



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1984

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les parties III et IV, indépendantes entre elles, proposent deux autres démonstrations de la formule (3) de II.4.b.

Dans tout le problème, n désigne un entier strictement supérieur à 1. Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on note $I_p = \{0, 1, \dots, p\}$.

Question préliminaire

Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$I(a, b) = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx.$$

- a) Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre $I(a, b)$ et $I(a+1, b-1)$. En déduire $I(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
- b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer une expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{j=0}^b (-1)^j \frac{\binom{b}{j}}{a+j+1}.$$

Partie I

1. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , polynôme nul compris. Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \exists Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt. \quad (1)$$

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = Q$, où Q est donné par (1), est linéaire.

2. Montrer que f est bijective et définir son application réciproque f^{-1} .
3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, ainsi que sa matrice inverse A^{-1} . Ces matrices sont-elles diagonalisables ?
4.
 - a) Soit α une racine réelle de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme non nul $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Est-elle racine de $f^{-1}(Q)$? Si oui, avec quelle multiplicité ? Discuter selon k et selon que $\alpha = 1$ ou $\alpha \neq 1$.
 - b) En déduire les sous-espaces propres de f^{-1} et montrer qu'ils sont également propres pour f .
 - c) Déterminer une matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, et une matrice diagonale D , telles que :

$$D = T^{-1}AT.$$

Déterminer la matrice inverse T^{-1} .

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f^k la composée de k applications f si $k \geq 1$, et f^0 l'application identité. Montrer que le coefficient de X^p , pour $p \in I_n$, dans $f^k(X^n)$ est :

$$\binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \binom{n-p}{j} \frac{1}{(p+j+1)^k}.$$

Partie II

On considère une suite d'épreuves définie comme suit :

- La première épreuve consiste à tirer au hasard un nombre dans I_n .

- Si le nombre p est obtenu à la k -ième épreuve, avec $k \geq 1$, la $(k+1)$ -ième épreuve consiste à tirer au hasard un nombre dans I_p .

Chaque tirage est uniforme dans l'ensemble indiqué. Sa loi conditionnelle, connaissant les résultats précédents, ne dépend que du dernier nombre obtenu.

On convient que n est le résultat de la 0-ième épreuve. Pour $(k, p) \in \mathbb{N} \times I_n$, on note $P_k(p)$ la probabilité d'obtenir p à la k -ième épreuve et :

$$U_k = \begin{pmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \\ \vdots \\ P_k(n) \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, X_k désigne le nombre obtenu à la k -ième épreuve. Ainsi $X_0 = n$ est une variable certaine.

1.

- a)** En remarquant que le résultat de la $(k+1)$ -ième épreuve est conditionné par celui de la k -ième, exprimer $P_{k+1}(p)$ en fonction des $P_k(i)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in I_n$.

- b)** En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k. \quad (2)$$

2.

- a)** Écrire la matrice-ligne B telle que $BU_k = E(X_k)$. Constater que BA s'exprime simplement en fonction de B , puis déduire de (2) une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$. Calculer $E(X_k)$.

- b)** Procéder de façon analogue pour déterminer $E(X_k^2)$, en introduisant la suite $(E(X_k^2) - n/2^k)_{k \in \mathbb{N}}$. En déduire la variance $V(X_k)$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$G_k = \sum_{p=0}^n P_k(p) X^p.$$

Exprimer G_k en fonction de X^n à l'aide de f . En déduire $P_k(p)$ pour tout $(k, p) \in \mathbb{N} \times I_n$.

4.

- a)** Montrer que, pour $p \in I_n \setminus \{0\}$, la série

$$\sum_{k \geq 1} P_k(p)$$

converge. La série

$$\sum_{k \geq 1} P_k(0)$$

est-elle convergente ?

- b)** Utiliser le résultat de la question préliminaire b) pour démontrer :

$$\forall p \in I_n \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p}. \quad (3)$$

Partie III

1. En envisageant les différents résultats de la k -ième épreuve, montrer que, pour $p \in I_{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$, la probabilité d'obtenir pour la première fois p au $(k+1)$ -ième tirage est $P_{k+1}(p+1)$.
2. Pour $p \in I_n$, on note $\alpha(p, n)$ la probabilité de tirer au moins une fois p lorsque les tirages se prolongent indéfiniment, le premier tirage s'effectuant dans I_n . Seuls les tirages d'indices strictement positifs sont comptés dans cette définition.

- a) Que vaut $\alpha(n, n)$?
- b) En tenant compte du résultat obtenu au premier tirage, démontrer :

$$\forall p \in I_{n-1}, \quad (n+1)\alpha(p, n) = 1 + \sum_{k=p+1}^n \alpha(p, k).$$

En déduire $\alpha(n-1, n)$.

- c) Pour $p \in I_{n-2}$, trouver une relation entre $\alpha(p, n)$ et $\alpha(p, n-1)$. En déduire $\alpha(p, n)$.
3. Utiliser les résultats de III.1 et III.2 pour retrouver la formule (3).

Partie IV

1. Soit $d : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $d(P) = P'$. Montrer que :

$$d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f.$$

On pourra considérer $f^{-1} \circ d \circ f$.

2. Montrer que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad f \circ d = \sum_{k=1}^q d \circ f^k + f \circ d \circ f^q.$$

3. Dédurre du calcul de $(f \circ d)(X^n)$ que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad X^n = (X - 1) \left(\sum_{k=1}^q G'_k \right) + G_q. \quad (4)$$

4. Utiliser (4) pour retrouver la formule (3).