



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1983

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

Pour une variable aléatoire discrète finie X , posons :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t}, \quad L_X(t) = \ln M_X(t).$$

Toutes les sommes et tous les moments employés sont finis. Comme $p_i > 0$, $M_X(t) > 0$ pour tout réel t . Les fonctions M_X et L_X sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a $\varphi_X(t) = L_X(t)/t$ pour $t \neq 0$. La valeur en 0 sera obtenue par continuité.

Les fonctions C et S sont définies dans le sujet par des exponentielles. Une dérivation et un développement algébrique donnent :

$$C'(t) = S(t), \quad S'(t) = C(t), \quad C(t)^2 - S(t)^2 = 1.$$

La fonction C est paire, strictement positive et vérifie $C(t) \geq 1$, avec égalité seulement en $t = 0$. En effet, $2(C(t) - 1) = (e^{t/2} - e^{-t/2})^2$. La fonction S est impaire, strictement croissante puisque $S' = C > 0$, et ne s'annule qu'en 0.

Ces propriétés sont obtenues à partir de l'exponentielle ; aucune formule extérieure concernant des fonctions hyperboliques n'est supposée connue.

I. Exemple

I. (1) Expression et valeur en zéro

La loi de Z donne :

$$M_Z(t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = C(t).$$

Donc, pour $t \neq 0$:

$$\varphi_Z(t) = \frac{\ln C(t)}{t}.$$

La fonction $L_Z = \ln C$ est dérivable, $L_Z(0) = 0$ et $L'_Z(0) = S(0)/C(0) = 0$. Par définition de sa dérivée à l'origine, $L_Z(t)/t \rightarrow 0$. Le prolongement continu est donc :

$$\varphi_Z(0) = 0.$$

I. (2) Dérivabilité

Pour $t \neq 0$, les règles de dérivation donnent :

$$\varphi'_Z(t) = \frac{tS(t)/C(t) - \ln C(t)}{t^2}.$$

Il reste à traiter $t = 0$, où cette expression contient un dénominateur nul. Posons $D(t) = S(t)/C(t)$. L'identité $C^2 - S^2 = 1$ donne :

$$D'(t) = \frac{C(t)^2 - S(t)^2}{C(t)^2} = \frac{1}{C(t)^2}.$$

Ainsi $L'_Z(0) = 0$, $L''_Z(0) = 1$ et $L'''_Z(0) = -2S(0)/C(0)^3 = 0$. La fonction L_Z étant de classe C^4 au voisinage de 0, Taylor avec une dérivée quatrième bornée donne directement :

$$L_Z(t) = \frac{t^2}{2} + O(t^4).$$

On applique ici Taylor à L_Z elle-même, sans composer des développements limités. Après division par $t \neq 0$:

$$\varphi_Z(t) = \frac{t}{2} + O(t^3).$$

Puisque $\varphi_Z(0) = 0$, le quotient $[\varphi_Z(t) - \varphi_Z(0)]/t$ tend vers $1/2$. La fonction est donc dérivable à l'origine et :

$$\varphi'_Z(0) = \frac{1}{2}.$$

Elle est ainsi dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

I. (3) Variations, limites et courbe

Pour $t \neq 0$, $f(t) = tD(t) - \ln C(t)$. En 0, la définition $f(0) = 0^2 \varphi'_Z(0) = 0$ coïncide avec cette dernière expression. Celle-ci définit donc f sur tout $\mathbb{R}$ et permet de dériver :

$$f'(t) = D(t) + tD'(t) - D(t) = \frac{t}{C(t)^2}.$$

La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et atteint son minimum 0 en 0. En particulier $f(t) > 0$ pour $t \neq 0$.

Pour préciser ses limites, lorsque $t > 0$:

$$D(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}, \quad \ln C(t) = t - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2t}).$$

Ainsi :

$$f(t) = \ln 2 - \frac{2te^{-2t}}{1 + e^{-2t}} - \ln(1 + e^{-2t}) \longrightarrow \ln 2.$$

La fonction f est paire, donc sa limite en $-\infty$ est également $\ln 2$.

Comme $\varphi'_Z(t) = f(t)/t^2 > 0$ pour $t \neq 0$ et $\varphi'_Z(0) = 1/2 > 0$, φ_Z est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $t > 0$, l'expression de $\ln C(t)$ ci-dessus donne :

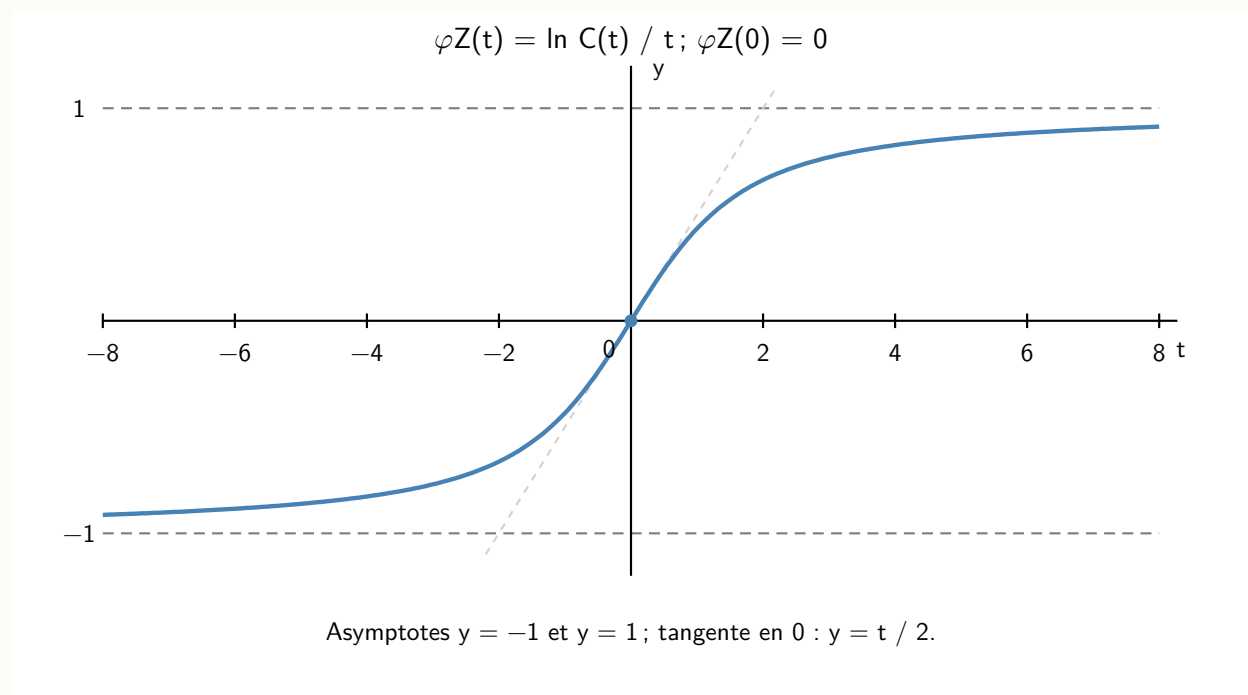
$$\varphi_Z(t) = 1 - \frac{\ln 2}{t} + \frac{\ln(1 + e^{-2t})}{t} \rightarrow 1.$$

Puisque C est paire, φ_Z est impaire, y compris à l'origine. On obtient donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_Z(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t) = -1.$$

La courbe est symétrique par rapport à l'origine, passe par $(0, 0)$, possède la tangente $y = t/2$ en ce point et les asymptotes horizontales $y = -1$ à gauche et $y = 1$ à droite. Pour tout réel t , $-1 < \varphi_Z(t) < 1$.

Le tracé suivant est calculé à partir de la formule exacte de φ_Z ; les pointillés indiquent les asymptotes et la tangente à l'origine.



II. Cas général : X discrète finie non certaine

II. (1) Valeur à l'origine et développement limité

Question adaptée au programme actuel : la mention $\varphi_Z(0)$ de cette question du PDF est rectifiée en $\varphi_X(0)$, conformément à la variable étudiée.

Notons $\mu = E(X)$ et $v = V(X) > 0$. Par dérivation des sommes finies :

$$M_X(0) = 1, \quad M'_X(0) = \sum_i p_i x_i = \mu, \quad M''_X(0) = \sum_i p_i x_i^2 = E(X^2).$$

Les règles de dérivation du logarithme donnent :

$$L'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}, \quad L''_X(t) = \frac{M''_X(t)}{M_X(t)} - \left(\frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \right)^2.$$

Donc $L_X(0) = 0$, $L'_X(0) = \mu$ et $L''_X(0) = E(X^2) - \mu^2 = v$. Comme L_X est de classe C^3 au voisinage de 0, Taylor donne :

$$L_X(t) = \mu t + \frac{v}{2} t^2 + O(t^3).$$

Pour $t \neq 0$, en divisant par t :

$$\varphi_X(t) = \mu + \frac{v}{2} t + O(t^2).$$

On en déduit la valeur du prolongement continu, puis sa dérivée :

$$\varphi_X(0) = E(X), \quad \varphi'_X(0) = \frac{V(X)}{2}.$$

Le développement limité demandé s'écrit donc $\varphi_X(t) = E(X) + \frac{1}{2}V(X)t + o(t)$; nous avons même établi un reste $O(t^2)$ utile en IV. Les mêmes calculs valent pour une variable certaine, avec $v = 0$.

II. (2) a. Inégalité de concavité

Question adaptée au programme actuel : le domaine est rectifié en $z > 0$. Pour un réel négatif, une puissance z^α d'exposant réel arbitraire n'est pas définie dans le cadre réel du programme.

Méthode 1 — Étudier une différence

Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et posons $h(z) = 1 + \alpha(z - 1) - z^\alpha$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est :

$$h'(z) = \alpha(1 - z^{\alpha-1}).$$

Puisque $\alpha - 1 < 0$, cette dérivée est négative pour $0 < z < 1$ et positive pour $z > 1$. La fonction h atteint donc son minimum unique en 1, où $h(1) = 0$. Ainsi :

$$z^\alpha \leq 1 + \alpha(z - 1), \quad \text{avec égalité si et seulement si } z = 1.$$

Méthode 2 — Utiliser la tangente à une fonction concave

La fonction $g(z) = z^\alpha$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $g''(z) = \alpha(\alpha - 1)z^{\alpha-2} < 0$. Elle est strictement concave. Sa courbe se situe au-dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = g(1) + g'(1)(z - 1) = 1 + \alpha(z - 1)$.

Pour justifier aussi la stricte inégalité hors de 1, Taylor-Lagrange sur le segment reliant 1 et $z > 0$ donne, pour un point ξ entre ces deux nombres :

$$g(z) = g(1) + g'(1)(z-1) + \frac{g''(\xi)}{2}(z-1)^2.$$

Si $z \neq 1$, le dernier terme est strictement négatif. On retrouve l'inégalité et son unique cas d'égalité. La première méthode minimise une différence ; la seconde illustre la propriété géométrique des tangentes à une fonction concave.

II. (2) b. Croissance sur les réels strictement positifs

On suit l'indication de l'énoncé. Les nombres z_i sont strictement positifs et $\alpha = t_1/t_2 \in]0, 1[$. Par définition de $\varphi_X(t_2)$:

$$\sum_{i=1}^k p_i z_i = e^{-t_2 \varphi_X(t_2)} \sum_i p_i e^{t_2 x_i} = 1.$$

L'inégalité de a. donne $z_i^\alpha \leq 1 + \alpha(z_i - 1)$. Au moins un des z_i est différent de 1 : sinon tous les x_i seraient égaux à $\varphi_X(t_2)$, ce qui contredirait le caractère non certain de X . Comme chaque $p_i > 0$, en multipliant par p_i et en sommant, on obtient une inégalité stricte :

$$\sum_i p_i z_i^\alpha < \sum_i p_i [1 + \alpha(z_i - 1)] = 1.$$

D'autre part :

$$\sum_i p_i z_i^\alpha = e^{-t_1 \varphi_X(t_2)} \sum_i p_i e^{t_1 x_i} = e^{t_1 [\varphi_X(t_1) - \varphi_X(t_2)]}.$$

L'exponentielle est strictement croissante et $t_1 > 0$; la dernière inégalité implique donc :

$$\varphi_X(t_1) < \varphi_X(t_2).$$

II. (2) c. Croissance sur tout $\mathbb{R}$

Méthode 1 — Utiliser la variable opposée

Pour $t \neq 0$, la définition donne :

$$\varphi_{-X}(t) = \frac{1}{t} \ln E(e^{-tX}) = -\varphi_X(-t).$$

En $t = 0$, II. (1) donne également $\varphi_{-X}(0) = -E(X) = -\varphi_X(0)$. La relation vaut donc partout.

La variable $-X$ est non certaine ; b. montre que φ_{-X} est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pour $s_1 < s_2 < 0$, on a $0 < -s_2 < -s_1$, donc $\varphi_{-X}(-s_2) < \varphi_{-X}(-s_1)$. En changeant les signes, $\varphi_X(s_1) < \varphi_X(s_2)$.

Il reste à comparer aux valeurs à l'origine. Pour $t > 0$, la croissance sur les positifs et la continuité donnent $\varphi_X(0) \leq \varphi_X(t/2) < \varphi_X(t)$. Pour $t < 0$, on obtient de même $\varphi_X(t) < \varphi_X(t/2) \leq \varphi_X(0)$. Les comparaisons entre un réel négatif et un réel positif suivent en passant par 0.

Conclusion

φ_X est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Une variance à poids modifiés

Pour chaque réel t , posons $q_i(t) = p_i e^{tx_i} / M_X(t)$. Ce sont des nombres strictement

positifs dont la somme vaut 1. Si

$$m(t) = \sum_i q_i(t)x_i,$$

la formule de L_X'' établie en II. (1) devient :

$$L_X''(t) = \sum_i q_i(t)x_i^2 - m(t)^2 = \sum_i q_i(t)(x_i - m(t))^2 > 0.$$

La dernière inégalité est stricte, car toutes les valeurs x_i ne sont pas égales et tous les poids sont positifs.

Pour $t \neq 0$, posons $F(t) = tL_X'(t) - L_X(t)$; alors $\varphi_X'(t) = F(t)/t^2$. On a $F(0) = 0$ et $F'(t) = tL_X''(t)$, donc, par le théorème fondamental du calcul intégral sur un segment :

$$F(t) = \int_0^t sL_X''(s) ds.$$

Si $t > 0$, cette intégrale est strictement positive. Si $t < 0$, $F(t) = -\int_t^0 sL_X''(s) ds$ est encore strictement positif, puisque l'intégrande est négatif sur $]t, 0[$. Ainsi $\varphi_X'(t) > 0$ pour $t \neq 0$. À l'origine, $\varphi_X'(0) = v/2 > 0$. La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La première preuve prolonge l'inégalité de concavité de b.; la seconde interprète L_X'' comme une variance d'une loi finie aux poids modifiés.

II. (3) Limites et représentation générale

Question adaptée au programme actuel : le second passage à la limite, imprimé une seconde fois en $+\infty$, est rectifié en $-\infty$.

Pour $t > 0$, factorisons l'exponentielle correspondant à la valeur maximale :

$$M_X(t) = e^{x_k t} \left[p_k + \sum_{i < k} p_i e^{(x_i - x_k)t} \right].$$

Comme $x_i - x_k < 0$ pour $i < k$, le terme entre crochets tend vers $p_k > 0$. Son logarithme tend vers le réel $\ln p_k$. Par conséquent :

$$\varphi_X(t) = x_k + \frac{1}{t} \ln \left[p_k + \sum_{i < k} p_i e^{(x_i - x_k)t} \right] \longrightarrow x_k.$$

Pour $t < 0$, on factorise $e^{x_1 t}$. Les différences $x_i - x_1$ sont strictement positives pour $i > 1$, donc les exponentielles correspondantes tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow -\infty$. On obtient :

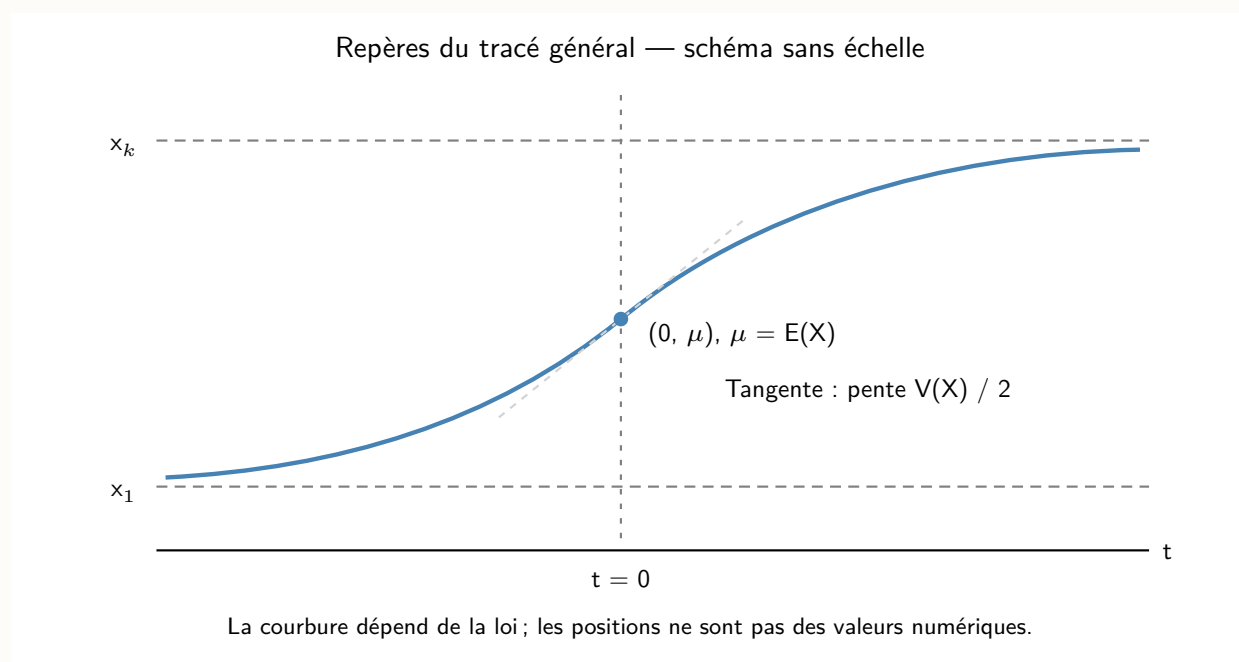
$$\varphi_X(t) = x_1 + \frac{1}{t} \ln \left[p_1 + \sum_{i > 1} p_i e^{(x_i - x_1)t} \right] \longrightarrow x_1.$$

Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_X(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_X(t) = x_k.$$

La courbe est strictement croissante, comprise strictement entre les droites $y = x_1$ et $y = x_k$, qui sont ses asymptotes horizontales. Elle passe par $(0, \mu)$ et possède en ce point la tangente $y = \mu + (v/2)t$. On a $x_1 < \mu < x_k$, car l'espérance est une moyenne à poids strictement positifs de valeurs distinctes.

La loi de X n'étant pas spécifiée numériquement, il n'existe pas de courbe numérique unique à tracer. Le schéma suivant, sans échelle, indique uniquement les propriétés précédentes ; la courbure dessinée ne constitue pas une propriété générale. Pour une loi donnée, le tracé exact se calcule par la formule définissant φ_X .



III. Étude de l'application $X \mapsto \varphi_X$

III. (1) Translation et multiplication par un scalaire

Pour $a \neq 0$ et $t \neq 0$, le transfert donne :

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t), \quad M_{aX}(t) = M_X(at).$$

En prenant le logarithme et en divisant par t :

$$\varphi_{X+a}(t) = a + \varphi_X(t), \quad \varphi_{aX}(t) = a\varphi_X(at).$$

Au point $t = 0$, II. (1) et la linéarité de l'espérance donnent les mêmes égalités : $E(X + a) = a + E(X)$ et $E(aX) = aE(X)$. Les deux identités valent donc pour tout réel t .

La formule de translation vaut aussi pour $a = 0$. Pour le scalaire nul, la variable $0X$ est certaine égale à 0 et sa fonction est identiquement nulle ; l'identité de multiplication reste également vraie dans ce cas.

III. (2) Addition de variables indépendantes

Les variables e^{tX} et e^{tY} sont des fonctions de variables indépendantes ; elles sont donc indépendantes. Elles ont un support fini, donc elles sont intégrables. La factorisation de l'espérance donne :

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t).$$

Pour $t \neq 0$, on prend les logarithmes :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{\ln M_X(t) + \ln M_Y(t)}{t} = \varphi_X(t) + \varphi_Y(t).$$

Pour $t = 0$, la même égalité résulte de $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. On conclut donc $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$ sur tout $\mathbb{R}$.

III. (3) a. Liberté des exponentielles

On démontre par récurrence que, pour chaque entier $n \geq 1$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Pour $n = 1$, si $c_1 e^{\alpha_1 t} = 0$ pour tout t , l'évaluation en 0 donne $c_1 = 0$.

Supposons le résultat établi au rang n et considérons une relation :

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j e^{\alpha_j t} = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

L'exponentielle $e^{\alpha_{n+1} t}$ est toujours non nulle. En divisant par elle :

$$c_{n+1} + \sum_{j=1}^n c_j e^{(\alpha_j - \alpha_{n+1})t} = 0.$$

Chaque différence $\alpha_j - \alpha_{n+1}$ est strictement négative. En faisant tendre t vers $+\infty$ dans cette somme finie, on obtient $c_{n+1} = 0$. La relation restante et l'hypothèse de récurrence donnent $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Toutes les familles initiales finies sont donc libres. Toute sous-famille finie de $(f_n)_{n \geq 1}$ est contenue dans une telle famille et est elle-même libre : la famille entière est libre au sens des combinaisons linéaires finies.

III. (3) b. Détermination de la loi

Si X et Y ont la même loi, leurs sommes définissant M_X et M_Y sont identiques. Leurs fonctions φ_X et φ_Y coïncident pour $t \neq 0$, puis à l'origine par égalité des espérances.

Réciproquement, supposons $\varphi_X = \varphi_Y$. Pour $t \neq 0$, $M_X(t) = e^{t\varphi_X(t)} = e^{t\varphi_Y(t)} = M_Y(t)$. Pour $t = 0$, les deux fonctions valent 1, donc cette égalité vaut sur tout $\mathbb{R}$.

Notons $b_1 < \dots < b_m$ les valeurs appartenant à l'union des supports des deux variables. En posant $a_j = P(X = b_j) - P(Y = b_j)$, avec probabilité 0 lorsqu'une valeur est absente d'un support, on obtient :

$$\sum_{j=1}^m a_j e^{b_j t} = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La liberté établie en a. impose $a_j = 0$ pour chaque j . Toutes les probabilités ponctuelles sont donc égales : les variables ont la même loi. Conclusion :

$$\varphi_X = \varphi_Y \iff X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$

III. (4) Fonctions impaires

La formule de III. (1), appliquée au scalaire -1 , donne $\varphi_{-X}(t) = -\varphi_X(-t)$ pour tout t .

Si φ_X est impaire, alors $\varphi_{-X} = \varphi_X$. D'après III. (3) b., $-X$ et X ont la même loi.

Réciproquement, si $-X$ et X ont la même loi, leurs fonctions sont égales et l'identité précédente donne $\varphi_X(t) = -\varphi_X(-t)$: la fonction est impaire.

Ainsi les variables recherchées sont exactement celles dont la loi est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire :

$$P(X = x) = P(X = -x) \quad \text{pour tout réel } x.$$

Cette symétrie entraîne $E(X) = 0$, comme le confirme $\varphi_X(0) = 0$ pour une fonction impaire. Si la variable est certaine, la seule possibilité est $X = 0$ presque sûrement.

III. (5) Majoration d'une probabilité de dépassement

Méthode 1 — Comparer les contributions à une espérance

Pour $t \geq 0$, si $X \geq a$, on a $e^{tX} \geq e^{ta}$. Il en résulte l'inégalité valable pour chaque issue :

$$e^{tX} \geq e^{ta} \mathbf{1}_{\{X \geq a\}}.$$

En prenant les espérances :

$$M_X(t) \geq e^{ta} P(X \geq a).$$

Pour $t \neq 0$, $M_X(t) = e^{t\varphi_X(t)}$. En $t = 0$, les deux membres de cette égalité valent aussi 1. On obtient donc la majoration demandée pour tout $t \geq 0$.

Méthode 2 — Inégalité de Markov

Pour $t > 0$, la variable e^{tX} est positive et intégrable, et $e^{ta} > 0$. Comme l'exponentielle est strictement croissante :

$$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}.$$

En multipliant par e^{ta} , on retrouve la même inégalité. Pour $t = 0$, elle devient simplement $P(X \geq a) \leq 1$.

La première preuve est un calcul direct sur un indicateur ; la seconde reconnaît une application de Markov à une transformation exponentielle.

III. (6) Loi uniforme et transformations affines

Question adaptée au programme actuel : les notations historiques sont remplacées par les fonctions exponentielles C, S définies dans le sujet. Le terme r manquant dans la notation finale du PDF est rétabli : la variable à étudier est $a + rU_N$.

Pour $t \neq 0$, $e^t \neq 1$, donc la somme géométrique finie donne :

$$M_{U_N}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{jt} = \frac{e^{Nt} - 1}{N(e^t - 1)}.$$

En écrivant $e^{Nt} - 1 = 2e^{Nt/2}S(Nt/2)$ et $e^t - 1 = 2e^{t/2}S(t/2)$, on obtient :

$$M_{U_N}(t) = e^{(N-1)t/2} \frac{S(Nt/2)}{NS(t/2)}.$$

La fraction est strictement positive : les deux valeurs de S ont le même signe, et le dénominateur ne s'annule pas pour $t \neq 0$. Le logarithme est donc défini et :

$$\varphi_{U_N}(t) = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(Nt/2)}{NS(t/2)} \right).$$

Retrouver les moments à partir de cette expression

Si $N = 1$, $U_1 = 0$ et la fraction vaut 1 pour $t \neq 0$. On obtient directement $E(U_1) = V(U_1) = 0$.

Supposons $N > 1$. En utilisant les dérivées de S et Taylor à l'origine, on a $S(h) = h + h^3/6 + O(h^5)$. Pour N fixé :

$$S(Nt/2) - NS(t/2) = \frac{N(N^2 - 1)}{48} t^3 + O(t^5).$$

Comme $NS(t/2) \sim Nt/2$, la fraction $R(t) = S(Nt/2)/(NS(t/2))$ vérifie :

$$R(t) \rightarrow 1, \quad \frac{R(t) - 1}{t^2} \rightarrow \frac{N^2 - 1}{24}.$$

Pour $N > 1$, la limite précédente est strictement positive : $R(t) - 1$ est donc non nul pour $t \neq 0$ assez proche de 0. Par la dérivabilité du logarithme en 1, $\ln R(t)/(R(t) - 1) \rightarrow 1$. Par multiplication de ces deux limites, sans composition de développements limités :

$$\frac{\ln R(t)}{t^2} \rightarrow \frac{N^2 - 1}{24}.$$

Ainsi $\ln R(t)/t \rightarrow 0$, donc $\varphi_{U_N}(0) = (N-1)/2$. De plus :

$$\varphi'_{U_N}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{U_N}(t) - (N-1)/2}{t} = \frac{N^2 - 1}{24}.$$

D'après II. (1), ces valeurs sont respectivement l'espérance et la moitié de la variance. On retrouve, pour tout $N \geq 1$:

$$E(U_N) = \frac{N-1}{2}, \quad V(U_N) = \frac{N^2-1}{12}.$$

Expression affine

D'après III. (1), pour $r \neq 0$:

$$\varphi_{a+rU_N}(t) = a + r\varphi_{U_N}(rt).$$

Pour $t \neq 0$, cela donne :

$$\varphi_{a+rU_N}(t) = a + \frac{r(N-1)}{2} + \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(Nrt/2)}{NS(rt/2)} \right).$$

Cette fraction est positive même si $r < 0$. Pour $t = 0$, la valeur est $a + r(N-1)/2$, l'espérance de la variable affine.

IV. Sommes pondérées indépendantes

En répétant III. (2), grâce à l'indépendance mutuelle et au rappel sur les sommes de variables indépendantes, puis en appliquant III. (1), on obtient pour tout réel t :

$$\varphi_{Y_n}(t) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_{X_j}(u_j t).$$

Lorsque les X_j ont la loi de Z , cela donne, pour $t \neq 0$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \ln C(u_j t), \quad M_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^n C(u_j t).$$

En $t = 0$, $\varphi_{Y_n}(0) = E(Y_n) = 0$.

IV. (1) Poids tous égaux à 1

IV. (1) a. Majoration bilatérale

Dans ce cas, $M_{Y_n}(t) = C(t)^n$. Comme C est paire, $M_{-Y_n}(t) = M_{Y_n}(-t) = C(t)^n$.

Pour $a > 0$ et $t \geq 0$, III. (5), appliqué successivement à Y_n et à $-Y_n$, donne :

$$P(Y_n \geq a) \leq e^{-at}C(t)^n, \quad P(-Y_n \geq a) \leq e^{-at}C(t)^n.$$

Les deux événements sont disjoints puisque $a > 0$, et leur union est $\{|Y_n| \geq a\}$. Ainsi :

$$P(|Y_n| \geq a) \leq 2e^{-at}C(t)^n \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Le membre de gauche divisé par 2 est donc un minorant de l'ensemble des valeurs $e^{-at}C(t)^n$. Il est inférieur ou égal à leur borne inférieure. Par définition de $M_n(a)$:

$$P(|Y_n| \geq a) \leq 2M_n(a).$$

Aucune existence d'un minimum n'est supposée : il s'agit bien d'un infimum.

IV. (1) b. Calcul de l'infimum et asymptotique

Fixons $a > 0$. Pour $t \geq 0$, $f_n(t) > 0$ et :

$$\frac{f'_n(t)}{f_n(t)} = -a + nD(t), \quad D(t) = \frac{S(t)}{C(t)}.$$

D'après I. (2), $D'(t) = 1/C(t)^2 > 0$, $D(0) = 0$ et $D(t) \rightarrow 1$ en $+\infty$. On a donc $0 \leq D(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.

Cas $n < a$

On a $-a + nD(t) < 0$, donc f_n est strictement décroissante. De plus :

$$f_n(t) = 2^{-n}e^{(n-a)t}(1 + e^{-2t})^n \longrightarrow 0.$$

Donc $M_n(a) = 0$. Cet infimum n'est pas atteint à un réel fini, puisque f_n est strictement positive.

Cas $n = a$

La dérivée logarithmique vaut $n(D(t) - 1) < 0$. La fonction est encore strictement décroissante et :

$$f_n(t) = 2^{-n}(1 + e^{-2t})^n \longrightarrow 2^{-n}.$$

Donc $M_n(a) = 2^{-n}$, également non atteint à un réel fini.

Cas $n > a$

La stricte croissance de D donne une unique solution $t_n > 0$ de $D(t_n) = a/n$. La dérivée de f_n est négative avant cette valeur et positive après : f_n y atteint son minimum.

Résolvons cette équation à partir des exponentielles :

$$\frac{e^{2t_n} - 1}{e^{2t_n} + 1} = \frac{a}{n} \implies e^{2t_n} = \frac{n+a}{n-a}, \quad t_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+a}{n-a} \right).$$

L'identité $C^2 - S^2 = 1$ et $S(t_n)/C(t_n) = a/n$ donnent $C(t_n) = n/\sqrt{n^2 - a^2}$, la racine positive étant imposée par $C > 0$. Ainsi :

$$M_n(a) = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - a^2}} \right)^n \left(\frac{n-a}{n+a} \right)^{a/2} = \frac{n^n}{(n+a)^{(n+a)/2} (n-a)^{(n-a)/2}}.$$

Les bases des puissances sont strictement positives dans ce cas.

Vérification directe lorsque $n \leq a$

On a toujours $|Y_n| \leq n$, car chaque X_j vaut -1 ou 1 . Si $n < a$, la probabilité est donc nulle, comme $2M_n(a)$.

Si $n = a$, l'événement $|Y_n| \geq a$ est réalisé uniquement lorsque tous les signes sont positifs ou tous négatifs. Ces deux événements disjoints ont chacun, par indépendance, la probabilité 2^{-n} . Donc $P(|Y_n| \geq a) = 2^{1-n} = 2M_n(a)$.

Limite et équivalent pour $a > 0$ fixé

Pour tout n assez grand, $n > a$. Posons $z = a/n$ et définissons, pour $|z| < 1$:

$$H(z) = (1+z) \ln(1+z) + (1-z) \ln(1-z).$$

La formule du minimum donne exactement $\ln M_n(a) = -(n/2)H(a/n)$. Or $H(0) = H'(0) = 0$ et :

$$H'(z) = \ln(1+z) - \ln(1-z), \quad H''(z) = \frac{2}{1-z^2}, \quad H''(0) = 2.$$

Taylor-Young appliqué directement à H en 0 donne $H(z) = z^2 + o(z^2)$. Donc :

$$\ln M_n(a) = -\frac{a^2}{2n} + o(1/n) \rightarrow 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, $M_n(a) \rightarrow 1$. Enfin, en posant $h_n = \ln M_n(a)$, la dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne $(e^{h_n} - 1)/h_n \rightarrow 1$. Comme $h_n \sim -a^2/(2n)$, on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(a) = 1, \quad M_n(a) - 1 \sim -\frac{a^2}{2n}.$$

Cette dernière déduction utilise un quotient tendant vers 1, et non une composition de développements limités.

IV. (2) Poids $u_n = 2^{-n}$

IV. (2) a. Produit télescopique

Question adaptée au programme actuel : les formules sont écrites avec C, S , dont on démontre l'identité nécessaire à partir des exponentielles.

En développant leurs expressions :

$$2S(x)C(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = S(2x).$$

Pour $t \neq 0$, les nombres $S(t/2^j)$ sont tous non nuls. On peut donc écrire :

$$C(t/2^j) = \frac{S(t/2^{j-1})}{2S(t/2^j)}.$$

Les produits se simplifient :

$$M_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^n C(t/2^j) = \frac{S(t)}{2^n S(t/2^n)}.$$

Le quotient est positif, comme le produit initial. En prenant le logarithme et en divisant par t :

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(t)}{2^n S(t/2^n)} \right).$$

À l'origine, la valeur reste $\varphi_{Y_n}(0) = 0$.

IV. (2) b. Loi et identité de somme

Question adaptée au programme actuel : l'identité du PDF omet un facteur de normalisation. Le membre de droite doit être multiplié par 2^{1-n} . En particulier, sa valeur en $t = 0$ doit être 1.

Méthode 1 — Comparer avec une loi uniforme affine

Posons $N = 2^n$, $r = 2/N$ et $a = -1 + 1/N$. Dans la formule de III. (6), le terme constant vaut :

$$a + \frac{r(N-1)}{2} = -1 + \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} = 0.$$

De plus $Nrt/2 = t$ et $rt/2 = t/N$. Ainsi φ_{a+rU_N} est exactement l'expression obtenue en a. pour $t \neq 0$. Les deux valeurs à l'origine sont aussi nulles. D'après III. (3) b., Y_n a donc la même loi que $a + rU_N$.

Cette dernière variable est uniforme sur :

$$\left\{ -1 + \frac{2j+1}{N} : j = 0, 1, \dots, N-1 \right\} = \left\{ \pm \frac{2k-1}{2^n} : k = 1, \dots, 2^{n-1} \right\}.$$

Les 2^n valeurs sont distinctes et chacune a la probabilité 2^{-n} .

Méthode 2 — Coder les signes par des chiffres binaires

Posons $B_j = (X_j + 1)/2 \in \{0, 1\}$. Les B_j sont mutuellement indépendantes et chaque n -uplet de zéros et de uns a la probabilité 2^{-n} . Comme $X_j = 2B_j - 1$:

$$Y_n = 2 \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{2^j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = -1 + 2^{-n} + \frac{2K_n}{2^n},$$

où

$$K_n = \sum_{j=1}^n B_j 2^{n-j}.$$

Le codage binaire associe aux n -uplets toutes les valeurs entières $0, \dots, 2^n - 1$, une seule fois. On peut le vérifier par récurrence : pour $n = 1$, on obtient $0, 1$; au rang suivant, le premier chiffre ajoute soit 0 , soit 2^n , aux valeurs codées par les n chiffres restants, donnant les deux intervalles disjoints $0, \dots, 2^n - 1$ et $2^n, \dots, 2^{n+1} - 1$.

Donc K_n est uniforme et l'expression de Y_n retrouve le même support et les mêmes probabilités. La première méthode utilise l'injectivité de l'application étudiée en III ; la seconde fournit une interprétation directe des tirages de signes.

Identité obtenue par regroupement des valeurs opposées

En revenant au transfert et à la loi démontrée :

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} [e^{(2k-1)t/2^n} + e^{-(2k-1)t/2^n}] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} C\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

Pour $t \neq 0$, on remplace M_{Y_n} par l'expression de a. et on obtient exactement l'identité rectifiée du sujet. Lorsque $t \rightarrow 0$, $S(t) \sim t$ et $S(t/2^n) \sim t/2^n$ pour n fixé ; le quotient tend vers 1. Le membre de droite vaut également $2^{1-n}2^{n-1} = 1$ en 0. L'identité se prolonge donc par la valeur 1.

IV. (2) c. Limite pour chaque réel t

Si $t = 0$, tous les termes $\varphi_{Y_n}(0)$ valent 0, donc la limite est nulle.

Fixons $t \neq 0$. Comme $S'(0) = C(0) = 1$ et $S(0) = 0$, $S(h)/h \rightarrow 1$ lorsque $h \rightarrow 0$. En prenant $h = t/2^n$, on obtient :

$$2^n S(t/2^n) = t \frac{S(t/2^n)}{t/2^n} \rightarrow t.$$

Le quotient $S(t)/(2^n S(t/2^n))$ tend donc vers $S(t)/t > 0$. Le logarithme est continu sur les réels strictement positifs, ce qui donne :

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S(t)}{t} \right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On a traité séparément $t = 0$; aucune interversion entre une limite en n et une limite en t n'a été utilisée.

IV. (2) d. La limite n'est pas associée à une loi finie

Question adaptée au programme actuel : la notation φ_Y du PDF est rectifiée en φ_T , la variable dont l'existence est examinée.

Supposons qu'une variable discrète finie T vérifie $\varphi_T = g$. Pour $t > 0$, $S(t) = e^t(1 - e^{-2t})/2$, donc :

$$g(t) = 1 + \frac{-\ln(2t) + \ln(1 - e^{-2t})}{t} \rightarrow 1.$$

Le calcul de II. (3) montre que la limite en $+\infty$ d'une fonction associée à une loi finie est la plus grande valeur de son support. Cette propriété vaut aussi pour une loi certaine, où la fonction est constante. La plus grande valeur prise par T serait donc 1.

Notons $q = P(T = 1) > 0$. En factorisant e^t dans la somme finie définissant M_T , comme en II. (3), on aurait :

$$e^{-t}M_T(t) \longrightarrow q > 0.$$

Or $\varphi_T(t) = g(t)$ imposerait, pour $t > 0$, $M_T(t) = e^{tg(t)} = S(t)/t$. Il en résulterait :

$$e^{-t}M_T(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{2t} \longrightarrow 0,$$

contradiction. Il n'existe donc aucune variable aléatoire discrète finie T possédant cette fonction.

IV. (3) Critère de convergence pour les poids quelconques

L'expression générale donne, pour $t \neq 0$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \ln C(tu_j).$$

Le développement de I. (2) donne $\ln C(h) = h^2/2 + O(h^4)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Sens suffisant

Si

$$\sum_j u_j^2$$

converge, alors $u_j^2 \rightarrow 0$ et, puisque $u_j > 0$, $u_j \rightarrow 0$. Pour chaque $t \neq 0$ fixé :

$$\ln C(tu_j) \sim \frac{t^2}{2} u_j^2.$$

Les termes $\ln C(tu_j)$ sont positifs. Par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum_j \ln C(tu_j)$$

converge. La suite $\varphi_{Y_n}(t)$ converge donc. Pour $t = 0$, elle est identiquement nulle et converge aussi.

Sens nécessaire

Supposons la convergence pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $t = 1$, les sommes partielles

$$\sum_{j=1}^n \ln C(u_j)$$

convergent. Leurs termes tendent donc vers 0.

Cela entraîne $u_j \rightarrow 0$. En effet, pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonction C est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $\ln C(\varepsilon) > 0$. Si $u_j \geq \varepsilon$, alors $\ln C(u_j) \geq \ln C(\varepsilon)$; cette situation ne peut plus se produire pour j assez grand puisque $\ln C(u_j) \rightarrow 0$.

On peut maintenant utiliser $\ln C(u_j) \sim u_j^2/2$. La convergence de la série positive

$$\sum_j \ln C(u_j)$$

entraîne celle de

$$\sum_j u_j^2.$$

Conclusion

la convergence pour tous les réels t équivaut à la convergence de

$$\sum_j u_j^2.$$

Pour le seul point $t = 0$, la suite converge toujours ; ce point ne suffit pas à établir la nécessité.

IV. (4) Loi finie non certaine quelconque, avec $u_n \rightarrow 0$

On conserve $u_n > 0$, et l'on note $\mu = E(X)$ et $v = V(X) > 0$. L'indépendance et les formules de III donnent pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_X(tu_j).$$

D'après II. (1), $\varphi_X(h) = \mu + (v/2)h + O(h^2)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

IV. (4) a. Espérance non nulle**Méthode 1 — Utiliser la valeur en zéro et la continuité**

Supposons $\mu \neq 0$. Si la suite converge pour tout t , elle converge en particulier pour $t = 0$. Or :

$$\varphi_{Y_n}(0) = \mu \sum_{j=1}^n u_j.$$

En divisant par le réel non nul μ , on obtient la convergence des sommes partielles de

$$\sum_j u_j.$$

Réciproquement, si

$$\sum_j u_j$$

converge, fixons un réel t . Les nombres tu_j tendent vers 0. Par continuité de φ_X en 0, la suite $\varphi_X(tu_j)$ est bornée. Il existe donc un réel B_t tel que, pour tous les indices assez grands :

$$|u_j \varphi_X(tu_j)| \leq B_t u_j.$$

La convergence de la série positive

$$\sum_j u_j$$

entraîne la convergence absolue de

$$\sum_j u_j \varphi_X(tu_j).$$

Ainsi $\varphi_{Y_n}(t)$ converge pour chaque réel t .

Méthode 2 — Comparer les termes pour un réel t fixé

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, puisque $u_j \rightarrow 0$ et $\varphi_X(0) = \mu \neq 0$, on a :

$$u_j \varphi_X(tu_j) \sim \mu u_j.$$

Pour j assez grand, ces termes ont tous le signe de μ , et leur valeur absolue est comprise entre $|\mu|u_j/2$ et $3|\mu|u_j/2$. La série des termes converge donc si et seulement si

$$\sum_j u_j$$

converge : on compare des séries positives après multiplication éventuelle par -1 .

Cette méthode prouve même l'équivalence pour chaque t fixé. La première montre que, pour la convergence simultanée en tous les t , le point 0 fournit déjà la condition nécessaire.

Dans les deux méthodes, la conclusion est :

$$[\forall t \in \mathbb{R}, (\varphi_{Y_n}(t)) \text{ converge}] \iff \sum_{j \geq 1} u_j \text{ converge.}$$

IV. (4) b. Espérance nulle

Si $\mu = 0$, le développement à l'origine devient $\varphi_X(h) = (v/2)h + O(h^2)$, avec $v > 0$.

Pour chaque $t \neq 0$ fixé, on en déduit :

$$u_j \varphi_X(tu_j) = \frac{vt}{2} u_j^2 + O_t(u_j^3) \sim \frac{vt}{2} u_j^2.$$

La notation O_t signifie que la constante de majoration peut dépendre du réel t fixé. Les termes sont de signe constant pour j assez grand, celui de t , puisque $v > 0$ et $u_j > 0$. En valeur absolue, ils sont comparables à u_j^2 .

Si

$$\sum_j u_j^2$$

converge, la série

$$\sum_j u_j \varphi_X(tu_j)$$

converge absolument pour chaque $t \neq 0$. En $t = 0$, elle est nulle terme à terme. On obtient la convergence pour tout réel t .

Réciproquement, si la suite converge pour tout t , prenons $t = 1$. Les termes de la série sont équivalents à $(v/2)u_j^2$ et positifs à partir d'un certain rang. La comparaison de séries à termes positifs donne la convergence de

$$\sum_j u_j^2.$$

Ainsi :

$$[\forall t \in \mathbb{R}, (\varphi_{Y_n}(t)) \text{ converge}] \iff \sum_{j \geq 1} u_j^2 \text{ converge}.$$

Comme en IV. (3), la convergence au seul point 0 est automatique et ne donne aucune condition sur les poids.

IV. (4) c. Poids harmoniques et centrage logarithmique

Fixons un réel t et posons, pour $j \geq 2$:

$$a_j(t) = \frac{1}{j} \varphi_X(t/j) + \mu \ln \left(\frac{j-1}{j} \right).$$

Le développement établi par Taylor directement sur L_X en II. (1) donne :

$$\frac{1}{j} \varphi_X(t/j) = \frac{\mu}{j} + \frac{vt}{2j^2} + O_t(j^{-3}).$$

Pour l'autre terme, Taylor appliqué au logarithme au voisinage de 0 donne

$\ln(1+h) = h - h^2/2 + O(h^3)$. En prenant $h = -1/j$, qui tend vers 0 :

$$\mu \ln \left(\frac{j-1}{j} \right) = -\frac{\mu}{j} - \frac{\mu}{2j^2} + O(j^{-3}).$$

Par addition, les termes d'ordre $1/j$ se compensent :

$$a_j(t) = \frac{vt - \mu}{2j^2} + O_t(j^{-3}).$$

Il existe donc une constante, dépendant éventuellement de t , qui majore $|a_j(t)|$ par une constante fois $1/j^2$ pour j assez grand. La série de Riemann

$$\sum j^{-2}$$

converge; la série

$$\sum_{j \geq 2} a_j(t)$$

est donc absolument convergente. Le cas $vt = \mu$ ne pose pas de difficulté : le terme principal s'annule et il reste un $O_t(j^{-3})$.

Pour en déduire le résultat sur Y_n , on utilise les sommes partielles, sans intervertir de limites. Comme $u_j = 1/j$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \varphi_X(t/j).$$

D'autre part, pour $n \geq 2$, le produit télescopique

$$\prod_{j=2}^n (j-1)/j = 1/n$$

donne :

$$\sum_{j=2}^n \ln \left(\frac{j-1}{j} \right) = -\ln n.$$

En séparant le terme $j = 1$:

$$\sum_{j=2}^n a_j(t) = \varphi_{Y_n}(t) - \varphi_X(t) - \mu \ln n.$$

Les sommes partielles de gauche convergent. Par conséquent :

$$\varphi_{Y_n}(t) - E(X) \ln n \longrightarrow \varphi_X(t) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j(t).$$

Cela vaut pour chaque réel t , y compris 0. Aucun passage à une limite uniforme ni aucune permutation entre limite et somme infinie n'est nécessaire.

Relevé des adaptations

- I. (1) à I. (3), III. (6), IV. (1) et IV. (2) : les notations hyperboliques sont remplacées par $C(t) = (e^t + e^{-t})/2$ et $S(t) = (e^t - e^{-t})/2$. Les identités utilisées sont établies avec l'exponentielle.
- II. (1) : rectification de $\varphi_Z(0)$ en $\varphi_X(0)$ dans le cas général.
- II. (2) a. : rectification du domaine de z en $]0, +\infty[$, nécessaire pour définir z^α pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$.
- II. (3) : rectification du second $+\infty$ en $-\infty$. La courbe générale est représentée qualitativement, sans données numériques inventées ; la loi de X n'est pas spécifiée.
- III. (6) et renvoi de IV. (2) b. : rétablissement du scalaire r dans φ_{a+rU_N} , conformément aux paramètres demandés dans le PDF.
- IV. (1) b. : précision que $a > 0$ est fixé pour la limite et l'équivalent lorsque $n \rightarrow \infty$.
- IV. (2) b. : ajout du facteur 2^{1-n} manquant devant la somme ; sans ce facteur, l'identité serait fausse pour $n \geq 2$. Le prolongement en $t = 0$ est précisé.
- IV. (2) d. : rectification de φ_Y en φ_T .