$ implique la même majoration. Pour $x \leq A-1$, tout le segment $[x, x+1]$ est situé à gauche de A ; on obtient la même estimation et la même limite en $-\infty$.

Il n'y a pas de réciproque. La fonction $f(x) = \cos(2\pi x)$ n'a de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$: les suites d'arguments entiers et demi-entiers donnent respectivement les valeurs 1 et -1 . Pourtant, II.1.c donne $L(f) = 0$, qui a une limite nulle aux deux extrémités.

II.3.b)

On détermine le développement à l'extrémité choisie, positive ou négative. Pour $|x| > 2$, le segment $[x, x+1]$ ne rencontre pas 0. L'intégration des trois termes explicites donne

$$\Phi(x) = ax + \frac{a}{2} + b + c \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + \int_x^{x+1} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

Le quotient $(x+1)/x = 1 + 1/x$ est alors positif. Posons

$$a' = a, \quad b' = b + \frac{a}{2}, \quad c' = c.$$

Pour $|x| > 2$, le reste demandé peut s'écrire

$$\varepsilon'(x) = c(x \ln(1 + 1/x) - 1) + x \int_x^{x+1} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

Le développement limité $\ln(1 + z) = z + o(z)$ en $z = 0$, appliqué après le changement de variable $z = 1/x$, donne $x \ln(1 + 1/x) \rightarrow 1$ à chacune des deux extrémités.

Pour le second terme, $|t| \geq |x| - 1$ sur le segment, donc

$$\left| x \int_x^{x+1} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right| \leq \frac{|x|}{|x| - 1} \sup_{t \in [x, x+1]} |\varepsilon(t)|.$$

La fonction $\varepsilon(t) = tf(t) - at^2 - bt - c$, pour $t \neq 0$, est continue sur les segments considérés. Son supremum existe. L'hypothèse de limite nulle assure que ce supremum tend vers zéro lorsque le segment part vers l'extrémité étudiée. Le facteur $|x|/(|x| - 1)$ tend vers 1, donc le second terme tend aussi vers zéro.

Pour définir le reste sur tous les réels non nuls, on pose simplement

$$\varepsilon'(x) = x \left(\Phi(x) - ax - b - \frac{a}{2} \right) - c.$$

Cette définition coïncide avec l'expression précédente pour $|x| > 2$ et ne nécessite pas d'intégrer $1/t$ sur un segment contenant 0. En conclusion,

$$\Phi(x) = ax + b + \frac{a}{2} + \frac{c}{x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x}, \quad \varepsilon'(x) \rightarrow 0.$$

Le symbole ε' désigne ici une nouvelle fonction de reste, et non la dérivée de ε .

Partie III — Étude d'un exemple

III.1)

Posons $P(x) = (x - 2)^2(x - 1) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. La fonction racine cubique réelle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable hors de 0. Ainsi $f = \sqrt[3]{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable hors de $\{1, 2\}$.

Pour $x \neq 1, 2$,

$$f'(x) = \frac{P'(x)}{3f(x)^2} = \frac{(x-2)(3x-4)}{3(\sqrt[3]{P(x)})^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Le signe de la dérivée est donc positif pour $x < 4/3$, négatif pour $4/3 < x < 2$, puis positif pour $x > 2$, en tenant compte du point 1 où la dérivée n'existe pas.

À proximité de 1, en posant $h = x - 1$, on a $f(1 + h) = \sqrt[3]{h(1 - h)^2}$. Le taux d'accroissement vaut

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{|1 - h|^{2/3}}{|h|^{2/3}} \rightarrow +\infty.$$

La fonction n'a pas de dérivée finie en 1 ; sa courbe y possède une tangente verticale et elle continue à croître de part et d'autre.

À proximité de 2, $f(2 + h) = |h|^{2/3} \sqrt[3]{1 + h}$, d'où

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{\operatorname{sgn}(h) \sqrt[3]{1 + h}}{|h|^{1/3}}.$$

Ce quotient tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite. Le point $(2, 0)$ est un minimum local strict avec deux demi-tangentes verticales.

Par continuité aux points singuliers et par le signe des dérivées sur les intervalles

ouverts, f croît strictement sur $] -\infty, 4/3]$, décroît strictement sur $[4/3, 2]$, puis croît strictement sur $[2, +\infty[$. Son maximum local vaut

$$f(4/3) = \sqrt[3]{4/27} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \simeq 0,529134.$$

Comme $P(x)/x^3 \rightarrow 1$, on a $f(x)/x = \sqrt[3]{P(x)/x^3} \rightarrow 1$ aux deux extrémités. Ainsi $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Aucun des deux extrema locaux n'est global.

Pour l'asymptote, posons $d(x) = x - 5/3$. L'identité de différence des cubes donne

$$f(x) - d(x) = \frac{P(x) - d(x)^3}{f(x)^2 + f(x)d(x) + d(x)^2} = \frac{-x/3 + 17/27}{f(x)^2 + f(x)d(x) + d(x)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif : il vaut $(f + d/2)^2 + 3d^2/4$, et ne pourrait s'annuler que si $f = d = 0$, ce qui n'arrive pas puisque $d(5/3) = 0$ mais $P(5/3) \neq 0$.

Comme $f(x)/x \rightarrow 1$ et $d(x)/x \rightarrow 1$, ce dénominateur est équivalent à $3x^2$. Donc $f(x) - d(x) \rightarrow 0$ et, plus précisément,

$$x(f(x) - x + 5/3) \rightarrow -\frac{1}{9}.$$

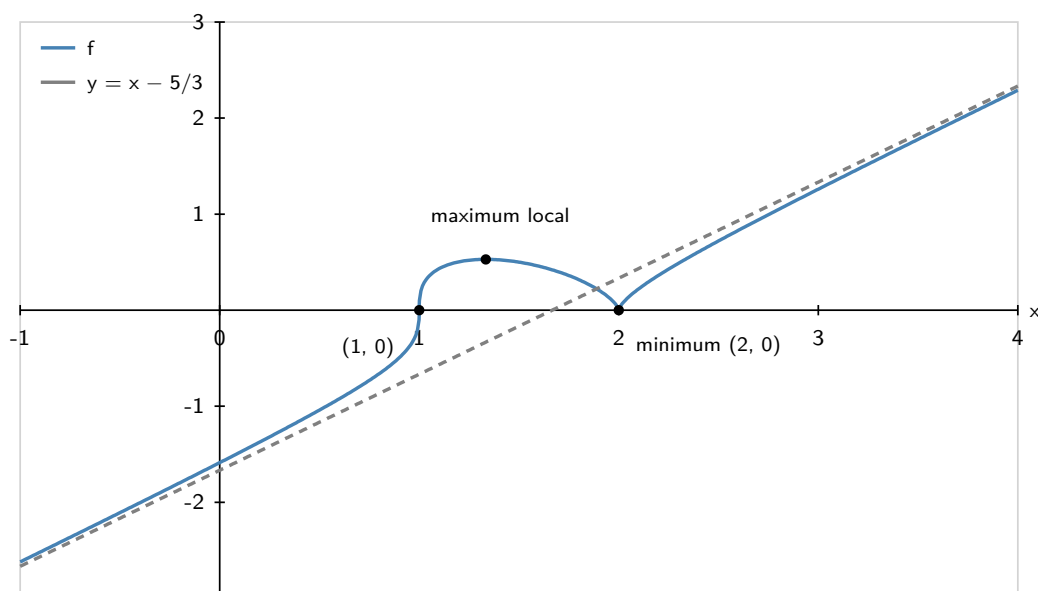
L'asymptote oblique aux deux extrémités est $y = x - 5/3$. La courbe est au-dessus de cette droite pour $x < 17/9$, la coupe en $x = 17/9$, puis est au-dessous pour $x > 17/9$, d'après le signe du numérateur exact.

Cette méthode fournit, sans composition de développements limités, le développement utile à la suite :

$$f(x) = x - \frac{5}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}, \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ en } \pm \infty.$$

x	$-\infty$	$4/3$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\sqrt[3]{4}/3$	0	$+\infty$
Variation	croissante	maximum local	minimum local	croissante

Entre les deux extrema, la fonction est décroissante. Elle s'annule également en 1.



III.2)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. L'indication numérique du PDF est rectifiée : avec dix rectangles à gauche, les valeurs sont environ 0,358 et 0,387, et non 0,358 et 0,425. L'affinement donne les extrema de la fonction elle-même, environ 0,355 et 0,403.

Par II.1.a, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi'(x) = f(x+1) - f(x).$$

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; deux racines cubiques réelles sont donc ordonnées comme leurs cubes. Le signe de $\Phi'(x)$ est celui de

$$P(x+1) - P(x) = 3x^2 - 7x + 4 = (x-1)(3x-4).$$

Ainsi Φ' est strictement positive sur $] -\infty, 1[$, strictement négative sur $]1, 4/3[$ et strictement positive sur $]4/3, +\infty[$. Elle s'annule exactement en 1 et en $4/3$.

La fonction Φ possède donc un maximum local strict en $x = 1$ et un minimum local strict en $x = 4/3$. Ces conclusions reposent sur le changement de signe de la dérivée et ne nécessitent pas une dérivée seconde aux points singuliers de f .

Le développement de III.1 et II.3.b, avec $(a, b, c) = (1, -5/3, -1/9)$, donnent

$$\Phi(x) = x - \frac{7}{6} - \frac{1}{9x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x}, \quad \varepsilon'(x) \rightarrow 0 \text{ en } \pm \infty.$$

Ainsi $\Phi(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, $\Phi(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, et sa courbe possède l'asymptote oblique $y = x - 7/6$ aux deux extrémités. Les deux extrema sont relatifs, sans extremum global.

Le programme suivant approche directement les deux intégrales, sans chercher de primitive explicite de f .

Python

```
import numpy as np

def f(x):
    return np.cbrt((x - 2)**2 * (x - 1))

def phi_rectangles(x, M):
    total = 0.0
```

```

for j in range(M):
    total = total + f(x + j / M)
return total / M

for M in [10, 1000, 10000, 100000]:
    minimum = phi_rectangles(4 / 3, M)
    maximum = phi_rectangles(1.0, M)
    print(M, minimum, maximum)

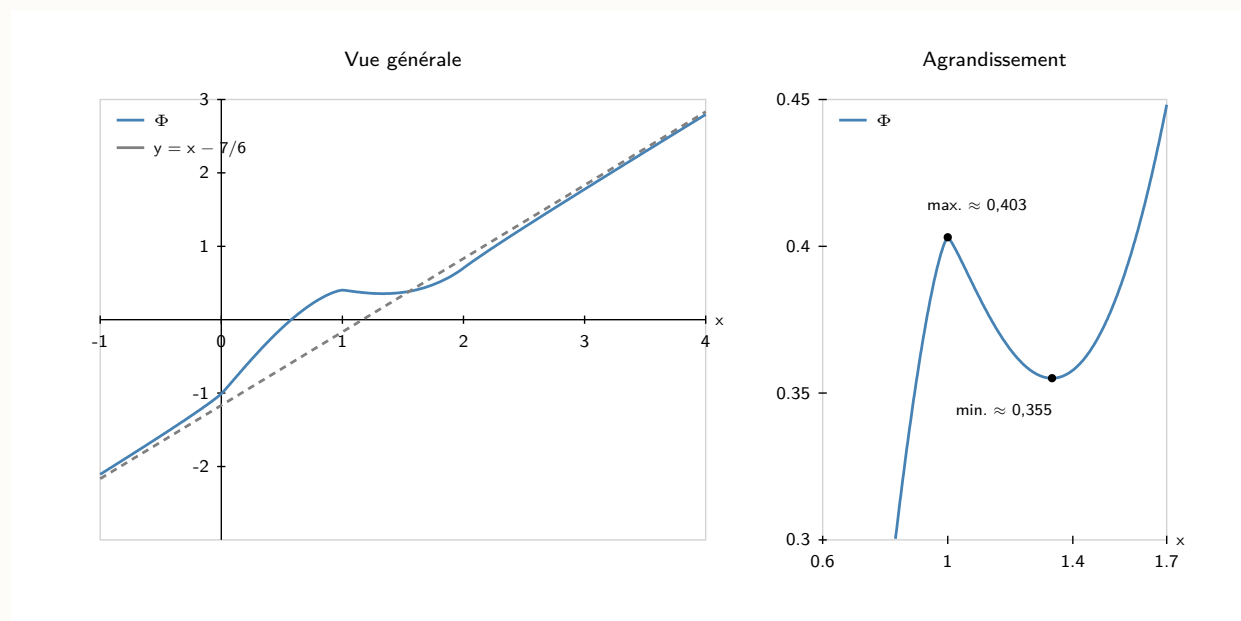
```

La variable M est le nombre de subdivisions, chacune de largeur $1 / M$. La boucle utilise les abscisses gauches de chaque sous-intervalle. L'abscisse du minimum est $4/3$ et celle du maximum est 1, d'après la preuve précédente ; le programme ne les recherche donc pas expérimentalement. `np.cbrt` traite correctement les arguments négatifs.

Le code a été exécuté. Pour $M = 10$, il donne environ 0,357773 pour le minimum et 0,386983 pour le maximum. Avec $M = 100000$, il donne environ 0,355064 et 0,403066. La convergence de ces sommes vers les intégrales découle de la continuité de f sur les segments d'intégration ; les valeurs numériques servent à représenter les courbes et ne remplacent pas la preuve des variations.

x	$-\infty$	1	$4/3$	$+\infty$
$\Phi(x)$	$-\infty$	$\simeq 0,403066$	$\simeq 0,355064$	$+\infty$
Variation	croissante	maximum local	minimum local	croissante

Entre 1 et $4/3$, la fonction est décroissante. Le tracé ci-dessous représente les intégrales évaluées numériquement ; un agrandissement rend visibles les deux extrema proches.



Partie IV — Étude des valeurs propres de L

IV.1.a)

Pour un entier $j \geq 0$, on intègre le monôme et on applique la formule du binôme :

$$L(e_j)(x) = \frac{(x+1)^{j+1} - x^{j+1}}{j+1} = \sum_{i=0}^j \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{i} x^i.$$

C'est un polynôme de degré j , de coefficient dominant 1. Pour $j \leq n$, il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité, tout polynôme de degré au plus n a son image dans $\mathbb{R}_n[X]$: cet espace est stable par L .

Tout polynôme appartient à un tel espace pour un certain n . Ainsi $\mathbb{R}[X]$ est également stable par L .

IV.1.b)

Les colonnes de A_n sont les coordonnées des polynômes $L(e_j)$ dans la base des monômes. En indexant les lignes et colonnes de 0 à n , on obtient

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{i} & 0 \leq i \leq j \leq n, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

La matrice est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1. Par exemple,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $L(1) = 1$, $L(x) = x + 1/2$ et $L(x^2) = x^2 + x + 1/3$.

IV.1.c)

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Ainsi la seule valeur propre de ℓ_n est 1, pour tout $n \geq 0$; elle est réalisée par les polynômes constants non nuls.

Pour déterminer l'espace propre, soit Q un polynôme non constant de degré $d \geq 1$ et de coefficient dominant $a_d \neq 0$. Dans $L(x^d) - x^d$, le coefficient de x^{d-1} est

$$\frac{1}{d+1} \binom{d+1}{d-1} = \frac{d}{2}.$$

Les termes provenant de monômes de degré inférieur à d ont, dans leur différence avec leur image, un degré au plus $d-2$. Donc $L(Q) - Q$ a pour terme dominant $(a_d d/2)x^{d-1}$, non nul. Aucun polynôme non constant ne vérifie $L(Q) = Q$.

L'espace propre associé à 1 est donc l'espace des constantes, de dimension 1. Pour $n = 0$, l'espace total a dimension 1 et ℓ_0 est l'identité : elle est diagonalisable. Pour $n \geq 1$, la somme des dimensions des espaces propres vaut $1 < n+1$; ℓ_n n'est pas diagonalisable.

Cette conclusion n'utilise ni déterminant ni polynôme caractéristique.

IV.2.a)

La fonction $x \mapsto \cos(2\pi x)$ appartient à E , n'est pas identiquement nulle et vérifie $L(f) = 0$ d'après II.1.c. Donc 0 est une valeur propre de L .

IV.2.b)

Soit $f \neq 0$ telle que $L(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$. Par II.1.a, $L(f)$ est de classe C^1 , donc $f = L(f)/\lambda$ est de classe C^1 .

Plus généralement, si f est de classe C^k , la formule $(L(f))' = f(\cdot + 1) - f$ montre que $L(f)$ est de classe C^{k+1} . L'identité $f = L(f)/\lambda$ entraîne alors que f est de classe C^{k+1} . Une récurrence sur k , initialisée par la continuité, donne $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Pour une fonction u de classe C^1 , le théorème fondamental donne

$$L(u')(x) = \int_x^{x+1} u'(t) dt = u(x+1) - u(x) = (L(u))'(x).$$

En prenant $u = f$, puis en différenciant $L(f) = \lambda f$, on obtient $L(f') = \lambda f'$. En réappliquant cette identité à chaque dérivée, toutes de classe C^1 , on établit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad L(f^{(k)}) = \lambda f^{(k)}.$$

Chaque dérivée appartient donc à E_λ . Une dérivée peut être nulle; elle appartient alors encore à l'espace propre, sans être elle-même une fonction propre non nulle.

IV.3.a)

Pour $\omega \neq 0$, on calcule directement

$$L(e^{\omega \cdot})(x) = \int_x^{x+1} e^{\omega t} dt = \frac{e^{\omega(x+1)} - e^{\omega x}}{\omega} = \frac{e^\omega - 1}{\omega} e^{\omega x}.$$

Pour $\omega = 0$, la fonction est constante égale à 1 et son image est elle-même. Ces fonctions sont toutes continues et non nulles, donc propres, avec

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} (e^\omega - 1)/\omega & \omega \neq 0, \\ 1 & \omega = 0. \end{cases}$$

IV.3.b)

Méthode 1 — Dérivée et développement limité

Pour $\omega \neq 0$,

$$\lambda'(\omega) = \frac{(\omega - 1)e^\omega + 1}{\omega^2}.$$

Posons $u(\omega) = (\omega - 1)e^\omega + 1$. On a $u'(\omega) = \omega e^\omega$. Ainsi u décroît strictement sur $] -\infty, 0]$, croît strictement sur $[0, +\infty[$ et atteint son minimum $u(0) = 0$ uniquement en 0. Par conséquent, $\lambda'(\omega) > 0$ pour $\omega \neq 0$.

En zéro, le développement $e^\omega = 1 + \omega + \omega^2/2 + o(\omega^2)$ donne

$$\lambda(\omega) = 1 + \frac{\omega}{2} + o(\omega).$$

La fonction est donc continue et dérivable en 0, avec $\lambda'(0) = 1/2$. Elle est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$. Ses limites sont

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \lambda(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \lambda(\omega) = +\infty.$$

La première découle de $e^\omega \rightarrow 0$, la seconde des croissances comparées entre exponentielle et puissance. La fonction reste strictement positive pour tout ω , puisque le numérateur et le dénominateur ont le même signe lorsque $\omega \neq 0$.

Méthode 2 — Comparaison des intégrandes

La formule de IV.3.a équivaut à

$$\lambda(\omega) = \int_0^1 e^{\omega t} dt$$

pour tout ω , y compris 0. Si $\omega_1 < \omega_2$, on a $e^{\omega_1 t} < e^{\omega_2 t}$ pour chaque $t \in]0, 1]$. La différence est continue et strictement positive sur un sous-segment; son intégrale est donc strictement positive. Ainsi $\lambda(\omega_1) < \lambda(\omega_2)$.

Cette preuve donne la stricte croissance sans dérivation sous l'intégrale. La dérivabilité en 0 et les limites sont ensuite obtenues par la formule explicite et le développement en zéro, comme dans la première méthode. Les deux approches distinguent un calcul de signe de dérivée d'une comparaison point par point des fonctions intégrées.

IV.3.c)

La fonction λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec limites 0 et $+\infty$ aux extrémités. Le théorème de la bijection donne donc $\lambda(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Pour tout réel $r > 0$, il existe un unique $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(\omega) = r$. La fonction $x \mapsto e^{\omega x}$ est une fonction propre associée à r . Tous les réels strictement positifs sont donc valeurs propres de L .

Si « positif » inclut 0, cette valeur est également une valeur propre, par IV.2.a. On a bien établi la conclusion pour tous les réels positifs ou nuls, sans affirmer que ce sont les seules valeurs propres possibles.

IV.4)

Supposons qu'une fonction propre non nulle f , associée à $\lambda > 1$, soit bornée. Posons $M = \sup_x |f(x)|$, qui est fini et strictement positif.

Par II.2.a, $\sup_x |L(f)(x)| \leq M$. Mais $L(f) = \lambda f$ donne $\sup_x |L(f)(x)| = \lambda M$. Donc $\lambda M \leq M$, et la division par $M > 0$ impose $\lambda \leq 1$, contradiction.

Ainsi toute fonction propre associée à une valeur propre supérieure à 1 est non bornée. Il n'est pas nécessaire que le supremum de $|f|$ soit atteint.

Partie V — Application aux densités

V.1)

Question adaptée au programme actuel : la seconde intégrale de contrôle est prise de $-\infty$ à 0. Le PDF répète deux fois la même intégrale de 0 à $+\infty$, alors qu'il faut contrôler les deux extrémités.

Puisque f est une densité continue, sa fonction de répartition F est de classe C^1 , avec $F' = f$, et

$$\Phi(x) = F(x+1) - F(x).$$

La fonction Φ est continue et positive ou nulle, puisque F est croissante. Il reste à montrer que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

Méthode 1 — Primitive obtenue en appliquant L à F

Posons $G = L(F)$. Par II.1.a,

$$G'(x) = F(x+1) - F(x) = \Phi(x).$$

La fonction de répartition vérifie $F(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $F(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$. Comme F est continue, on peut lui appliquer II.3.a : $G(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $G(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$.

Pour $R > 0$, le théorème fondamental donne

$$\int_0^R \Phi(t) dt = G(R) - G(0), \quad \int_{-R}^0 \Phi(t) dt = G(0) - G(-R).$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, les deux intégrales impropres convergent, respectivement vers $1 - G(0)$ et $G(0)$. Leur somme est donc 1. Ainsi Φ est bien une densité.

Cette preuve utilise les limites de F , et ne suppose pas que la densité f possède elle-même une limite à l'infini.

Méthode 2 — Convolution avec une loi uniforme

Considérons une variable U uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de X . La variable $-U$ possède la densité égale à 1 sur $[-1, 0]$ et nulle ailleurs. La formule de convolution, applicable à ces deux variables indépendantes à densité, donne une densité de $X - U$:

$$g(x) = \int_{-1}^0 f(x-t) dt = \int_x^{x+1} f(s) ds = \Phi(x).$$

Le dernier changement de variable est affine. Le calcul est une intégrale sur un segment d'une fonction continue, et Φ est elle-même continue. On peut donc choisir Y de même loi que $X - U$, ce qui prouve aussi que Φ est une densité.

La première méthode répond directement au contrôle des intégrales demandé ; la seconde donne une interprétation probabiliste utile pour les moments. Elle utilise la convolution autorisée, sans échange d'intégrales doubles.

V.2)

Comme f est nulle hors de $[a, b]$, Φ est nulle hors de $[a - 1, b]$. Les variables X et Y sont donc presque sûrement bornées et admettent des moments absolus de tous ordres.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment

La fonction Φ est de classe C^1 et vérifie $\Phi(a - 1) = \Phi(b) = 0$. Pour $n \geq 0$, une intégration par parties sur $[a - 1, b]$, avec la primitive $x^{n+1}/(n + 1)$ de x^n , donne

$$E(Y^n) = \int_{a-1}^b x^n \Phi(x) dx = -\frac{1}{n+1} \int_{a-1}^b x^{n+1} \Phi'(x) dx.$$

On remplace $\Phi'(x)$ par $f(x + 1) - f(x)$. Dans le terme contenant $f(x + 1)$, le changement de variable affine $t = x + 1$ donne une intégrale de $(t - 1)^{n+1} f(t)$. Comme f est nulle hors de $[a, b]$, les deux intégrales peuvent être restreintes à cet intervalle. Ainsi,

$$E(Y^n) = \frac{1}{n+1} \int_a^b (t^{n+1} - (t-1)^{n+1}) f(t) dt.$$

La formule du binôme donne

$$t^{n+1} - (t-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} t^k.$$

Il s'agit d'une somme finie, que l'on peut intégrer terme à terme. Le transfert fournit donc

$$E(Y^n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} E(X^k).$$

Méthode 2 — Développement d'une somme de variables indépendantes

Par V.1, Y a la même loi que $X - U$, avec U uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de X .

Pour tout $j \geq 0$, le transfert donne $E(U^j) = \int_0^1 u^j du = 1/(j+1)$.

Le binôme, la linéarité de l'espérance et l'indépendance donnent

$$E(Y^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E(X^k) E(U^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \binom{n}{k} E(X^k).$$

Tous les produits sont intégrables puisque les variables sont bornées. L'identité $\binom{n}{k}/(n-k+1) = \binom{n+1}{k}/(n+1)$ montre que l'on retrouve exactement la formule précédente. Le cas $n = 0$ donne bien $E(Y^0) = E(X^0) = 1$.

Pour les deux premiers moments,

$$E(Y) = E(X) - \frac{1}{2}, \quad E(Y^2) = E(X^2) - E(X) + \frac{1}{3}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = V(X) + \frac{1}{12}.$$

On peut également vérifier directement ces deux résultats avec Y de même loi que $X - U$: $E(U) = 1/2$, $V(U) = 1/12$, et l'indépendance implique $\text{Cov}(X, U) = 0$.

L'approche par intégration conserve le lien avec L ; l'approche probabiliste explique le décalage de moyenne et l'ajout de variance.

V.3)

Méthode 1 — Utilisation de la convolution et contrôle des moments

La représentation en loi de V.1 ne dépend pas de l'hypothèse de support borné : Y a toujours la même loi que $Z = X - U$, avec U uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de X .

Fixons $n \geq 1$. L'hypothèse d'existence de $E(X^n)$ signifie que $E(|X|^n) < +\infty$. Les moments absolus d'ordre inférieur existent aussi, car $|X|^k \leq 1 + |X|^n$ pour $0 \leq k \leq n$.

Comme $0 \leq U \leq 1$ presque sûrement,

$$|Z|^n \leq (|X| + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |X|^k.$$

Le membre de droite admet une espérance finie. Par domination, $E(|Z|^n) < +\infty$; ainsi Y admet bien le moment d'ordre n recherché.

Chaque produit $X^k U^{n-k}$ est également intégrable, puisqu'il est en valeur absolue inférieur à $|X|^k$. L'indépendance de X et U permet donc de factoriser son espérance. En développant le binôme, on retrouve

$$E(Y^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \binom{n}{k} E(X^k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} E(X^k).$$

Le cas $n = 0$ est la normalisation des probabilités. La formule vaut donc pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette preuve n'échange aucune limite avec une intégrale; elle utilise seulement un développement fini et les moments absolus.

Méthode 2 — Extension de l'intégration par parties aux intégrales impropres

Fixons $n \geq 0$. L'hypothèse portant sur tous les moments donne en particulier

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{n+1} f(t) dt < +\infty.$$

Pour $R > 2$, la positivité de f donne

$$R^{n+1}\Phi(R) \leq \int_R^{R+1} t^{n+1} f(t) dt \longrightarrow 0.$$

À gauche, pour $t \in [-R, -R+1]$, $|t| \geq R-1$, donc

$$R^{n+1}\Phi(-R) \leq \left(\frac{R}{R-1}\right)^{n+1} \int_{-R}^{-R+1} |t|^{n+1} f(t) dt \longrightarrow 0.$$

Ces deux limites découlent de la convergence de l'intégrale de $|t|^{n+1} f(t)$, dont les intégrales sur les queues tendent vers zéro. Les termes de bord de l'intégration par parties disparaîtront donc aux deux extrémités.

Par ailleurs,

$$|x|^{n+1} |\Phi'(x)| \leq |x|^{n+1} (f(x+1) + f(x)).$$

Cette majorante est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour le terme décalé, le changement de variable affine $t = x + 1$ donne $\int |t-1|^{n+1} f(t) dt$, fini par la majoration $|t-1|^{n+1} \leq (|t|+1)^{n+1}$ et l'existence des moments absolus jusqu'à l'ordre $n+1$.

On effectue maintenant les intégrations par parties sur $[0, R]$ et sur $[-R, 0]$. Les termes de bord en 0 sont nuls, ceux en $\pm R$ tendent vers zéro, et les intégrales de $x^{n+1} \Phi'$ convergent absolument d'après la majoration précédente. Les intégrales de $x^n \Phi$ sur chacune des deux demi-droites convergent donc. Comme x^n a un signe constant sur chacune de ces demi-droites et que $\Phi \geq 0$, cela établit aussi la convergence absolue de $\int x^n \Phi(x) dx$.

On peut alors réunir les deux identités et passer à la limite :

$$E(Y^n) = -\frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}} x^{n+1} (f(x+1) - f(x)) dx.$$

Les deux intégrales du membre de droite convergent absolument. Après le changement de variable affine dans la première,

$$E(Y^n) = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}} (t^{n+1} - (t-1)^{n+1}) f(t) dt.$$

On développe la différence par le binôme, comme en V.2, et on utilise le transfert pour chaque terme, tous intégrables. Cela redonne la même formule complète.

La seconde preuve prolonge directement le calcul intégral de V.2 en vérifiant les termes de bord. La première est plus économique : pour un ordre n fixé, elle ne requiert que le moment absolu d'ordre n , alors que la seconde utilise aussi celui d'ordre $n+1$, disponible ici par hypothèse.

Relevé des adaptations

- III.2 : code adapté en Python, avec `numpy.cbrt` dont le rôle est précisé dans le sujet afin de calculer la racine cubique réelle, même pour un argument négatif.
- III.2 : précision de l'utilisation des rectangles à gauche et rectification de l'indication numérique 0,425 du PDF. Avec dix subdivisions, le minimum et le maximum approchés sont respectivement 0,357773 et 0,386983, arrondis en 0,358 et 0,387. Les intégrales affinées donnent environ 0,355064 et 0,403067 ; l'énoncé permet d'augmenter le nombre de subdivisions.
- V.1 : rectification des bornes de la seconde intégrale, de $-\infty$ à 0, pour contrôler les deux extrémités et non répéter deux fois la demi-droite positive.