



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1981

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Préliminaire

Montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Partie I

Q1. Les entiers p et s appartiennent à $\mathbb{N}^*$.

Trouver le cardinal de l'ensemble des suites strictement croissantes de p éléments de $\{1, \dots, s\}$:

$$D_s = \{(d_1, \dots, d_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_p \leq s\}.$$

Q2. Les entiers p et q appartiennent à $\mathbb{N}^*$.

On définit l'ensemble des suites croissantes au sens large de p éléments de $\{1, \dots, q\}$:

$$C_q = \{(c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q\}.$$

Pour tout $(c_1, \dots, c_p) \in C_q$, on pose :

$$\Phi(c_1, \dots, c_p) = (c_1, c_2 + 1, c_3 + 2, \dots, c_p + p - 1).$$

Montrer que l'on définit ainsi une application Φ de C_q dans D_{p+q-1} .

Montrer rigoureusement que Φ est bijective. En déduire que C_q a pour cardinal $\binom{p+q-1}{p}$.

Partie II

On fixe un entier $N \geq 3$ et une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N .

On tire au hasard, successivement et sans remise, tous les jetons de l'urne, chaque jeton restant ayant la même probabilité d'être tiré. On note $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ la suite des numéros obtenus.

La variable aléatoire X_N est égale au plus petit entier $r \in \{1, \dots, N-1\}$ tel que $u_r > u_{r+1}$, s'il existe, et à N si un tel entier n'existe pas.

Q1. Montrer que, si $n \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$P(X_N > n) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Calculer $P(X_N > n)$ pour tout entier $n \geq N$.

Q2. Dédurre soigneusement de ce qui précède la loi de X_N . Effectuer une vérification de cette loi.

Montrer que :

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}.$$

Q3. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N)$.

Q4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k).$$

Montrer que X possède une espérance et la comparer à $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N)$.

Q5. Écrire en Python une fonction calculant $E(X_N)$.

Partie III

On fixe un entier $N \geq 3$ et on considère toujours une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N .

On tire au hasard et avec remise des jetons de cette urne. Les tirages sont indépendants et uniformes sur $\{1, \dots, N\}$. On note $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ la suite des numéros obtenus.

Q0. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$. Montrer que la série de terme général $n^\alpha q^n$, pour $n \geq 1$, est absolument convergente.

Q1. Calculer, pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = P(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n).$$

Dans la suite, on pose $v_1 = 1$.

Q2. Montrer, à N fixé, que les suites $\left(\binom{N+n-1}{n}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{n^{N-1}}{(N-1)!}\right)_{n \geq 1}$ sont équivalentes.

Montrer que les séries de termes généraux v_n , nv_n et $w_n = v_n - v_{n+1}$ convergent. Donner la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$$

et donner une interprétation probabiliste de ce résultat.

Q3. En déduire que le premier entier $r \geq 1$ tel que $u_r > u_{r+1}$ existe presque sûrement.

On note Z_N la variable aléatoire égale à ce premier entier lorsqu'il existe ; on lui attribue la valeur 1 sur l'événement négligeable où il n'existe pas.

Montrer que Z_N admet une espérance et que :

$$E(Z_N) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

On pourra utiliser le préliminaire.

Q4.

a) Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^N}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[-1/N, 0]$, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{(1 - 1/N)^N} - 1 - \sum_{n=1}^m v_n \right| \leq \frac{v_{m+1}}{(1 - 1/N)^{N+m+1}}.$$

En déduire $E(Z_N)$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(Z_N)$.

Q5. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(Z_N = k).$$

Comparer Z et X .

Q6. Écrire en Python une fonction qui simule cette expérience et donne la valeur de r .

Partie IV

On reprend les conditions de la partie III.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $k \in \{1, \dots, N\}$, trouver la probabilité de l'événement $\{\forall i \in \{1, \dots, n\}, k < u_{i+1}\}$.

En déduire la probabilité de l'événement $A_n = \{\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_1 < u_{i+1}\}$.

Q2. On pose $x_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = P(A_n)$. Montrer que la série de terme général x_n converge et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Q3. Prouver que le premier entier $r \geq 1$ tel que $u_{r+1} \leq \min(u_1, u_2, \dots, u_r)$ existe presque sûrement. On note T_N la variable aléatoire égale à ce premier entier lorsqu'il existe ; on lui attribue la valeur 1 sur l'événement négligeable où il n'existe pas.

Q4. Montrer que T_N admet une espérance, la calculer et déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(T_N)$.

Q5. Montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(T_N = k).$$

Montrer que T n'a pas d'espérance finie.