



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1982

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Seules les questions II.4 et II.5 utilisent les résultats obtenus dans la partie I.

Partie I

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n .

1.

a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$L_{k,n} = (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (X - i),$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad L_{k,n}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

b) Montrer que $(L_{0,n}, L_{1,n}, \dots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n L_{k,n} = 1.$$

Déduire de cette égalité des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \dots, n\}, \quad \frac{1}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x-k}.$$

- c) Soit π la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_{0,n}, L_{1,n}, \dots, L_{n,n})$. Ses colonnes sont les coordonnées des polynômes de la nouvelle base dans la base canonique.

On ne demande pas d'écrire π , mais de donner :

- les éléments de la première ligne ;
- la somme des éléments de toute autre ligne ;
- la somme des éléments des différentes colonnes.

Écrire la matrice π^{-1} , inverse de π .

2.

On pose $L_{0,0} = 1$.

- a) Montrer que $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- b) Soit Δ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

L'image d'un polynôme P par Δ sera notée ΔP dans la suite. Montrer que l'application Δ est linéaire. Écrire sa matrice dans la base $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$. En déduire le noyau et l'image de Δ .

- c) On note Δ^0 l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et, pour $i \geq 1$, $\Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1}$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que sa décomposition dans la base $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^n (\Delta^k P)(0) L_{k,k}.$$

3.

a) Pour une fonction réelle f de la variable réelle, on note désormais Δf la fonction définie, pour tout x tel que $f(x+1)$ et $f(x)$ existent, par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Pour $i \geq 1$, on définit par récurrence $\Delta^i f = \Delta(\Delta^{i-1} f)$, avec $\Delta^0 f = f$.

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, n]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad f(k) = P_f(k).$$

b) Montrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-i\}, \quad (\Delta^i f)(k) = (\Delta^i P_f)(k).$$

En déduire que :

$$f(n) = \sum_{k=0}^n (\Delta^k f)(0) L_{k,k}(n). \quad (1)$$

c) Pour un réel $a > n$, on pose $f(x) = 1/(a-x)$ sur $[0, n]$. Montrer par récurrence que, pour $0 \leq k \leq n$ et $x \in [0, n-k]$:

$$(\Delta^k f)(x) = \frac{k!}{(a-x)(a-1-x) \cdots (a-k-x)}.$$

Écrire la relation (1) pour f et en déduire que, si N est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel tel que $x \geq N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N(N-1) \cdots (N-k)}{x(x-1) \cdots (x-k)} = \frac{N(N-1)}{x(x-N+1)}.$$

Partie II

Préliminaire

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(X = m)u^m$$

converge pour tout $u \in [0, 1]$.

L'application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} P(X = m)u^m$$

est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X . À $u = 0$, le terme u^0 est pris égal à 1.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de $X + Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y .

Dans cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue des tirages successifs au hasard et avec remise d'une boule de cette urne, et l'on s'intéresse au numéro marqué sur chaque boule tirée. Les tirages sont indépendants, et chacun des N numéros est équiprobable à chaque tirage.

Pour tout entier $n \in \{1, \dots, N-1\}$, X_n désigne le nombre aléatoire de tirages nécessaires à l'obtention de $n+1$ numéros distincts. On note :

$$Y_1 = X_1 - 1, \quad Y_2 = X_2 - X_1, \quad \dots, \quad Y_n = X_n - X_{n-1}.$$

On remarquera que :

$$P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = \dots = P(Y_n = 0) = 0.$$

1.

a) Quelle est la probabilité que les k premières boules tirées portent le même numéro, pour $k \geq 2$?

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_1 .

c) Donner l'espérance, la variance et la fonction génératrice de chacune des variables aléatoires Y_1 et X_1 .

2.

a) Soient $2 \leq n \leq N-1$ et $(p, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $p \geq n$. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $[Y_n = k]$ sachant $[X_{n-1} = p]$. Dépend-elle de p ?

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n , son espérance, sa variance et sa fonction génératrice.

3. Déterminer l'espérance, la variance et la fonction génératrice f_n de la variable aléatoire X_n .

4.

a) Montrer que, pour $x \geq N$:

$$f_n\left(\frac{N}{x}\right) = \frac{N(N-1)\cdots(N-n)}{x(x-1)\cdots(x-n)}.$$

b) Utiliser le résultat de la question I.1 b) pour montrer que, pour $u \in [0, 1]$:

$$f_n(u) = \binom{N-1}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k} u}{1 - \frac{k}{N}u}.$$

c) En déduire, pour $i \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = i)$. Quelle remarque peut-on faire à propos du résultat obtenu ?

5.

a) Trouver, en utilisant I.3 c), une expression simple de

$$\sum_{n=1}^{N-1} f_n(u),$$

pour $u \in [0, 1]$.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au p -ième tirage, pour $p \geq 2$, un numéro non encore sorti ?

c) En déduire l'espérance du nombre aléatoire de numéros distincts sortis en n tirages, pour $n \geq 1$, et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Était-ce prévisible ?

6. On suppose dans cette question que N et n sont variables, mais liés par la relation $N = \alpha(n+1)$, où α désigne un rationnel fixé supérieur ou égal à 1. Les limites en n sont prises le long des valeurs entières pour lesquelles $\alpha(n+1)$ est entier.

- a) Montrer que, si $\alpha > 1$, les quotients $E(X_n)/n$ et $V(X_n)/n$ admettent, quand n tend vers $+\infty$, des limites $\ell(\alpha)$ et $v(\alpha)$ que l'on précisera.

Donner les limites L de $\ell(\alpha)$ et V de $v(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$, ainsi que des équivalents simples de $\ell(\alpha) - L$ et $v(\alpha) - V$.

- b) Montrer que, si $\alpha = 1$, les quotients $E(X_n)/n$ et $V(X_n)/n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donner des équivalents de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On admettra que

$$\sum_{p=1}^n 1/p \sim \ln n$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, et que

$$\sum_{p=1}^{\infty} 1/p^2 = \pi^2/6.$$