



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1980

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie 1

1. On définit deux endomorphismes j et k de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement les matrices J et K définies par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que les endomorphismes j et k commutent.
1. (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des endomorphismes j et k .
1. (c) On note E_4 le sous-espace propre de j associé à la valeur propre 4. Montrer que k laisse E_4 et $\text{Ker}(j)$ invariants.
1. (d) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices des endomorphismes j et k sont diagonales. Remarquer qu'une telle base est formée de vecteurs propres à la fois pour j et k .

On note désormais E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
3. Dédurre de la question 1 une matrice P inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de a et de b , telle que $P^{-1}M(a, b)P$ soit diagonale. Quelles sont les valeurs propres de $M(a, b)$?
4. (a) Montrer que le produit de deux éléments de E est encore dans E .
4. (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$M(a, b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n).$$

Partie 2

On considère un damier constitué de neuf cases $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, I_1, I_2, I_3, I_4$, disposées comme suit :

P_2	I_1	P_3
I_4	P_1	I_2
P_4	I_3	P_5

Un pion saute à l'intérieur de ce damier de manière aléatoire de la case sur laquelle il se trouve vers une des autres cases qui possède avec celle-ci un côté commun.

Conditionnellement à toute l'histoire du déplacement, chaque case voisine de la case actuelle est choisie avec la même probabilité ; ce choix ne dépend que de la case actuelle.

Par exemple :

- de P_1 , le pion saute avec équiprobabilité vers I_1, I_2, I_3 ou I_4 ;
- de P_2 , le pion saute avec équiprobabilité vers I_1 ou I_4 ;

- de I_1 , le pion saute avec équiprobabilité vers P_1, P_2 ou P_3 .

On suppose que le pion se situe au départ, c'est-à-dire avant le premier saut, sur l'une des cases P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .

1. Dans ces conditions, sur quelles cases peut se trouver le pion après un nombre pair de sauts? Après un nombre impair de sauts?

Dans toute la suite du problème, on utilisera les notations suivantes :

- Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on désigne par $p_{k,0}$ la probabilité pour que le pion se situe sur P_k au départ et, pour tout entier $n \geq 1$, par $p_{k,n}$ la probabilité pour qu'il se situe sur P_k à l'issue du $2n$ -ième saut.
- Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et tout entier $n \geq 1$, on désigne par $y_{k,n}$ la probabilité pour que le pion se situe sur I_k à l'issue du $(2n - 1)$ -ième saut.
- On note enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Pi_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ y_{3,n} \\ y_{4,n} \end{pmatrix}.$$

2. Montrer qu'il existe deux matrices $A \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telles que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$Y_n = A\Pi_{n-1}, \quad \Pi_n = BY_n.$$

3. (a) Calculer $G = AB$ et montrer que G appartient à E , ensemble défini dans la partie 1. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$G^n = M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2 \times 3^n} \right).$$

3. (b) On pose $F = BA$. Pour tout entier $n \geq 1$, donner une expression simple de F^n en fonction de A, B, G et n . Calculer alors F^n .
4. Soient r et s deux entiers naturels non nuls tels que $r < s$. Soient de plus $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ deux applications linéaires.
 4. (a) Montrer que $g \circ h$ et $h \circ g$ ont les mêmes valeurs propres réelles non nulles.
 4. (b) Montrer que 0 est valeur propre de $g \circ h$.
 4. (c) En déduire les valeurs propres de F et trouver les sous-espaces propres correspondants. En déduire que F est diagonalisable.
 4. (d) Remarquer que $\Pi_{n+1} = F\Pi_n$ pour tout entier naturel n . Montrer alors qu'il existe une loi de position initiale Π_0 , que l'on déterminera, telle que, pour tout $n \geq 1$, Π_n ne dépende pas de n .
5. (a) Quelle est la probabilité pour que le pion se situe sur P_1 à l'issue du $2n$ -ième saut, pour $n \geq 1$? Cette probabilité dépend-elle de la position initiale du pion? Ce résultat était-il prévisible?
5. (b) Soit $n \geq 1$. On note X_1 la variable aléatoire indiquant le nombre de passages sur P_1 à l'issue des sauts $1, 2, \dots, 2n$, sans compter la position initiale. Déterminer la loi de X_1 , ainsi que son espérance et sa variance.
5. (c) Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_1 égale au nombre de sauts nécessaires pour obtenir le premier passage par P_1 , lorsque le pion se situe au départ sur l'une des cases P_2, P_3, P_4, P_5 . On pourra poser $Z_1 = +\infty$ si aucun passage n'a lieu, et vérifier que cet événement a une probabilité nulle avant de calculer les moments.

5. (d) Quelle est, sous les mêmes hypothèses qu'en 5. (c), la probabilité pour que le pion passe par P_1 ?
6. (a) Quelle est, en fonction de la position initiale du pion, la probabilité pour qu'il se situe sur P_2 à l'issue du $2n$ -ième saut, pour $n \geq 1$?
6. (b) Déterminer, en fonction de la position initiale du pion, l'espérance mathématique du nombre X_2 de passages par P_2 à l'issue des sauts $1, 2, \dots, 2n$, sans compter la position initiale.
6. (c) Soient n et k deux entiers naturels non nuls. On suppose que le pion se situe au départ sur P_1 . Calculer la probabilité pour que le pion se trouve sur P_2 après $2(n + k)$ sauts, sachant qu'il n'était pas sur P_2 à l'issue du $2n$ -ième saut.
7. On suppose toujours que le pion part de P_1 . Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2 définie en 6. (b), dans le cas $n = 3$.