



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1980

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^4$ à sa colonne de coordonnées dans la base canonique. Pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, posons $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Les matrices du sujet donnent :

$$Jx = s(1, 1, 1, 1), \quad Kx = (x_1 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_1, x_4 - x_2).$$

1. (a) Commutation.

Les coordonnées de Kx ont une somme nulle, donc $JKx = 0$ pour tout x . D'autre part, les quatre coordonnées de Jx sont égales et K annule tout vecteur de cette forme, donc $KJx = 0$.

Ainsi $JK = KJ = 0$, et les endomorphismes j et k commutent.

1. (b) Valeurs propres et sous-espaces propres.

Pour J .

Posons $e = (1, 1, 1, 1)$. On a $Je = 4e$, donc 4 est une valeur propre et $\text{Vect}(e)$ est inclus dans son espace propre.

Si $Jx = \lambda x$ avec $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, l'identité $Jx = se$ implique que x est proportionnel à e . Cela impose $\lambda = 4$. Son espace propre est donc :

$$E_4(j) = \text{Vect}(1, 1, 1, 1).$$

Pour $\lambda = 0$, l'équation $Jx = 0$ équivaut à $s = 0$. Ainsi :

$$E_0(j) = \text{Ker}(j) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

C'est un hyperplan de dimension 3, par exemple engendré par $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$ et $(0, 0, 1, -1)$. Les valeurs propres de j sont exactement 0 et 4.

Pour K .

L'équation $Kx = 0$ équivaut à $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_4$. Donc :

$$E_0(k) = \{(u, v, u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

L'équation $Kx = 2x$ équivaut à $x_3 = -x_1$ et $x_4 = -x_2$. Donc :

$$E_2(k) = \{(u, v, -u, -v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)).$$

Ces deux espaces ont chacun dimension 2 et leur intersection est réduite à 0. Ils fournissent donc une somme directe égale à $\mathbb{R}^4$, ce qui établit que les seules valeurs propres de k sont 0 et 2.

On peut également contrôler cette dernière restriction par $K^2 = 2K$: pour tout vecteur propre de valeur λ , elle implique $\lambda^2 = 2\lambda$, donc $\lambda \in \{0, 2\}$. Il s'agit de l'action d'un polynôme de matrice sur un vecteur propre, autorisée dans le référentiel.

1. (c) Stabilité des espaces propres de j .

Si $x \in E_4(j)$, la commutation donne $J(Kx) = K(Jx) = K(4x) = 4Kx$. Ainsi $Kx \in E_4(j)$, y compris si $Kx = 0$.

Si $x \in \text{Ker}(j)$, on a $J(Kx) = K(Jx) = 0$, donc $Kx \in \text{Ker}(j)$.

Les deux sous-espaces sont donc stables par k . Dans ce cas particulier, K annule même $E_4(j)$ puisque cet espace est engendré par e .

1. (d) Base commune de vecteurs propres.

Choisissons :

$$e = (1, 1, 1, 1), \quad w = (1, -1, 1, -1), \quad u = (1, 0, -1, 0), \quad v = (0, 1, 0, -1).$$

Leurs images sont :

$$Je = 4e, \quad Jw = Ju = Jv = 0, \quad Ke = Kw = 0, \quad Ku = 2u, \quad Kv = 2v.$$

Ces quatre vecteurs sont non nuls et deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel. Leurs normes au carré sont respectivement 4, 4, 2, 2. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : en prenant le produit scalaire d'une combinaison nulle avec chacun de ses vecteurs, on obtient que chaque coefficient est nul. Une famille libre de quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ est une base.

Dans la base $\mathcal{B} = (e, w, u, v)$, les matrices sont donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(j) = \text{diag}(4, 0, 0, 0), \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(k) = \text{diag}(0, 0, 2, 2).$$

La diagonalisation simultanée est ici construite explicitement ; aucun théorème général de diagonalisation simultanée n'est supposé connu.

2. Structure de E .

En comparant les coefficients, on a $M(a, b) = aJ + bK$. Ainsi :

$$E = \text{Vect}(J, K).$$

L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Pour vérifier la liberté de (J, K) , supposons $aJ + bK = 0$. Le coefficient de ligne 1, colonne 2, vaut a , donc $a = 0$. Le coefficient de ligne 1, colonne 1, vaut alors b , donc $b = 0$. La famille est libre.

Par conséquent, (J, K) est une base de E et $\dim E = 2$.

3. Matrice de passage et valeurs propres de $M(a, b)$.

La matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes forment une base, donc P est inversible. Elle est indépendante de a et b . La question 1. (d) et $M(a, b) = aJ + bK$ donnent :

$$P^{-1}M(a, b)P = \text{diag}(4a, 0, 2b, 2b).$$

Les valeurs propres sont les valeurs distinctes figurant dans l'ensemble $\{4a, 0, 2b\}$. Il faut regrouper les valeurs qui coïncident selon a et b .

Plus précisément, l'espace propre associé à une valeur λ est engendré par ceux des vecteurs e, w, u, v dont les valeurs respectives $4a, 0, 2b, 2b$ sont égales à λ . Cette description traite tous les cas : si $a = b = 0$, la matrice est nulle et son espace propre pour 0 est tout $\mathbb{R}^4$; si des valeurs coïncident sans que la matrice soit nulle, les espaces correspondants se regroupent.

4. (a) Produit de deux éléments de E .

On dispose de $JK = KJ = 0$. De plus, $J^2 = 4J$, car chaque coefficient de J^2 est une somme de quatre termes égaux à 1. Pour K , l'expression de Kx donne $K^2x = 2Kx$ pour tout x , donc $K^2 = 2K$.

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$M(a, b)M(c, d) = (aJ + bK)(cJ + dK) = acJ^2 + adJK + bcKJ + bdK^2,$$

d'où :

$$M(a, b)M(c, d) = 4acJ + 2bdK = M(4ac, 2bd) \in E.$$

Le produit de deux éléments de E appartient donc à E .

4. (b) Puissances.

Question adaptée au programme actuel : le domaine de l'exposant est précisé, avec $n \geq 1$. La formule ne concerne pas $n = 0$.

Méthode 1 — Récurrence à partir du produit.

Pour $n = 1$, la formule donne $M(a, b) = M(a, b)$. Supposons :

$$M(a, b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n).$$

La question 4. (a) donne alors :

$$M(a, b)^{n+1} = M(4 \times 4^{n-1}a^n a, 2 \times 2^{n-1}b^n b) = M(4^n a^{n+1}, 2^n b^{n+1}).$$

Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Diagonalisation.

Comme P est inversible et $P^{-1}M(a, b)P = D = \text{diag}(4a, 0, 2b, 2b)$, les produits successifs donnent $P^{-1}M(a, b)^n P = D^n$. Pour $n \geq 1$:

$$D^n = \text{diag}((4a)^n, 0, (2b)^n, (2b)^n).$$

Or la diagonalisation de $M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n)$ possède exactement ces mêmes coefficients diagonaux. Les deux matrices sont donc égales.

La récurrence utilise directement la fermeture par produit ; la diagonalisation explique les deux facteurs de croissance 4 et 2. Les deux méthodes restent valables lorsque a ou b est nul. Pour $n = 0$, la puissance est I_4 , qui n'appartient pas à E : toute matrice de E annule le vecteur non nul w .

Partie 2

Question adaptée au programme actuel dans le préambule : la loi du saut suivant est explicitée conditionnellement à toute l'histoire. Elle dépend uniquement de la case actuelle. Les calculs suivants utilisent cette propriété par probabilités totales et probabilités composées ; ils ne supposent pas indépendantes les positions successives du pion.

1. Parité des positions.

Les voisins par un côté de chaque case P_i sont des cases I_j , et les voisins de chaque case I_j sont des cases P_i . Chaque saut change donc de famille de cases.

Le départ étant sur une case P_i , une récurrence sur le nombre de sauts montre que le pion est sur une des cases $P_1, \dots, P_5$ après un nombre pair de sauts, et sur une des cases $I_1, \dots, I_4$ après un nombre impair de sauts. Cela inclut le départ, qui correspond à zéro saut.

2. Matrices de transition A et B .

Les vecteurs de probabilités sont des colonnes. Le coefficient $A_{i,j}$ est donc la probabilité de passer de P_j à I_i , et le coefficient $B_{j,i}$ celle de passer de I_i à P_j .

Depuis P_1 , les quatre sorties ont chacune la probabilité $1/4$; depuis un coin, ses deux sorties ont chacune la probabilité $1/2$. En suivant l'ordre des cases du sujet :

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque case I_i a trois voisins, chacun choisi avec probabilité $1/3$. Ainsi :

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque i , les probabilités totales selon la position après $2n - 2$ sauts donnent

$$y_{i,n} = \sum_{j=1}^5 A_{i,j} p_{j,n-1}.$$

De même, les probabilités totales selon la position après $2n - 1$ sauts donnent

$$p_{j,n} = \sum_{i=1}^4 B_{j,i} y_{i,n}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$:

$$Y_n = A \Pi_{n-1}, \quad \Pi_n = B Y_n.$$

Chaque colonne de A et de B est positive ou nulle et somme à 1, ce qui est cohérent avec des lois conditionnelles de transition.

3. (a) Calcul de G et de ses puissances.

Le produit de la ligne i de A par la colonne j de B donne :

$$G = AB = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $G_{1,1} = (1/4)(1/3) + (1/2)(1/3) + (1/2)(1/3) = 5/12$, tandis que $G_{1,3} = (1/4)(1/3) = 1/12$; les autres coefficients sont obtenus de la même manière en tenant compte des voisinages.

On reconnaît :

$$G = M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right),$$

car les coefficients diagonaux sont $1/4 + 1/6 = 5/12$, les coefficients opposés sont $1/4 - 1/6 = 1/12$, et les autres valent $1/4$.

La partie 1, question 4. (b), donne pour $n \geq 1$:

$$G^n = M \left(4^{n-1} \left(\frac{1}{4} \right)^n, 2^{n-1} \left(\frac{1}{6} \right)^n \right) = M \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2 \times 3^n} \right).$$

3. (b) Calcul de F^n .

Les dimensions permettent les produits suivants. Par associativité, pour $n \geq 1$:

$$F^n = (BA)^n = B(AB)^{n-1}A = BG^{n-1}A.$$

Pour $n = 1$, cette identité utilise $G^0 = I_4$. Le produit direct donne :

$$F = BA = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 2$, la formule des puissances de G donne :

$$F^n = \frac{1}{4}BJA + \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}BKA.$$

Pour détailler ce calcul, toutes les colonnes de A somment à 1, donc JA est la matrice rectangulaire dont tous les coefficients valent 1. Il en résulte :

$$BJA = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant les lignes opposées de A , on obtient :

$$KA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

puis :

$$BKA = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $t_n = 3^{1-n}$. En regroupant les deux contributions :

$$F^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1+t_n & 1 & 1 & 1-t_n \\ 1 & 1 & 1+t_n & 1-t_n & 1 \\ 1 & 1 & 1-t_n & 1+t_n & 1 \\ 1 & 1-t_n & 1 & 1 & 1+t_n \end{pmatrix}.$$

Cette formule obtenue pour $n \geq 2$ redonne exactement le produit direct F lorsque $n = 1$ et $t_1 = 1$. Elle est donc valable pour tout $n \geq 1$.

Il était indispensable de contrôler séparément $n = 1$: on ne peut pas prolonger la formule $G^m = M(1/4, 1/(2 \times 3^m))$ à $m = 0$, car sa matrice de droite n'est pas I_4 .

4. (a) Valeurs propres non nulles des deux compositions.

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $g \circ h$ et $x \in \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$ un vecteur tel que $g(h(x)) = \lambda x$. On a nécessairement $h(x) \neq 0$, sinon l'égalité donnerait $\lambda x = 0$.

En appliquant h :

$$(h \circ g)(h(x)) = h(g(h(x))) = h(\lambda x) = \lambda h(x).$$

Ainsi λ est une valeur propre de $h \circ g$.

Réciproquement, si $y \neq 0$ et $h(g(y)) = \lambda y$ avec $\lambda \neq 0$, alors $g(y) \neq 0$ et :

$$(g \circ h)(g(y)) = g(h(g(y))) = \lambda g(y).$$

Donc λ est une valeur propre de $g \circ h$. Les deux compositions ont exactement les mêmes valeurs propres réelles non nulles. Cette preuve ne concerne pas la valeur 0, pour laquelle les vecteurs transportés peuvent s'annuler.

4. (b) Valeur propre nulle de $g \circ h$.

Le théorème du rang appliqué à $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ donne :

$$\dim \text{Ker } h = s - \text{rg}(h) \geq s - r > 0.$$

Il existe donc $x \neq 0$ tel que $h(x) = 0$. Alors $(g \circ h)(x) = 0$, ce qui montre que 0 est une valeur propre de $g \circ h$.

4. (c) Valeurs propres et espaces propres de F .

Prenons $r = 4, s = 5$, g représentée par B et h par A . Alors $g \circ h$ est représentée par $F = BA$ et $h \circ g$ par $G = AB$.

La diagonalisation de la partie 1 donne pour $G = M(1/4, 1/6)$ les valeurs propres 1, 0 et $1/3$. D'après 4. (a), les valeurs propres non nulles de F sont donc 1 et $1/3$. D'après 4. (b), 0 est aussi valeur propre de F . Il n'y en a pas d'autres.

Déterminons les espaces propres sans déterminant. Pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, posons $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, $d = x_2 - x_5$ et $e' = x_3 - x_4$. La formule explicite de F donne :

$$Fx = \left(\frac{S}{3}, \frac{S}{6} + \frac{d}{6}, \frac{S}{6} + \frac{e'}{6}, \frac{S}{6} - \frac{e'}{6}, \frac{S}{6} - \frac{d}{6} \right).$$

La somme des coordonnées de Fx est S . Si $Fx = \lambda x$, on a donc $(\lambda - 1)S = 0$.

Pour $\lambda = 0$, l'équation $Fx = 0$ impose $S = 0$, $d = 0$ et $e' = 0$. Elle équivaut à $x_2 = x_5$, $x_3 = x_4$ et $x_1 = -2(x_2 + x_3)$. Ainsi :

$$E_0(F) = \text{Vect}((-2, 1, 0, 0, 1), (-2, 0, 1, 1, 0)),$$

de dimension 2.

Pour $\lambda = 1/3$, on a $S = 0$, puis $x_1 = 0$, $x_5 = -x_2$ et $x_4 = -x_3$. Réciproquement, tout vecteur de cette forme vérifie $Fx = x/3$. Donc :

$$E_{1/3}(F) = \text{Vect}((0, 1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, -1, 0)),$$

de dimension 2.

Pour $\lambda = 1$, on obtient $x_1 = S/3$. En soustrayant les équations des coordonnées 2 et 5, on obtient $d = d/3$, donc $d = 0$. De même, $e' = 0$. Les quatre dernières coordonnées valent alors $S/6$. Ainsi :

$$E_1(F) = \text{Vect}(2, 1, 1, 1, 1),$$

de dimension 1.

Les espaces propres de valeurs distinctes sont en somme directe. La somme de leurs dimensions est $2 + 2 + 1 = 5$, donc elle est égale à $\mathbb{R}^5$. La matrice F est ainsi diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. (d) Loi initiale donnant des lois constantes.

Les relations de 2 donnent, pour $n \geq 0$:

$$\Pi_{n+1} = B A \Pi_n = F \Pi_n.$$

Une loi initiale de probabilité est une colonne à coefficients positifs ou nuls et dont la somme est 1. Le vecteur de l'espace propre $E_1(F)$ normalisé de cette manière est :

$$\Pi_* = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Il vérifie $F\Pi_* = \Pi_*$. Si $\Pi_0 = \Pi_*$, une récurrence donne $\Pi_n = \Pi_*$ pour tout $n \geq 0$. Cela fournit la loi initiale demandée. C'est la seule loi initiale pour laquelle les lois sont constantes dès $n = 0$, car tout vecteur fixé par F appartient à $E_1(F)$ et la normalisation y est unique.

L'énoncé ne demande toutefois la constance que pour $n \geq 1$. Il admet alors d'autres lois initiales. La formule de F^n montre que toutes les lois Π_0 telles que $p_{2,0} = p_{5,0}$ et $p_{3,0} = p_{4,0}$ donnent $\Pi_n = \Pi_*$ pour tout $n \geq 1$. Réciproquement, si $(\Pi_n)_{n \geq 1}$ est constante, les différences multipliées par 3^{-n} dans cette formule doivent être nulles ; ces deux égalités sont donc nécessaires.

En particulier, un départ certain sur P_1 , avec $\Pi_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$, donne également $\Pi_n = \Pi_*$ pour tout $n \geq 1$. Il s'agit d'une position initiale déterminée, et non seulement d'une loi initiale répartie sur plusieurs cases.

5. (a) Probabilité de présence au centre.

La première ligne de F^n , pour $n \geq 1$, a tous ses coefficients égaux à $1/3$. Comme

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,0} = 1 :$$

$$p_{1,n} = \frac{1}{3}.$$

Cette probabilité ne dépend pas de la loi de position initiale.

Le résultat était prévisible : après un nombre impair de sauts, le pion est sur une case I_i . Chacune de ces cases possède exactement trois voisins, dont P_1 . Conditionnellement à

toute histoire jusqu'à cet instant, la probabilité du prochain saut vers P_1 est donc $1/3$. Les probabilités totales donnent la même valeur sans calcul matriciel.

5. (b) Loi du nombre de passages au centre.

Question adaptée au programme actuel : la position initiale n'est pas comptée parmi les passages pendant les $2n$ sauts.

Le centre ne peut être visité qu'aux instants pairs. Pour $1 \leq m \leq n$, notons C_m l'indicatrice de la présence sur P_1 après $2m$ sauts. Alors

$$X_1 = \sum_{m=1}^n C_m.$$

Il reste à justifier l'indépendance des C_m ; l'égalité de leurs probabilités marginales ne la prouverait pas. Après toute histoire fixée jusqu'au saut $2m-1$, le pion est sur une case I_i et le prochain saut va vers P_1 avec probabilité $1/3$. En sommant sur les histoires compatibles avec une suite prescrite de valeurs de $C_1, \dots, C_{m-1}$, on conserve donc les probabilités $1/3$ pour $C_m = 1$ et $2/3$ pour $C_m = 0$.

Les probabilités composées donnent, pour tous $c_1, \dots, c_n \in \{0, 1\}$:

$$P(C_1 = c_1, \dots, C_n = c_n) = \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{c_m} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-c_m}.$$

Les variables C_m sont donc mutuellement indépendantes, chacune de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$. Leur somme a la loi binomiale :

$$X_1 \sim \mathcal{B}(n, 1/3).$$

Pour $0 \leq \ell \leq n$:

$$P(X_1 = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{2}{3}\right)^{n-\ell},$$

et cette probabilité vaut 0 pour les autres entiers. Ses moments existent, puisque $0 \leq X_1 \leq n$, et :

$$E(X_1) = \frac{n}{3}, \quad V(X_1) = \frac{2n}{9}.$$

5. (c) Premier passage au centre.

On suppose le départ sur un coin, donc aucun passage au centre n'a eu lieu à l'instant initial. Le premier passage éventuel survient à un instant pair. D'après le raisonnement de 5. (b), à chaque nouvel instant pair, conditionnellement aux échecs précédents, le succès a la probabilité $1/3$.

Pour $m \geq 1$, la probabilité d'un premier succès au saut $2m$ est donc :

$$P(Z_1 = 2m) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \frac{1}{3}.$$

Les probabilités aux entiers impairs et en 0 sont nulles. De plus :

$$P(Z_1 > 2m) = \left(\frac{2}{3}\right)^m \rightarrow 0.$$

L'événement de non-passage est l'intersection décroissante des événements d'échec jusqu'au saut $2m$. La continuité décroissante des probabilités donne $P(Z_1 = +\infty) = 0$. Cette précision, ajoutée dans le sujet, assure que l'on peut traiter Z_1 comme une variable réelle finie presque sûrement.

Le nombre de paires de sauts $T = Z_1/2$ suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/3$. Ses deux premiers moments existent et valent :

$$E(T) = 3, \quad V(T) = \frac{1 - 1/3}{(1/3)^2} = 6.$$

En utilisant $Z_1 = 2T$ presque sûrement :

$$E(Z_1) = 6, \quad V(Z_1) = 24.$$

Ces résultats sont identiques quel que soit le coin de départ, ou pour toute loi initiale portée par les quatre coins.

5. (d) Probabilité de passer par P_1 .

Le passage a lieu exactement sur la réunion des événements disjoints $\{Z_1 = 2m\}$, pour

$m \geq 1$. La série géométrique donne :

$$P(\text{passer par } P_1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} = 1.$$

Le pion passe donc presque sûrement par le centre. Cela confirme le résultat de non-passage de probabilité nulle établi en 5. (c).

6. (a) Probabilité de présence sur P_2 .

La deuxième ligne de F^n donne, pour $n \geq 1$:

$$p_{2,n} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^5 p_{i,0} + \frac{t_n}{6} (p_{2,0} - p_{5,0}).$$

Comme la somme des probabilités initiales vaut 1 et $t_n/6 = 1/(2 \times 3^n)$:

$$p_{2,n} = \frac{1}{6} + \frac{p_{2,0} - p_{5,0}}{2 \times 3^n}.$$

Pour une position initiale déterminée :

Case de départ	Probabilité après $2n$ sauts
P_2	$1/6 + 1/(2 \times 3^n)$
P_5	$1/6 - 1/(2 \times 3^n)$
P_1, P_3 ou P_4	$1/6$

La dépendance à la loi initiale tend vers 0 lorsque n augmente, et la limite est $1/6$ dans tous les cas.

6. (b) Espérance du nombre de passages par P_2 .

Question adaptée au programme actuel : comme pour X_1 , on ne compte pas la position initiale.

Pour $1 \leq m \leq n$, notons D_m l'indicatrice de la présence sur P_2 après $2m$ sauts. On a

$$X_2 = \sum_{m=1}^n D_m.$$

Cette somme est bornée, donc son espérance existe. Par linéarité, sans aucune hypothèse d'indépendance des D_m :

$$E(X_2) = \sum_{m=1}^n p_{2,m} = \frac{n}{6} + \frac{p_{2,0} - p_{5,0}}{2} \sum_{m=1}^n 3^{-m}.$$

La somme géométrique vaut :

$$\sum_{m=1}^n 3^{-m} = \frac{(1/3)(1 - 3^{-n})}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}(1 - 3^{-n}).$$

Finalement :

$$E(X_2) = \frac{n}{6} + \frac{p_{2,0} - p_{5,0}}{4}(1 - 3^{-n}).$$

Pour un départ certain sur P_2 , on ajoute $(1 - 3^{-n})/4$ à $n/6$; pour un départ sur P_5 , on retranche cette quantité ; pour un départ sur P_1, P_3 ou P_4 , l'espérance vaut $n/6$.

6. (c) Probabilité conditionnelle d'un passage ultérieur sur P_2 .

On part de P_1 et $n, k \geq 1$. Pour alléger les notations, V_m désigne la case occupée après $2m$ sauts. D'après 4. (d), la loi de V_n est Π_* , et $P(V_n \neq P_2) = 5/6 > 0$.

Méthode 1 — Loi de la position après conditionnement.

Sachant $V_n \neq P_2$, la loi de V_n , dans l'ordre $P_1, \dots, P_5$, est :

$$q = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

En effet, on divise les probabilités $1/3, 0, 1/6, 1/6, 1/6$ par $5/6$. La loi conditionnelle des déplacements futurs dépend uniquement de la position actuelle, donc après $2k$ sauts supplémentaires elle est $F^k q$.

La formule de 6. (a), appliquée à cette loi initiale, donne :

$$P(V_{n+k} = P_2 \mid V_n \neq P_2) = \frac{1}{6} + \frac{0 - 1/5}{2 \times 3^k} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10 \times 3^k}.$$

Méthode 2 — Décomposition selon l'événement complémentaire.

On a $P(V_{n+k} = P_2) = 1/6$. Si $V_n = P_2$, la formule de 6. (a) avec un départ sur P_2 donne $P(V_{n+k} = P_2 \mid V_n = P_2) = 1/6 + 1/(2 \times 3^k)$. Par probabilités composées :

$$P(V_{n+k} = P_2, V_n = P_2) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2 \times 3^k} \right).$$

En retranchant cette probabilité à la probabilité totale, puis en divisant par $P(V_n \neq P_2) = 5/6$:

$$P(V_{n+k} = P_2 \mid V_n \neq P_2) = \frac{1/6 - (1/6)(1/6 + 1/(2 \times 3^k))}{5/6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10 \times 3^k}.$$

La première méthode traite directement la nouvelle loi initiale; la seconde utilise une probabilité conjointe et son complément. Le résultat ne dépend pas de n , mais dépend du délai k .

7. Loi de X_2 pour trois paires de sauts.

On part de P_1 et on observe les instants 2, 4 et 6. Notons $H_m = \{V_m = P_2\}$ pour $m = 1, 2, 3$. Alors X_2 est la somme de leurs trois indicatrices et prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Les probabilités marginales valent toutes $P(H_m) = 1/6$. Cependant les événements ne sont pas indépendants : par exemple, $P(H_2 | H_1) = F_{2,2} = 1/3$, qui diffère de $P(H_2) = 1/6$.

Calcul des intersections utiles.

La formule des probabilités composées et les coefficients de F donnent :

$$P(H_1 \cap H_2) = P(H_2 \cap H_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Pour les instants séparés par deux paires de sauts, $(F^2)_{2,2} = 1/6 + 1/18 = 2/9$. Ainsi :

$$P(H_1 \cap H_3) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{27}.$$

Enfin, en utilisant deux fois le retour de probabilité $1/3$ depuis P_2 :

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{54}.$$

Méthode 1 — Nombre de succès et intersections.

Notons $q_\ell = P(X_2 = \ell)$. Trois succès ont lieu exactement sur l'intersection triple, donc $q_3 = 1/54$.

La somme des indicatrices des trois intersections par paires vaut $\binom{X_2}{2}$ pour chaque

réalisation : elle vaut 1 quand il y a deux succès et 3 quand il y en a trois. Par conséquent :

$$q_2 + 3q_3 = P(H_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap H_3) + P(H_2 \cap H_3) = \frac{4}{27}.$$

Ainsi $q_2 = 4/27 - 3/54 = 5/54$. De plus, $E(X_2) = 3/6 = 1/2$, soit $q_1 + 2q_2 + 3q_3 = 1/2$.

Donc :

$$q_1 = \frac{1}{2} - \frac{10}{54} - \frac{3}{54} = \frac{7}{27}.$$

Enfin, la somme des quatre probabilités vaut 1, d'où

$$q_0 = 1 - 7/27 - 5/54 - 1/54 = 17/27.$$

Méthode 2 — Huit configurations des indicatrices.

Les trois indicatrices définissent huit configurations. Leurs probabilités se calculent à partir des intersections déjà établies, en appliquant le crible seulement à deux événements.

Par exemple, la configuration $(1, 1, 0)$ a la probabilité

$P(H_1 \cap H_2) - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1/27$. Pour $(1, 0, 0)$, on a :

$$P(H_1 \cap H_2^c \cap H_3^c) = P(H_1) - P(H_1 \cap H_2) - P(H_1 \cap H_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \frac{5}{54}.$$

Pour $(0, 1, 0)$, la même formule donne $1/6 - 1/18 - 1/18 + 1/54 = 4/54$. En traitant chaque configuration, on obtient :

Configuration	Probabilité
$(0, 0, 0)$	$34/54$
$(1, 0, 0)$	$5/54$

Configuration	Probabilité
$(0, 1, 0)$	$4/54$
$(0, 0, 1)$	$5/54$
$(1, 1, 0)$	$2/54$
$(1, 0, 1)$	$1/54$
$(0, 1, 1)$	$2/54$
$(1, 1, 1)$	$1/54$

La probabilité de $(0, 0, 0)$ est obtenue par complément à 1 des sept autres configurations. En regroupant selon le nombre de composantes égales à 1, on retrouve la loi :

ℓ	0	1	2	3
$P(X_2 = \ell)$	$17/27$	$7/27$	$5/54$	$1/54$

La première méthode évite de détailler tous les cas et exploite les intersections par paires. La seconde montre les différentes configurations possibles. Les valeurs ont été contrôlées par un dénombrement exact des chemins de trois transitions de matrice F . Elles somment à 1 et redonnent l'espérance $1/2$ calculée en 6. (b).

Relevé des adaptations

- Partie 1, 4. (b) : exposants limités explicitement à $n \geq 1$, la formule annoncée n'étant pas valable pour $n = 0$.
- Partie 2, préambule : loi uniforme du saut suivant précisée conditionnellement à toute l'histoire. Cette propriété est nécessaire aux calculs de transition et à la justification de l'indépendance des passages au centre ; elle ne signifie pas que les positions successives sont indépendantes.

- Partie 2, préambule : le damier est retranscrit en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec ses dispositions et proportions mesurées.
- Partie 2, 4. (d) : la formulation précise qu'une loi de position initiale est recherchée, conformément au vecteur de probabilités Π_0 . Le corrigé donne aussi un départ déterminé sur P_1 , qui répond à la constance demandée pour $n \geq 1$.
- Partie 2, 5. (b) et 6. (b) : comptage des passages précisé aux instants des sauts, en excluant la position initiale.
- Partie 2, 5. (c) : convention en cas de non-passage ajoutée ; sa probabilité nulle est démontrée avant l'utilisation des moments de la loi géométrique.