



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1984

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Question préliminaire

a) Intégrale et récurrence

Les fonctions intégrées sont polynomiales, donc continues sur $[0, 1]$; toutes les intégrales existent. Pour $b \geq 1$, une intégration par parties avec une primitive $x^{a+1}/(a+1)$ de x^a donne :

$$I(a, b) = \left[\frac{x^{a+1}(1-x)^b}{a+1} \right]_0^1 + \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Le terme aux bornes est nul : en 0, $a+1 \geq 1$; en 1, $b \geq 1$. D'où :

$$I(a, b) = \frac{b}{a+1} I(a+1, b-1).$$

Après b applications de cette relation, on obtient :

$$I(a, b) = \frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)} I(a+b, 0).$$

Or $I(a+b, 0) = 1/(a+b+1)$. Avec la convention du produit vide lorsque $b = 0$, la formule finale est :

$$I(a, b) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \quad ((a, b) \in \mathbb{N}^2).$$

Elle donne notamment $I(a, 0) = 1/(a+1)$ et $I(0, b) = 1/(b+1)$.

b) Somme alternée

La formule du binôme donne

$$(1-x)^b = \sum_{j=0}^b (-1)^j \binom{b}{j} x^j.$$

Puisque la somme est finie, on peut intégrer terme à terme sans difficulté :

$$I(a, b) = \sum_{j=0}^b (-1)^j \binom{b}{j} \int_0^1 x^{a+j} dx = \sum_{j=0}^b (-1)^j \frac{\binom{b}{j}}{a+j+1}.$$

Avec le résultat de a), on obtient :

$$\sum_{j=0}^b (-1)^j \frac{\binom{b}{j}}{a+j+1} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Partie I

1. Existence du polynôme et linéarité

Pour chaque entier j entre 0 et n , la formule d'intégration d'un monôme donne, si $x \neq 1$:

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x t^j dt = \frac{x^{j+1} - 1}{(j+1)(x-1)} = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^j x^p.$$

La dernière égalité vient de l'identité polynomiale $X^{j+1} - 1 = (X-1)(1 + X + \dots + X^j)$.

Si

$$P = \sum_{j=0}^n a_j X^j,$$

il suffit donc de poser :

$$Q = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} \sum_{p=0}^j X^p.$$

Ce polynôme a un degré inférieur ou égal à n et vérifie (1). Il est unique : deux polynômes vérifiant (1) ont une différence nulle pour tous les réels sauf éventuellement 1 ; un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

L'expression de Q dépend linéairement des coefficients de P . Ainsi, pour tous polynômes P, R et tous réels α, β :

$$f(\alpha P + \beta R) = \alpha f(P) + \beta f(R).$$

L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On retiendra :

$$f(X^j) = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^j X^p.$$

2. Inverse de l'application

Si $Q = f(P)$, la relation (1) s'écrit :

$$(x-1)Q(x) = \int_1^x P(t) dt.$$

Elle est également vraie en $x = 1$, où les deux membres valent zéro. En dérivant cette identité, grâce au théorème fondamental du calcul intégral :

$$P(x) = Q(x) + (x-1)Q'(x).$$

Définissons donc $g(Q) = Q + (X-1)Q'$. Le degré de $g(Q)$ est inférieur ou égal à celui de Q , donc g prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. L'identité précédente montre $g \circ f = \text{Id}$.

Réciproquement, pour un polynôme Q , on a $g(Q)(t) = ((t-1)Q(t))'$. Par intégration sur le segment entre 1 et x , avec l'orientation usuelle si $x < 1$:

$$\int_1^x g(Q)(t) dt = (x-1)Q(x).$$

Pour $x \neq 1$, cela implique $f(g(Q))(x) = Q(x)$; l'unicité polynomiale étend l'égalité à tout x . Donc $f \circ g = \text{Id}$ également. L'application f est bijective et :

$$f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q'.$$

3. Matrices et diagonalisation

Indexons les lignes et les colonnes par $p, j \in \{0, \dots, n\}$, l'indice p correspondant à X^p .

D'après 1 :

$$A_{p+1,j+1} = \begin{cases} \frac{1}{j+1} & \text{si } 0 \leq p \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si } p > j. \end{cases}$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour l'inverse, $f^{-1}(1) = 1$, et, pour $j \geq 1$:

$$f^{-1}(X^j) = X^j + j(X-1)X^{j-1} = (j+1)X^j - jX^{j-1}.$$

Par conséquent :

$$(A^{-1})_{p+1,j+1} = \begin{cases} j+1 & \text{si } p = j, \\ -j & \text{si } p = j-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit de la matrice à diagonale $1, 2, \dots, n+1$ et à première diagonale supérieure $-1, -2, \dots, -n$, tous les autres coefficients étant nuls.

Les deux matrices sont triangulaires réelles. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux : celles de A sont $1, 1/2, \dots, 1/(n+1)$; celles de A^{-1} sont $1, 2, \dots, n+1$. Dans chaque cas, les $n+1$ valeurs sont distinctes. Le critère de diagonalisation par l'existence de $n+1$ valeurs propres réelles distinctes s'applique. Les deux matrices sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

4.

a) Multiplicité d'une racine réelle

Question adaptée au programme actuel : on considère uniquement une racine réelle α et un polynôme non nul.

Écrivons $Q = (X - \alpha)^k R$, où $k \geq 1$ et $R(\alpha) \neq 0$. Avec la formule de 2 :

$$f^{-1}(Q) = (X - \alpha)^{k-1} [k(X - \alpha)R + (X - \alpha)R' + (X - \alpha)^2 R''].$$

Si $\alpha \neq 1$, le polynôme entre crochets vaut $k(\alpha - 1)R(\alpha) \neq 0$ en α . L'ordre exact d'annulation est donc $k - 1$. En particulier, pour $k = 1$, α n'est plus une racine ; pour $k \geq 2$, c'est une racine de multiplicité $k - 1$.

Si $\alpha = 1$, on peut factoriser un facteur supplémentaire :

$$f^{-1}(Q) = (X - 1)^k [(k + 1)R + (X - 1)R'].$$

Le facteur entre crochets vaut $(k + 1)R(1) \neq 0$ en 1. La multiplicité est donc conservée et vaut k .

b) Sous-espaces propres

Pour déterminer les vecteurs propres sans utiliser de factorisation en racines non réelles, étudions l'ordre d'annulation au point 1.

Méthode 1 — Multiplicité en 1

Soit $Q \neq 0$ et supposons $f^{-1}(Q) = \lambda Q$. Il existe un unique entier $m \geq 0$ et un polynôme R tels que $Q = (X - 1)^m R$ et $R(1) \neq 0$. Le cas $m = 0$ inclut les polynômes ne s'annulant pas en 1.

Un calcul comme en 4.a donne :

$$f^{-1}(Q) = (X - 1)^m [(m + 1)R + (X - 1)R'].$$

L'équation propre entraîne donc $(m + 1)R + (X - 1)R' = \lambda R$. L'évaluation en 1 donne $\lambda = m + 1$, puisque $R(1) \neq 0$. Il reste alors $(X - 1)R' = 0$ comme identité polynomiale. Cela impose $R' = 0$, donc R est un polynôme constant non nul.

Réciproquement, $f^{-1}((X - 1)^m) = (m + 1)(X - 1)^m$. Ainsi, pour chaque $m \in I_n$:

$$E_{m+1}(f^{-1}) = \text{Vect}((X - 1)^m),$$

et il n'y a pas d'autre valeur propre. Les valeurs $m + 1$ étant non nulles, appliquer f à l'équation propre donne :

$$f((X - 1)^m) = \frac{1}{m + 1}(X - 1)^m.$$

Les mêmes droites sont donc les sous-espaces propres de f , pour les valeurs propres réciproques :

$$E_{1/(m+1)}(f) = \text{Vect}((X - 1)^m).$$

Méthode 2 — Coefficients dans la base centrée en 1

La famille $(1, X - 1, \dots, (X - 1)^n)$ est une base : ses polynômes ont des degrés successifs et des coefficients dominants égaux à 1. Si

$$Q = \sum_{m=0}^n a_m (X - 1)^m,$$

alors :

$$f^{-1}(Q) = \sum_{m=0}^n (m+1)a_m(X-1)^m.$$

L'égalité $f^{-1}(Q) = \lambda Q$ équivaut à $(m+1-\lambda)a_m = 0$ pour tout m . Pour un vecteur propre non nul, au moins un coefficient est non nul. Les nombres $m+1$ étant distincts, un seul indice peut avoir un coefficient non nul. On retrouve donc exactement les droites précédentes, et les valeurs propres de f par inversion.

La première méthode exploite la multiplicité demandée en 4.a ; la seconde rend explicite la base qui diagonalise les deux applications.

c) Matrices de passage

Prenons pour nouvelle base $\mathcal{C} = (1, X-1, \dots, (X-1)^n)$. La colonne $j+1$ de la matrice de passage T est constituée des coefficients de $(X-1)^j$ dans la base canonique. Le binôme donne :

$$T_{p+1,j+1} = \begin{cases} (-1)^{j-p} \binom{j}{p} & \text{si } p \leq j, \\ 0 & \text{si } p > j. \end{cases}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure à diagonale égale à 1 ; elle est donc inversible. Dans la base $\mathcal{C}$, l'application f est diagonale d'après 4.b, d'où :

$$D = T^{-1}AT = \text{diag} \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1} \right).$$

Pour calculer T^{-1} , écrivons les éléments de l'ancienne base dans la nouvelle. Le binôme donne :

$$X^j = (1 + (X-1))^j = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (X-1)^p.$$

Ainsi :

$$(T^{-1})_{p+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{p} & \text{si } p \leq j, \\ 0 & \text{si } p > j. \end{cases}$$

Les deux identités de développement expriment des changements de coordonnées réciproques ; elles justifient bien qu'il s'agit de l'inverse de T .

5. Itérées et coefficients

Développons d'abord X^n dans la base propre :

$$X^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (X-1)^j.$$

Puisque $f((X-1)^j) = (X-1)^j/(j+1)$, une récurrence sur k donne, pour chaque $k \geq 0$:

$$f^k(X^n) = \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{j}}{(j+1)^k} (X-1)^j.$$

Le coefficient de X^p dans $(X-1)^j$ vaut zéro si $j < p$ et $(-1)^{j-p} \binom{j}{p}$ si $j \geq p$. Le coefficient recherché est donc :

$$\sum_{j=p}^n (-1)^{j-p} \frac{\binom{n}{j} \binom{j}{p}}{(j+1)^k}.$$

Pour $p \leq j \leq n$, l'identité obtenue directement en développant les factorielles est

$\binom{n}{j}\binom{j}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{j-p}$. En posant $h = j - p$, on obtient :

$$\binom{n}{p} \sum_{h=0}^{n-p} (-1)^h \binom{n-p}{h} \frac{1}{(p+h+1)^k}.$$

C'est l'expression demandée. Pour $k = 0$, la somme vaut $(1 - 1)^{n-p}$ si $p < n$, donc zéro, et vaut 1 si $p = n$, où elle comporte un seul terme. On retrouve les coefficients du polynôme X^n , sans recourir à une convention ambiguë pour une puissance nulle de zéro.

Partie II

Tous les X_k prennent leurs valeurs dans l'ensemble fini I_n . Leurs espérances et leurs moments d'ordre deux existent donc. Les tirages sont uniformes conditionnellement au nombre courant, selon le mécanisme du sujet.

1.

a) Récurrence des probabilités

Conditionnellement à $X_k = i$, le tirage suivant est uniforme sur $\{0, \dots, i\}$. Par conséquent :

$$P(X_{k+1} = p \mid X_k = i) = \begin{cases} \frac{1}{i+1} & \text{si } p \leq i, \\ 0 & \text{si } p > i. \end{cases}$$

La formule des probabilités totales, appliquée au système complet des valeurs possibles de X_k , donne :

$$P_{k+1}(p) = \sum_{i=p}^n \frac{P_k(i)}{i+1} \quad (k \geq 0, p \in I_n).$$

Si une valeur i a une probabilité nulle, sa contribution est simplement nulle ; la formule décrit le mécanisme de transition sans nécessiter un conditionnement sur cet événement nul.

b) Écriture matricielle

D'après I.3, le coefficient de ligne $p + 1$ et de colonne $i + 1$ de A est $1/(i + 1)$ si $p \leq i$, et zéro sinon. La relation de 1.a est donc exactement la relation matricielle :

$$U_{k+1} = AU_k.$$

Le vecteur initial est $U_0 = (0, \dots, 0, 1)^t$ puisque $X_0 = n$. En particulier $U_k = A^k U_0$ pour tout $k \geq 0$.

2.

a) Espérance

La matrice-ligne recherchée est $B = (0, 1, 2, \dots, n)$, car

$$BU_k = \sum_{p=0}^n pP_k(p) = E(X_k).$$

Pour la colonne $i + 1$, le produit BA donne :

$$(BA)_{i+1} = \frac{1}{i+1} \sum_{p=0}^i p = \frac{1}{i+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i}{2}.$$

Ainsi $BA = B/2$. Avec $U_{k+1} = AU_k$:

$$E(X_{k+1}) = BU_{k+1} = BAU_k = \frac{1}{2}E(X_k).$$

Comme $E(X_0) = n$, la suite est géométrique :

$$E(X_k) = \frac{n}{2^k} \quad (k \geq 0).$$

b) Moment d'ordre deux et variance

Posons $C = (0, 1, 4, \dots, n^2)$, de sorte que $CU_k = E(X_k^2)$.

Rappelons et justifions la somme des carrés nécessaire. En sommant l'identité $(j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1$ pour $0 \leq j \leq i$, on obtient :

$$(i+1)^3 = 3 \sum_{j=0}^i j^2 + 3 \frac{i(i+1)}{2} + (i+1).$$

En isolant la somme et en simplifiant :

$$\sum_{j=0}^i j^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}.$$

La colonne $i+1$ de CA vaut donc :

$$(CA)_{i+1} = \frac{1}{i+1} \sum_{p=0}^i p^2 = \frac{i(2i+1)}{6} = \frac{i^2}{3} + \frac{i}{6}.$$

Ainsi $CA = C/3 + B/6$. Pour $s_k = E(X_k^2)$, on obtient :

$$s_{k+1} = \frac{1}{3}s_k + \frac{1}{6} \frac{n}{2^k}.$$

Suivons l'indication en posant $t_k = s_k - n/2^k$. Alors :

$$t_{k+1} = \frac{1}{3}s_k + \frac{n}{6 \cdot 2^k} - \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{1}{3} \left(s_k - \frac{n}{2^k} \right) = \frac{1}{3}t_k.$$

Comme $s_0 = n^2$, on a $t_0 = n^2 - n$. D'où :

$$E(X_k^2) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k}.$$

La formule de Koenig-Huygens, applicable puisque les moments sont finis, donne :

$$V(X_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.$$

Pour $k = 0$, cette expression vaut zéro, comme attendu pour la variable certaine $X_0 = n$.

3. Polynômes des probabilités et loi explicite

Par linéarité de f et par I.1, le coefficient de X^p dans $f(G_k)$ est :

$$\sum_{i=p}^n \frac{P_k(i)}{i+1} = P_{k+1}(p).$$

Donc $G_{k+1} = f(G_k)$. Le polynôme initial est $G_0 = X^n$. Une récurrence donne :

$$G_k = f^k(X^n).$$

La formule de I.5 fournit alors la loi exacte :

$$P_k(p) = \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \binom{n-p}{j} \frac{1}{(p+j+1)^k} \quad (k \geq 0, p \in I_n).$$

Pour $k = 0$, elle retrouve la loi certaine initiale, conformément au cas limite traité en I.5.

Pour $k = 1$, le tirage est uniforme, donc $P_1(p) = 1/(n+1)$; cela est également conforme à la formule et à la question préliminaire.

Le polynôme G_k rassemble des probabilités, et

$$G_k(1) = \sum_{p=0}^n P_k(p) = 1.$$

Les éventuels signes alternés de la formule explicite ne changent pas la positivité des probabilités, déjà établie par la construction des tirages.

4.

a) Convergence des séries de visites

Méthode 1 — Majorations par l'espérance

Pour $p \geq 1$, l'événement $\{X_k = p\}$ est inclus dans $\{X_k \geq p\}$. L'inégalité de Markov, appliquée à la variable positive X_k d'espérance finie, donne :

$$0 \leq P_k(p) \leq P(X_k \geq p) \leq \frac{E(X_k)}{p} = \frac{n}{p 2^k}.$$

La série géométrique de droite converge ; par comparaison,

$$\sum_{k \geq 1} P_k(p)$$

converge.

Pour $p = 0$, comme X_k est entière positive ou nulle :

$$0 \leq 1 - P_k(0) = P(X_k \geq 1) \leq E(X_k) = \frac{n}{2^k} \rightarrow 0.$$

Donc $P_k(0) \rightarrow 1$. La série

$$\sum_{k \geq 1} P_k(0)$$

diverge vers $+\infty$, puisque ses termes ne tendent pas vers zéro et sont positifs.

Méthode 2 — Formule spectrale finie

Pour $p \geq 1$, la formule de 3 est une combinaison finie de suites géométriques de raisons $1/(p+j+1) \leq 1/2$. En prenant la valeur absolue de chaque terme :

$$|P_k(p)| \leq \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} \binom{n-p}{j} \frac{1}{(p+j+1)^k}.$$

Chaque série en k du membre de droite converge, et il n'y a qu'un nombre fini de termes. La série des $P_k(p)$ converge donc absolument.

Pour $p = 0$, le terme $j = 0$ de la formule vaut 1, tandis que tous les termes $j \geq 1$ tendent vers zéro. On retrouve $P_k(0) \rightarrow 1$, puis la divergence de la série correspondante. La première méthode donne une borne probabiliste sans utiliser la diagonalisation ; la seconde exploite la décomposition explicite.

b) Première démonstration de la somme des visites

Fixons $p \in \{1, \dots, n\}$. La somme sur j dans l'expression de $P_k(p)$ est finie, et chaque série géométrique en k est convergente. On peut donc sommer cette combinaison finie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \binom{n-p}{j} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+j+1)^k}.$$

Comme $p+j+1 \geq 2$, la somme géométrique intérieure est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+j+1)^k} = \frac{1}{p+j}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \frac{\binom{n-p}{j}}{p+j}.$$

Appliquons la question préliminaire b) avec $a = p-1 \geq 0$ et $b = n-p \geq 0$. Elle donne :

$$\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \frac{\binom{n-p}{j}}{p+j} = \frac{(p-1)!(n-p)!}{n!}.$$

En multipliant par $\binom{n}{p} = n!/(p!(n-p)!)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p}.$$

Le cas $p = n$ est inclus : il s'agit alors de la somme de la suite $P_k(n) = (n+1)^{-k}$ pour $k \geq 1$.

Partie III

Les tirages ne peuvent qu'abaisser ou conserver le nombre courant : $X_{k+1} \leq X_k$ à chaque étape. Cette propriété permettra de reconnaître les événements de première visite.

1. Probabilité d'une première visite

Fixons $p \leq n-1$. L'événement « atteindre p pour la première fois au tirage $k+1$ » se réalise exactement lorsque $X_k > p$ et $X_{k+1} = p$.

En effet, si $X_k > p$, aucun tirage antérieur ne pouvait avoir été égal à p , car la suite des résultats est décroissante au sens large. À l'inverse, si p n'a pas encore été atteint mais l'est au tirage suivant, le nombre courant est nécessairement strictement supérieur à p .

En conditionnant sur $X_k = i$, la probabilité de cette première visite est donc :

$$\sum_{i=p+1}^n \frac{P_k(i)}{i+1}.$$

D'après II.1.a, cette somme est précisément $P_{k+1}(p+1)$. La formule reste vraie pour $k=0$, puisque $X_0 = n > p$ et que le premier tirage est uniforme.

2.

a) Atteindre le nombre initial

La convention $X_0 = n$ ne constitue pas un tirage dans la définition de α . Pour obtenir n au moins une fois lors d'un tirage positif, il faut que le premier tirage soit n : s'il donne une valeur strictement plus petite, la suite ne peut jamais remonter à n .

Ainsi :

$$\alpha(n, n) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n+1}.$$

b) Conditionnement au premier tirage

Fixons $p < n$ et conditionnons sur le résultat i du premier tirage, uniforme sur I_n .

Si $i < p$, atteindre p ensuite est impossible. Si $i = p$, l'objectif est déjà atteint. Si $i > p$, les tirages suivants suivent le même mécanisme en partant de i , et la probabilité de parvenir un jour à p est $\alpha(p, i)$.

Pour justifier ce dernier point sans supposer un résultat abstrait sur les processus, on peut d'abord considérer l'événement d'atteindre p dans les N tirages suivants. Sa probabilité conditionnelle est celle du même mécanisme commencé dans I_i . Puis on fait tendre N vers l'infini en utilisant la continuité monotone des probabilités.

La formule des probabilités totales donne donc :

$$\alpha(p, n) = \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{i=p+1}^n \alpha(p, i) \right).$$

C'est la relation demandée. Pour $p = n - 1$, la somme ne contient que $\alpha(n - 1, n)$, donc :

$$(n+1)\alpha(n-1, n) = 1 + \alpha(n-1, n),$$

ce qui donne $\alpha(n-1, n) = 1/n$.

c) Indépendance à l'égard de la borne initiale

Pour $p \leq n - 2$, isolons dans la relation de b) le terme correspondant à $i = n$:

$$n\alpha(p, n) = 1 + \sum_{i=p+1}^{n-1} \alpha(p, i).$$

La même relation, appliquée à une borne initiale $n - 1$, donne :

$$n\alpha(p, n - 1) = 1 + \sum_{i=p+1}^{n-1} \alpha(p, i).$$

Ainsi $\alpha(p, n) = \alpha(p, n - 1)$. Pour p fixé, on peut répéter jusqu'à la borne initiale $p + 1$. Le résultat de b) à cette borne donne $\alpha(p, p + 1) = 1/(p + 1)$. Par conséquent :

$$\alpha(p, n) = \frac{1}{p + 1} \quad (0 \leq p < n).$$

Le cas $p = n$ trouvé en a) a la même expression. On peut donc écrire, pour tous les indices concernés :

$$\alpha(p, n) = \frac{1}{p + 1}.$$

En particulier $\alpha(0, n) = 1$: le nombre zéro est atteint presque sûrement. Les mécanismes avec une borne initiale plus petite, nécessaires au conditionnement, sont définis par la même règle uniforme, y compris lorsqu'elle vaut 1.

3. Deuxième démonstration de la somme des visites

Fixons $p \in \{1, \dots, n\}$ et appliquons III.1 au nombre $p - 1$. Les événements « première visite de $p - 1$ au tirage $k + 1$ », pour $k \geq 0$, sont deux à deux disjoints. Leur réunion est l'événement d'atteindre au moins une fois $p - 1$.

La somme de leurs probabilités vaut donc $\alpha(p - 1, n)$. Chacune de ces probabilités est $P_{k+1}(p)$ d'après III.1. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \alpha(p - 1, n) = \frac{1}{p}.$$

Cette démonstration utilise les premières visites et le conditionnement, sans calculer la loi explicite des X_k .

Partie IV

Toutes les égalités d'applications de cette partie sont des égalités entre endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. L'ordre des compositions est conservé ; ces applications ne sont pas supposées commuter.

1. Identité entre dérivation et opérateur

Suivons l'indication. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, posons $Q = f(P)$, de sorte que $P = Q + (X - 1)Q'$ d'après I.2. En dérivant :

$$P' = 2Q' + (X - 1)Q''.$$

Or :

$$f^{-1}(Q') = Q' + (X - 1)Q'' = P' - Q'.$$

Puisque $Q' = d(f(P))$, cela donne :

$$f^{-1} \circ d \circ f = d - d \circ f.$$

Composons à gauche par f , dont l'inversibilité est établie :

$$d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f.$$

L'identité vaut aussi pour les polynômes constants, où toutes les dérivées concernées sont nulles.

2. Identité itérée

La relation de IV.1 se réécrit :

$$d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f.$$

En composant à droite par f^{k-1} , pour $k \geq 1$, on obtient :

$$d \circ f^k = f \circ d \circ f^{k-1} - f \circ d \circ f^k.$$

Sommons pour $k = 1, \dots, q$. La somme est finie et télescopique :

$$\sum_{k=1}^q d \circ f^k = f \circ d - f \circ d \circ f^q.$$

En réarrangeant les termes :

$$f \circ d = \sum_{k=1}^q d \circ f^k + f \circ d \circ f^q.$$

L'égalité est démontrée pour tout $q \geq 1$, sans intervertir l'ordre des applications.

3. Identité polynomiale sur les probabilités

Calculons d'abord :

$$(f \circ d)(X^n) = f(nX^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} X^j.$$

En particulier :

$$(X - 1)(f \circ d)(X^n) = X^n - 1.$$

Appliquons l'identité de IV.2 au polynôme X^n . Comme $f^k(X^n) = G_k$ d'après II.3, on obtient :

$$(f \circ d)(X^n) = \sum_{k=1}^q G'_k + f(G'_q).$$

Pour un polynôme R , la définition de f donne l'identité polynomiale

$(X - 1)f(R) = \int_1^X R(t) dt$. En particulier, le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$(X - 1)f(G'_q) = G_q(X) - G_q(1).$$

Or $G_q(1) = 1$, puisque ses coefficients sont les probabilités d'une loi sur I_n . En multipliant l'identité précédente par $X - 1$, on trouve :

$$X^n - 1 = (X - 1) \sum_{k=1}^q G'_k + G_q - 1.$$

Ainsi :

$$X^n = (X - 1) \left(\sum_{k=1}^q G'_k \right) + G_q.$$

Cette égalité est une identité de polynômes, donc elle vaut également en $X = 1$; aucune division par $X - 1$ n'est nécessaire dans cette preuve.

4. Troisième démonstration de la somme des visites

Pour $1 \leq p \leq n$, notons

$$S_q(p) = \sum_{k=1}^q P_k(p).$$

La convergence de II.4.a est établie indépendamment de la valeur finale recherchée.

Posons donc $S(p) = \lim_{q \rightarrow +\infty} S_q(p)$, réel fini.

Les dérivées des polynômes G_k donnent :

$$\sum_{k=1}^q G'_k = \sum_{p=1}^n p S_q(p) X^{p-1}.$$

De plus, II.4.a montre $P_q(0) \rightarrow 1$ et, pour $p \geq 1$, $0 \leq P_q(p) \leq n/(p 2^q) \rightarrow 0$. Ainsi les coefficients de G_q tendent vers ceux du polynôme constant 1.

Les degrés sont tous bornés par n : on peut passer à la limite dans chacune des égalités de coefficients de (4), ou dans les sommes finies pour tout réel x . Cela donne :

$$X^n = (X - 1) \sum_{p=1}^n pS(p)X^{p-1} + 1.$$

Comme

$$X^n - 1 = (X - 1) \sum_{j=0}^{n-1} X^j,$$

on obtient :

$$(X - 1) \left(\sum_{p=1}^n pS(p)X^{p-1} - \sum_{j=0}^{n-1} X^j \right) = 0.$$

Une identité polynomiale de cette forme impose la nullité du facteur entre parenthèses. L'unicité des coefficients donne alors $pS(p) = 1$ pour chaque $1 \leq p \leq n$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = S(p) = \frac{1}{p}.$$

Cette troisième preuve utilise uniquement l'identité entre f et la dérivation, les polynômes G_k et la convergence des séries déjà établie en II.4.a. Elle ne suppose ni II.4.b ni les résultats de la partie III.

Relevé des adaptations

- I.4.a : la racine étudiée est réelle et le polynôme est explicitement non nul, afin que sa multiplicité soit définie. Le calcul local est conservé ; la recherche des sous-espaces

propres en I.4.b s'effectue entièrement sur les polynômes réels, par étude en 1 ou développement dans la base centrée en 1.

- II, préambule : la signification du tirage « au hasard » est précisée par l'uniformité et par la dépendance de sa loi conditionnelle au seul dernier résultat. Cela explicite le mécanisme utilisé dans les questions de conditionnement.
- II.4.b : le renvoi « résultat (0) » du PDF est remplacé par le renvoi à la question préliminaire b), qui contient la somme alternée nécessaire.
- III.2, définition : précision que les tirages d'indices strictement positifs sont comptés. La valeur conventionnelle $X_0 = n$ n'est pas un tirage et ne doit pas conduire à $\alpha(n, n) = 1$.

Toutes les questions sont résolues ; aucun résultat n'est laissé admis.