



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1981

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaire

L'identité demandée porte sur des sommes finies : elle ne suppose pas que X soit intégrable. Pour $k \geq 0$, posons $a_k = P(X > k)$. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $a_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$:

$$P(X = k) = a_{k-1} - a_k.$$

Méthode 1 — Décalage d'indice dans deux sommes finies.

On écrit :

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n ka_{k-1} - \sum_{k=1}^n ka_k.$$

Dans la première somme, posons $j = k - 1$. On obtient :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)a_j - \sum_{j=1}^n ja_j = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j - na_n.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Méthode 2 — Variable tronquée et indicatrices.

Pour toute valeur entière strictement positive de X , on a l'identité ponctuelle :

$$\min(X, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X > k\}}.$$

En effet, si $X \leq n$, exactement X indicatrices valent 1 ; si $X > n$, toutes les n indicatrices valent 1. On a aussi :

$$\min(X, n) = X \mathbf{1}_{\{X \leq n\}} + n \mathbf{1}_{\{X > n\}}.$$

Les variables de ces égalités sont bornées par n , donc intégrables. En prenant leurs espérances et en utilisant la linéarité pour la somme finie :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) + nP(X > n),$$

ce qui donne la même conclusion. La première méthode est une sommation algébrique ; la seconde interprète la somme des probabilités de dépassement comme l'espérance d'une variable tronquée.

Partie I

Q1. Dénombrement des suites strictement croissantes.

Si $p > s$, une suite de p entiers distincts de $\{1, \dots, s\}$ n'existe pas, donc D_s est vide.

Si $p \leq s$, chaque suite de D_s définit une partie de $\{1, \dots, s\}$ à p éléments.

Réciproquement, une telle partie possède un unique rangement strictement croissant.

Cette correspondance est une bijection. Ainsi :

$$|D_s| = \binom{s}{p}.$$

La même écriture reste valable pour $p > s$ avec la convention $\binom{s}{p} = 0$.

Q2. Bijection entre les deux ensembles de suites.

Pour $c = (c_1, \dots, c_p) \in C_q$, posons $d_i = c_i + i - 1$ pour $1 \leq i \leq p$. Alors $d_1 = c_1 \geq 1$, $d_p = c_p + p - 1 \leq q + p - 1$, et, pour $i < p$:

$$d_{i+1} - d_i = c_{i+1} - c_i + 1 \geq 1.$$

Ainsi $1 \leq d_1 < \dots < d_p \leq p + q - 1$, donc Φ est bien une application de C_q dans D_{p+q-1} .

Construisons sa réciproque. Pour $d \in D_{p+q-1}$, posons $c_i = d_i - i + 1$. Comme les d_i sont des entiers strictement croissants, $d_i \geq i$. Ils vérifient aussi $d_p \geq d_i + p - i$, donc :

$$d_i \leq d_p - (p - i) \leq p + q - 1 - p + i = q + i - 1.$$

On a ainsi $1 \leq c_i \leq q$. De plus :

$$c_{i+1} - c_i = d_{i+1} - d_i - 1 \geq 0.$$

La suite $(c_1, \dots, c_p)$ appartient donc à C_q . L'application Ψ ainsi définie vérifie, coordonnée par coordonnée, $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{C_q}$ et $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{D_{p+q-1}}$. Ainsi Φ est bijective.

Par Q1, puisque $p \leq p + q - 1$ pour $q \geq 1$, on conclut :

$$|C_q| = |D_{p+q-1}| = \binom{p+q-1}{p}.$$

Le cas $q = 1$ est inclus : l'unique suite de C_1 est $(1, \dots, 1)$, et sa suite image est $(1, 2, \dots, p)$.

Partie II

Le tirage sans remise produit une permutation uniforme de $\{1, \dots, N\}$. Chaque permutation complète a la probabilité $1/N!$, par multiplication des probabilités conditionnelles $1/N, 1/(N-1), \dots, 1$.

Question adaptée au programme actuel : l'équiprobabilité du choix des jetons restants est explicitée. La recherche d'un indice de descente porte sur $1 \leq r \leq N-1$, puisque la suite sans remise ne comporte que N termes.

Q1. Probabilités de dépassement de X_N .

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, l'événement $\{X_N > n\}$ signifie qu'aucune descente n'apparaît parmi les n premières comparaisons. Comme les numéros sont distincts, il équivaut à :

$$u_1 < u_2 < \dots < u_{n+1}.$$

Pour $n = 0$, cette condition est sans restriction et sa probabilité vaut 1.

Méthode 1 — Choix des numéros du préfixe.

Chaque suite de $n + 1$ numéros distincts a la même probabilité, et le nombre total de ces suites est $N!/(N - n - 1)!$. Pour chaque partie à $n + 1$ éléments, il existe exactement un ordre croissant, d'après I.Q1. Le nombre de préfixes favorables est donc $\binom{N}{n+1}$. Ainsi :

$$P(X_N > n) = \frac{\binom{N}{n+1}}{N!/(N - n - 1)!} = \frac{1}{(n + 1)!}.$$

Méthode 2 — Symétrie des ordres relatifs.

Conditionnellement à l'ensemble des $n + 1$ numéros du préfixe, leurs $(n + 1)!$ ordres possibles sont équiprobables. Un seul est croissant. La probabilité conditionnelle est donc $1/(n + 1)!$, indépendamment de l'ensemble choisi. Les probabilités totales donnent la même probabilité non conditionnelle.

Comme $X_N \leq N$ par définition, pour tout entier $n \geq N$:

$$P(X_N > n) = 0.$$

La formule factorielle au rang $N - 1$ donne bien $1/N!$, correspondant à l'unique permutation totalement croissante.

Q2. Loi et espérance de X_N .

Pour une variable entière strictement positive,

$P(X_N = k) = P(X_N > k - 1) - P(X_N > k)$. Par Q1, pour $1 \leq k \leq N - 1$:

$$P(X_N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Au dernier rang, il faut utiliser $P(X_N > N) = 0$:

$$P(X_N = N) = \frac{1}{N!}.$$

En dehors de $\{1, \dots, N\}$, la probabilité est nulle. Toutes les probabilités sont positives et leur somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) + \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{N!} + \frac{1}{N!} = 1.$$

Cette vérification contrôle en particulier la masse au dernier rang, qui n'est pas donnée par la formule des rangs précédents.

La variable X_N est bornée par N , donc intégrable. Le préliminaire, appliqué avec $n = N$, donne :

$$E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N > k) - NP(X_N > N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!}.$$

En décalant l'indice :

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}.$$

Q3. Limite des espérances.

La série exponentielle donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1/k! = e.$$

Les espérances de Q_2 sont ses sommes partielles sans le terme $k = 0$, donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N) = e - 1.$$

Il s'agit d'un passage à la limite dans les sommes partielles d'une série connue, et non d'un échange général entre une limite et une espérance.

Q4. Loi limite et espérance de X .

Fixons $k \geq 1$. Pour tout $N > k$, on a $P(X_N = k) = k/(k+1)!$. Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X_N = k) = a_k, \quad a_k = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Ces nombres sont positifs. La somme partielle est télescopique :

$$\sum_{k=1}^m a_k = 1 - \frac{1}{(m+1)!} \rightarrow 1.$$

Ils définissent donc une loi sur $\mathbb{N}^*$. Pour construire une variable de cette loi, on peut prendre l'univers discret $\mathbb{N}^*$, attribuer à chaque entier k la probabilité a_k , et définir $X(k) = k$.

Méthode 1 — Calcul du moment à partir de la loi.

Comme $0 \leq ka_k \leq k/k!$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k/k! = \sum_{j=0}^{+\infty} 1/j! = e,$$

la série du premier moment converge. La variable X , positive, est donc intégrable.

On peut alors séparer les deux séries convergentes :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}.$$

La première vaut e . Pour la seconde, l'identité $k/(k+1)! = 1/k! - 1/(k+1)!$ donne une somme télescopique égale à 1. On conclut :

$$E(X) = e - 1.$$

Méthode 2 — Probabilités de dépassement et préliminaire.

Pour $n \geq 0$, la sommation télescopique de la loi donne :

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Le préliminaire fournit, pour $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^m kP(X = k) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(k+1)!} - \frac{m}{(m+1)!}.$$

Le premier terme tend vers $e - 1$, et $0 \leq m/(m+1)! \leq 1/m! \rightarrow 0$. La série positive du premier moment converge donc vers $e - 1$, ce qui établit à la fois l'intégrabilité et la valeur de l'espérance.

Les deux méthodes montrent ainsi :

$$E(X) = e - 1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N).$$

Cette égalité résulte des deux calculs explicites. La convergence des probabilités ponctuelles ne suffit pas, à elle seule, à justifier une convergence des espérances.

Q5. Fonction Python calculant l'espérance.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On utilise la formule de Q2 et on calcule les termes $1/k!$ successivement, sans recalculer les factorielles :

Python

```
def esperance_sans_remise(N):
    terme = 1.0
    somme = 0.0
    for k in range(1, N + 1):
        terme = terme / k
        somme = somme + terme
    return somme
```

Aucune importation n'est nécessaire. Après l'étape k , la variable `terme` vaut numériquement $1/k!$ et `somme` vaut la somme de $1/j!$ pour $1 \leq j \leq k$. La boucle inclut bien N puisque la borne supérieure de `range` est exclusive.

Le code a été exécuté. Pour $N = 3$, il renvoie approximativement 1,666666666667, conformément à $1 + 1/2 + 1/6 = 5/3$. Pour $N = 10$, il renvoie approximativement 1,718281801146.

Partie III

Les tirages avec remise sont indépendants et uniformes sur $\{1, \dots, N\}$. Chaque suite de n numéros a donc la probabilité N^{-n} . Cette hypothèse est explicitée dans la version adaptée.

Q0. Convergence absolue d'une série à facteur géométrique.

Posons $r = |q| \in [0, 1[$. La série des valeurs absolues a pour terme $n^\alpha r^n$. Si $r = 0$, tous ces termes sont nuls, donc la convergence est immédiate. Supposons $0 < r < 1$.

Méthode 1 — Comparaison à une série géométrique.

Choisissons $\rho = \sqrt{r}$, de sorte que $r < \rho < 1$. Le quotient entre le terme étudié et ρ^n est :

$$\frac{n^\alpha r^n}{\rho^n} = n^\alpha \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Son logarithme vaut $\alpha \ln n + n \ln(r/\rho)$. Comme $\ln n/n \rightarrow 0$ et $\ln(r/\rho) < 0$, ce logarithme tend vers $-\infty$. Le quotient tend donc vers 0.

À partir d'un certain rang, $0 \leq n^\alpha r^n \leq \rho^n$. La série géométrique de raison $\rho \in]0, 1[$ converge ; la série étudiée converge par comparaison. Ainsi la série de terme $n^\alpha r^n$ est absolument convergente.

Méthode 2 — Comparaison à une série de Riemann.

De même, $n^{\alpha+2} r^n \rightarrow 0$, car son logarithme $(\alpha + 2) \ln n + n \ln r$ tend vers $-\infty$. Donc :

$$n^\alpha r^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les termes sont positifs et la série

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge. La comparaison par négligeabilité conclut à nouveau à la convergence absolue. Les deux preuves utilisent les croissances comparées, avec respectivement une série géométrique et une série de Riemann comme majorante.

Q1. Probabilité d'une suite croissante au sens large.

Les N^n suites possibles de longueur n sont équiprobables. Les suites satisfaisant $u_1 \leq \dots \leq u_n$ sont exactement les suites comptées dans I.Q2 avec les paramètres $p = n$ et $q = N$. Leur nombre est $\binom{N+n-1}{n}$. On en déduit :

$$v_n = \frac{1}{N^n} \binom{N+n-1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Cette formule donne aussi $v_1 = N/N = 1$, conformément à la convention du sujet. La croissance au sens large est nécessaire ici, puisque les tirages avec remise peuvent produire des égalités.

Q2. Équivalent, convergences et interprétation.

Dans cette question, N reste fixé tandis que $n \rightarrow +\infty$. La symétrie du coefficient binomial et la formule factorielle donnent :

$$\binom{N+n-1}{n} = \binom{N+n-1}{N-1} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+N-1)}{(N-1)!}.$$

Après division par $n^{N-1}/(N-1)!$, on obtient le produit fini :

$$\frac{\binom{N+n-1}{n}}{n^{N-1}/(N-1)!} = \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{j}{n}\right) \rightarrow 1.$$

Ainsi :

$$\binom{N+n-1}{n} \sim \frac{n^{N-1}}{(N-1)!},$$

et, par multiplication par $N^{-n} > 0$:

$$v_n \sim \frac{n^{N-1}}{(N-1)!} N^{-n}, \quad nv_n \sim \frac{n^N}{(N-1)!} N^{-n}.$$

Les termes de ces séries sont positifs. Q_0 , appliquée avec $q = 1/N \in]0, 1[$ et les exposants $N - 1$ et N , établit la convergence des deux séries de comparaison. Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs donne donc la convergence de

$$\sum v_n$$

et de

$$\sum nv_n.$$

Posons $F_n = \{u_1 \leq \dots \leq u_n\}$. Les événements vérifient $F_{n+1} \subset F_n$, donc $v_{n+1} \leq v_n$ et $w_n = v_n - v_{n+1} \geq 0$. Pour $m \geq 1$, la somme est télescopique :

$$\sum_{n=1}^m w_n = v_1 - v_{m+1} = 1 - v_{m+1}.$$

Puisque la série

$$\sum v_n$$

converge, son terme général tend vers 0. Il en résulte :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1.$$

L'événement $F_n \setminus F_{n+1}$ signifie que les n premiers numéros sont croissants au sens large, puis que $u_n > u_{n+1}$: la première descente est donc à l'indice n . Sa probabilité est w_n . Ces événements sont disjoints et leurs probabilités ont pour somme 1 ; une première descente apparaît donc presque sûrement.

Q3. Existence et espérance de Z_N .

L'événement de n'observer aucune descente est $\bigcap_{n \geq 1} F_n$. Les événements F_n sont décroissants et $P(F_n) = v_n \rightarrow 0$. La continuité monotone des probabilités donne :

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = 0.$$

Sur le complémentaire, l'ensemble des indices de descente est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$; il possède un plus petit élément. Définissons Z_N comme cet élément et attribuons-lui la valeur 1 sur l'événement négligeable précédent. Cette modification ne change aucune probabilité.

Question adaptée au programme actuel : la définition de Z_N est complétée sur l'événement de probabilité nulle où aucune descente n'apparaît ; l'identification au premier indice est presque sûre.

La loi et les probabilités de dépassement sont :

$$P(Z_N = n) = w_n = v_n - v_{n+1}, \quad n \geq 1,$$

$$P(Z_N > m) = v_{m+1}, \quad m \geq 0.$$

Pour $m = 0$, cette dernière formule utilise $v_1 = 1$.

Comme $0 \leq nw_n \leq nv_n$ et que la série

$$\sum nv_n$$

converge par Q2, le premier moment absolu de Z_N existe. La variable Z_N est donc intégrable.

Appliquons le préliminaire avec une borne m :

$$\sum_{n=1}^m nP(Z_N = n) = \sum_{j=0}^{m-1} P(Z_N > j) - mP(Z_N > m) = \sum_{n=1}^m v_n - mv_{m+1}.$$

La convergence de

$$\sum nv_n$$

implique $(m+1)v_{m+1} \rightarrow 0$, donc aussi $mv_{m+1} \rightarrow 0$. En passant à la limite dans les sommes partielles, on conclut :

$$E(Z_N) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

Chaque passage à la limite concerne une série dont la convergence a été justifiée ; aucun échange automatique entre une limite et une espérance n'est utilisé.

Q4. Calcul de la somme par Taylor-Lagrange.

a) Domaine, régularité et dérivées.

La fonction $f(x) = (1+x)^{-N}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur ce domaine, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des deux intervalles du domaine.

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \neq -1$, montrons par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{(1+x)^{N+n}}.$$

Au rang $n = 0$, le quotient de factorielles vaut 1 et on retrouve f . Si la formule vaut au rang n , la dérivation de $(1+x)^{-N-n}$ multiplie par $-(N+n)$ et abaisse l'exposant de 1. Ainsi :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(N+n)!}{(N-1)!} (1+x)^{-N-n-1}.$$

La formule est donc établie à tous les rangs, y compris $n = 0$.

b) Inégalité de Taylor-Lagrange, espérance et limite.

Fixons $m \geq 1$. Le segment $[-1/N, 0]$ est contenu dans $] -1, +\infty[$ puisque $N \geq 3$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur un ouvert contenant ce segment.

Taylor-Lagrange, avec développement au point 0 et évaluation au point $-1/N$, donne :

$$\left| f\left(-\frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \left(-\frac{1}{N}\right)^n \right| \leq \frac{\max_{x \in [-1/N, 0]} |f^{(m+1)}(x)|}{(m+1)!N^{m+1}}.$$

Par a), les termes du polynôme de Taylor valent :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \left(-\frac{1}{N}\right)^n = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!N^n} = \frac{1}{N^n} \binom{N+n-1}{n}.$$

Pour $n = 0$, ce terme est 1 ; pour $n \geq 1$, il vaut v_n par Q1. De plus, sur le segment considéré, $1+x > 0$ et :

$$|f^{(m+1)}(x)| = \frac{(N+m)!}{(N-1)!} (1+x)^{-N-m-1}.$$

Cette expression est maximale au point $x = -1/N$. Le majorant du reste devient donc :

$$\frac{(N+m)!}{(N-1)!(m+1)!N^{m+1}(1-1/N)^{N+m+1}} = \frac{v_{m+1}}{(1-1/N)^{N+m+1}}.$$

On a ainsi établi exactement l'inégalité demandée :

$$\left| \frac{1}{(1-1/N)^N} - 1 - \sum_{n=1}^m v_n \right| \leq \frac{v_{m+1}}{(1-1/N)^{N+m+1}}.$$

Il reste à vérifier que le membre droit tend vers 0 à N fixé. Grâce à Q1, il s'écrit :

$$\frac{v_{m+1}}{(1-1/N)^{N+m+1}} = \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \binom{N+m}{m+1} \frac{1}{(N-1)^{m+1}}.$$

Par Q2 appliquée à l'indice $m + 1$, le coefficient binomial est équivalent à $(m + 1)^{N-1}/(N - 1)!$. Comme $N \geq 3$, la raison $1/(N - 1)$ est strictement inférieure à 1. Les croissances comparées établies en Q0 montrent que le majorant tend vers 0.

La série

$$\sum v_n$$

étant convergente, on peut passer à la limite lorsque $m \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité. Avec Q3, on obtient :

$$E(Z_N) = \frac{1}{(1 - 1/N)^N} - 1.$$

Pour la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, posons $a_N = (1 - 1/N)^{-N} > 0$. La dérivabilité de $u \mapsto \ln(1 - u)$ au point 0 donne :

$$\frac{\ln(1 - u)}{u} \rightarrow -1 \quad \text{lorsque } u \rightarrow 0.$$

En prenant $u = 1/N$, il en résulte $\ln a_N = -N \ln(1 - 1/N) \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle, $a_N \rightarrow e$. Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(Z_N) = e - 1.$$

L'argument de Taylor porte uniquement sur une fonction régulière et un reste explicitement majoré ; aucune théorie générale des séries entières n'est nécessaire.

Q5. Loi limite de Z_N et comparaison avec X .

Fixons un entier $k \geq 1$ et faisons cette fois varier N . La formule de Q1 s'écrit :

$$v_k = \frac{N(N + 1) \cdots (N + k - 1)}{k! N^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{N}\right).$$

Il s'agit d'un produit de k facteurs, avec k fixé. Chaque facteur tend vers 1, donc $v_k \rightarrow 1/k!$ et, de même, $v_{k+1} \rightarrow 1/(k + 1)!$. La loi de Q3 donne :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(Z_N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k + 1)!} = \frac{k}{(k + 1)!}.$$

Ces nombres définissent déjà la loi de X construite dans II.Q4. Ils sont positifs et leur somme vaut 1 par télescopage. Il existe donc une variable Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant ces probabilités ponctuelles.

Les variables Z et X ont la même loi. En particulier, elles ont toutes deux une espérance finie égale à $e - 1$. L'égalité en loi ne signifie pas qu'elles sont nécessairement égales presque sûrement lorsqu'elles sont réalisées sur un même espace.

Les temps d'arrêt sans remise et avec remise ont des lois différentes pour un N fini, mais leurs probabilités ponctuelles convergent vers la même loi quand $N \rightarrow +\infty$.

Q6. Simulation du premier indice de descente.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On génère les deux premiers tirages, puis on poursuit tant que le numéro suivant est supérieur ou égal au précédent. Le code complet est :

Python

```
import numpy as np

def simule_descente(N):
    precedent = np.random.randint(1, N + 1)
    suivant = np.random.randint(1, N + 1)
    r = 1
    while precedent <= suivant:
        precedent = suivant
        suivant = np.random.randint(1, N + 1)
        r = r + 1
    return r
```

La commande `np.random.randint(1, N + 1)` renvoie un entier uniforme parmi $1, \dots, N$: la borne supérieure est exclusive. Les appels successifs simulent les tirages indépendants avec remise.

À chaque test de boucle, `precedent` représente u_r et `suivant` représente u_{r+1} . Lorsque la boucle se termine, on a $u_r > u_{r+1}$ et tous les tests précédents ont vérifié $u_j \leq u_{j+1}$.

L'entier renvoyé est donc exactement le premier indice de descente. Une égalité entre deux tirages ne provoque pas l'arrêt.

La terminaison a lieu presque sûrement, comme démontré en Q3. Le code a été exécuté et vérifié sur des suites de tirages imposées et sur des tirages aléatoires. Une simulation illustre le modèle ; elle ne remplace pas la preuve de terminaison ni le calcul exact de l'espérance.

Partie IV

Q1. Tirages strictement supérieurs à une valeur donnée.

Fixons $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, N\}$. Pour chaque tirage, il y a $N - k$ numéros strictement supérieurs à k . Les n tirages concernés sont indépendants, donc :

$$P(\forall i \in \{1, \dots, n\}, k < u_{i+1}) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$$

Pour $k = N$, cette probabilité vaut 0, puisque l'événement est impossible.

Les événements $\{u_1 = k\}$ forment un système complet, chacun de probabilité $1/N$. Les tirages $u_2, \dots, u_{n+1}$ sont indépendants de u_1 ; conditionnellement à $u_1 = k$, la probabilité de A_n est donc celle calculée ci-dessus. Les probabilités totales donnent :

$$x_n = P(A_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{N-k}{N}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

En posant $j = N - k$, on peut aussi écrire :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^n.$$

La première écriture correspond au conditionnement par le premier jeton ; la seconde sera utile pour une somme de Riemann.

Q2. Somme de la série des probabilités x_n .

Pour $1 \leq k \leq N$, posons $r_k = (N - k)/N \in [0, 1[$. On a

$$x_n = N^{-1} \sum_{k=1}^N r_k^n$$

pour $n \geq 1$. Cette formule vaut aussi pour $n = 0$, avec la convention $r_k^0 = 1$, car $x_0 = 1$.

Pour $m \geq 0$, les deux sommes ci-dessous sont finies ; leur ordre peut donc être échangé :

$$\sum_{n=0}^m x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^m r_k^n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1 - r_k^{m+1}}{1 - r_k}.$$

Les dénominateurs sont strictement positifs, puisque $1 - r_k = k/N > 0$. À N fixé, il y a seulement N termes, et chaque r_k^{m+1} tend vers 0 lorsque $m \rightarrow +\infty$. On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 - r_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{N}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

La limite est finie, ce qui prouve la convergence de la série. En notant

$$H_N = \sum_{k=1}^N 1/k,$$

sa somme vaut H_N .

Aucun échange entre deux sommes infinies n'est utilisé : on échange des sommes finies, puis on passe à la limite dans une somme contenant un nombre fixé de termes.

Q3. Existence du premier nouveau minimum au sens large.

Soit $n \geq 1$. Montrons que l'absence d'arrêt aux indices $1, \dots, n$ équivaut à A_n .

Si aucun arrêt n'a lieu, on a d'abord $u_2 > u_1$. Le minimum des deux premiers termes reste donc u_1 . À l'étape suivante, l'absence d'arrêt impose $u_3 > \min(u_1, u_2) = u_1$, et le

minimum reste encore u_1 . Par récurrence, tous les numéros $u_2, \dots, u_{n+1}$ sont strictement supérieurs à u_1 , ce qui est précisément A_n .

Réciproquement, si A_n se réalise, tous ces numéros sont strictement supérieurs à u_1 . À chaque étape $r \leq n$, le minimum de $u_1, \dots, u_r$ est donc u_1 et $u_{r+1} > u_1$; la condition d'arrêt ne se réalise à aucun de ces indices.

Les événements A_n sont décroissants, et l'événement de n'observer aucun arrêt est $\bigcap_{n \geq 1} A_n$. La convergence de

$$\sum x_n,$$

démontrée en Q2, implique $x_n \rightarrow 0$. Par continuité monotone des probabilités :

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Le premier indice d'arrêt existe donc presque sûrement. On définit T_N comme ce premier indice et on lui attribue la valeur 1 sur l'événement négligeable où aucun arrêt ne se produit.

Question adaptée au programme actuel : cette convention complète la définition sur tout l'univers, sans changer la loi. La condition $u_{r+1} \leq \min(u_1, \dots, u_r)$ inclut l'égalité avec le minimum précédent.

L'équivalence établie donne, à un événement négligeable près :

$$\{T_N > n\} = A_n, \quad n \geq 1.$$

Ainsi $P(T_N > n) = x_n$ pour $n \geq 0$, avec $x_0 = 1$. En particulier, pour $r \geq 1$:

$$P(T_N = r) = x_{r-1} - x_r.$$

Q4. Espérance de T_N et limite.

Méthode 1 — Préliminaire et somme des probabilités de dépassement.

Pour $m \geq 1$, le préliminaire donne :

$$\sum_{r=1}^m rP(T_N = r) = \sum_{n=0}^{m-1} x_n - mx_m.$$

À N fixé, x_m est une moyenne de N termes géométriques r_k^m , avec $0 \leq r_k < 1$. Pour chaque k , les croissances comparées donnent $mr_k^m \rightarrow 0$; lorsque $r_k = 0$, le terme est nul pour $m \geq 1$. La somme étant finie, $mx_m \rightarrow 0$.

La série

$$\sum x_n$$

converge vers H_N par Q2. Le membre droit tend donc vers H_N . La série positive du premier moment de T_N converge; elle est aussi la série du premier moment absolu, puisque $T_N \geq 1$. La variable est ainsi intégrable et :

$$E(T_N) = H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Méthode 2 — Conditionnement par le premier jeton.

Conditionnellement à $u_1 = k$, tant que l'expérience continue, le minimum des numéros déjà tirés reste k , comme démontré en Q3. L'arrêt se produit au premier tirage suivant dont le numéro est inférieur ou égal à k .

Chaque nouveau tirage, indépendant des précédents, satisfait cette condition avec la probabilité k/N . L'indice T_N , qui compte les tirages après le premier jusqu'à cette

apparition, suit donc conditionnellement une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre k/N . Pour $k < N$, son espérance conditionnelle vaut N/k . Pour $k = N$, le premier tirage suivant provoque nécessairement l'arrêt : $T_N = 1$, et son espérance conditionnelle vaut encore $N/k = 1$.

Les N espérances conditionnelles sont finies. On peut justifier l'intégrabilité avant de prendre l'espérance totale en décomposant les sommes partielles du premier moment selon les N événements $\{u_1 = k\}$; le passage à la limite dans cette somme finie donne une somme de moments conditionnels finis. La formule de l'espérance totale est donc applicable et fournit :

$$E(T_N) = \sum_{k=1}^N P(u_1 = k) E(T_N \mid u_1 = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{N}{k} = H_N.$$

La première méthode utilise la somme des probabilités de dépassement calculée en Q2 ; la seconde explique le résultat par un mélange fini de lois géométriques.

Pour la limite, la décroissance de $t \mapsto 1/t$ sur $[1, +\infty[$ donne, pour tout $k \geq 1$,

$$1/k \geq \int_k^{k+1} dt/t. \text{ En sommant :}$$

$$H_N \geq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t} = \ln(N+1) \longrightarrow +\infty.$$

On conclut :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(T_N) = +\infty.$$

Q5. Loi limite de T_N et absence d'espérance finie.

Dans cette question, n est fixé et N tend vers l'infini. Par Q1 :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^n.$$

Pour $n \geq 1$, cette expression est une somme de Riemann pour la fonction continue $t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$, avec les extrémités gauches d'une subdivision régulière. On a donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} x_n = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Pour $n = 0$, on a directement $x_0 = 1$, ce qui est aussi $1/(n+1)$.

Fixons maintenant $k \geq 1$. La formule de la loi dans Q3 et les deux limites précédentes donnent :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(T_N = k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ces valeurs sont strictement positives et leur somme est égale à 1, puisque :

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} \rightarrow 1.$$

Elles définissent donc une loi sur $\mathbb{N}^*$. Comme dans II.Q4, on peut construire T comme l'application identité sur un univers discret donnant la probabilité $1/(k(k+1))$ à l'entier k .

Méthode 1 — Divergence de la série du premier moment.

La série du premier moment absolu de T est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(T = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Cette série diverge comme la série harmonique. Ainsi T n'est pas intégrable et n'a pas d'espérance finie ; sa moyenne au sens étendu est $+\infty$.

Méthode 2 — Probabilités de dépassement et préliminaire.

Le télescopage de la loi donne, pour $n \geq 0$:

$$P(T > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}.$$

Le préliminaire donne donc :

$$\sum_{k=1}^m kP(T = k) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n+1} - \frac{m}{m+1} = H_m - \frac{m}{m+1}.$$

Le terme H_m tend vers $+\infty$ et le second terme reste inférieur à 1. Les sommes partielles du premier moment tendent donc vers $+\infty$, ce qui donne la même conclusion.

La loi limite est bien une loi de probabilité, mais ses probabilités de dépassement décroissent trop lentement pour permettre une espérance finie. Les deux méthodes le montrent respectivement à partir des probabilités ponctuelles et des probabilités de dépassement.

Relevé des adaptations

- II, préambule et Q1 : explicitation de l'équiprobabilité du tirage sans remise et de la plage $1 \leq r \leq N - 1$ pour les comparaisons entre deux termes consécutifs.
- II.Q5 : demande convertie en Python. Code adapté en Python, avec calcul successif des inverses de factorielles.
- III, préambule : précision que les tirages avec remise sont indépendants et uniformes ; ces propriétés sont nécessaires aux calculs des probabilités.

- III.Q3 et IV.Q3 : définition des temps d'arrêt complétée par la valeur 1 sur les événements négligeables de non-arrêt. L'égalité avec le premier indice est presque sûre ; aucune probabilité ni aucune espérance n'est modifiée.
- III.Q6 : langage de simulation précisé comme Python. Code adapté en Python, avec la convention exacte de borne exclusive de `np.random.randint` et un arrêt à la première descente stricte.
- IV.Q5 : formulation précisée en « n'a pas d'espérance finie » ; la variable positive a un premier moment divergent et une moyenne étendue égale à $+\infty$.