



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1983

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Toutes les variables aléatoires considérées dans le problème sont définies sur le même espace probabilisé. On rappelle que, si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, les deux variables aléatoires $X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$ et X_n sont, pour tout entier $n \geq 2$, indépendantes.

X désignant une variable aléatoire discrète finie, $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la suite finie strictement croissante des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle, et $p_i = P(X = x_i)$ les probabilités attachées à ces valeurs, on note φ_X la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right).$$

On rappelle enfin que X est dite non certaine si $k \geq 2$ et qu'alors sa variance est non nulle.

Pour tout réel t , on pose :

$$C(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad S(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Les propriétés de ces deux fonctions qui seront utilisées doivent être obtenues à partir de leurs expressions exponentielles.

I. Exemple

Soit Z la variable aléatoire discrète telle que $P(Z = -1) = P(Z = 1) = \frac{1}{2}$.

I. (1) Écrire $\varphi_Z(t)$ pour $t \neq 0$ et déterminer $\varphi_Z(0)$.

I. (2) Montrer que φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$; déterminer $\varphi'_Z(0)$ et $\varphi'_Z(t)$ pour $t \neq 0$.

I. (3) Étudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2 \varphi'_Z(t)$.

En déduire les variations de φ_Z . Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_Z(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t)$.

Tracer la courbe représentative de φ_Z .

II. Cas général : X variable aléatoire discrète finie non certaine

II. (1) Déterminer $\varphi_X(0)$ et le développement limité à l'ordre 1 à l'origine de φ_X en fonction de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$. La fonction φ_X est-elle dérivable à l'origine ?

II. (2) a. Montrer que :

$$\forall z > 0, \quad \forall \alpha \in]0, 1[, \quad z^\alpha \leq 1 + \alpha(z - 1). \quad (1)$$

On pourra, par exemple, utiliser la formule de Taylor. Dans quel cas a-t-on égalité ?

II. (2) b. Soient t_1, t_2 deux nombres réels tels que $0 < t_1 < t_2$. On pose $\alpha = t_1/t_2$ et $z_i = e^{t_2[x_i - \varphi_X(t_2)]}$.

Écrire l'inégalité (1) pour tout z_i , avec $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, pour démontrer que $\varphi_X(t_1) < \varphi_X(t_2)$.

II. (2) c. Étudier les variations de φ_X sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser φ_{-X} .

II. (3) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_X(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_X(t)$. Tracer la courbe représentative de φ_X en faisant apparaître les propriétés déduites de l'étude.

III. Étude de l'application $X \mapsto \varphi_X$

III. (1) Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, comparer φ_{X+a} et φ_{aX} à φ_X .

III. (2) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

III. (3) a. Démontrer, par récurrence sur n , que, si $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels, la famille de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = e^{\alpha_n t}$ est libre. Cela signifie que toute sous-famille finie est libre.

III. (3) b. En déduire que, si X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes finies, $\varphi_X = \varphi_Y$ si et seulement si X et Y ont la même loi de probabilité.

III. (4) Caractériser les variables aléatoires discrètes finies X telles que φ_X soit impaire.

III. (5) Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0, \quad e^{at} P(X \geq a) \leq e^{t\varphi_X(t)}.$$

III. (6) Démontrer que la fonction φ_{U_N} associée à la variable aléatoire discrète uniforme U_N définie, pour un entier $N \geq 1$, par :

$$P(U_N = 0) = P(U_N = 1) = \dots = P(U_N = N - 1) = \frac{1}{N}$$

est telle que :

$$\forall t \neq 0, \quad \varphi_{U_N}(t) = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(Nt/2)}{NS(t/2)} \right).$$

Retrouver ainsi $E(U_N)$ et $V(U_N)$.

Écrire $\varphi_{a+rU_N}(t)$ pour a, t réels et r réel non nul.

IV. Sommes pondérées de variables aléatoires indépendantes

Dans ce paragraphe, on donne une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$, qui, sauf en IV. (4), suivent la même loi que la variable Z définie en I, et une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels strictement positifs. On note, pour tout entier $n \geq 1$:

$$Y_n = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \cdots + u_n X_n.$$

IV. (1) On suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

IV. (1) a. Montrer, en utilisant III. (5), que :

$$\forall a > 0, \quad P(|Y_n| \geq a) \leq 2M_n(a),$$

où :

$$M_n(a) = \inf_{t \geq 0} [e^{-at} C(t)^n].$$

IV. (1) b. Étudier les variations de la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(t) = e^{-at}C(t)^n$.

En déduire la valeur de $M_n(a)$; on distinguera les trois cas $n < a$, $n = a$, $n > a$.

Vérifier par un calcul direct que, si $n \leq a$, on a $P(|Y_n| \geq a) = 2M_n(a)$.

Pour $a > 0$ fixé, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(a)$ et déterminer un équivalent de $M_n(a) - \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

IV. (2) On suppose que $u_n = 2^{-n}$ pour tout $n \geq 1$.

IV. (2) a. Démontrer que, si $t \neq 0$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(t)}{2^n S(t/2^n)} \right).$$

IV. (2) b. En déduire que l'ensemble des valeurs prises par Y_n est :

$$\left\{ \pm \frac{2k-1}{2^n} : k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\} \right\},$$

et donner la probabilité attachée à chacune de ces valeurs. Comparer φ_{Y_n} et φ_{a+rU_N} obtenue en III. (6).

En revenant à la définition de φ_{Y_n} , démontrer que, pour $t \neq 0$:

$$\frac{S(t)}{2^n S(t/2^n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} C\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

Préciser le prolongement de cette identité en $t = 0$.

IV. (2) c. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t)$.

IV. (2) d. Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire discrète finie T telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_T(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t).$$

IV. (3) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est quelconque, à termes strictement positifs.

Montrer que la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n \geq 1}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n^2$$

converge.

IV. (4) Les notations restant celles de IV, on suppose que les variables aléatoires mutuellement indépendantes X_n suivent désormais la même loi qu'une variable aléatoire discrète finie non certaine X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et que $u_n \rightarrow 0$.

IV. (4) a. Démontrer que, si $E(X) \neq 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n \geq 1}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

IV. (4) b. Démontrer que, si $E(X) = 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n \geq 1}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n^2$$

converge.

IV. (4) c. Dans le cas où $u_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$, démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série :

$$\sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{n} \varphi_X \left(\frac{t}{n} \right) + E(X) \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \right]$$

converge. En déduire que la suite $(\varphi_{Y_n}(t) - E(X) \ln n)_{n \geq 1}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.