



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2026

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, le coefficient sur la i -ème ligne et la j -ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.

La transposée d'une matrice A est notée tA . Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a .

Pour tous $i, k \in \mathbb{N}$, le symbole de Kronecker est défini par $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$, et $\delta_{i,k} = 0$ sinon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M {}^tM = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de ces permutations. On représente $\sigma \in \mathcal{P}_n$ par le n -uplet $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Par exemple, $(2, 3, 1)$ représente la permutation de $\{1, 2, 3\}$ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$.

Pour $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Pour $\sigma \in \mathcal{P}_n$, la matrice de permutation associée à σ , notée P_σ , est définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe $\sigma \in \mathcal{P}_n$ telle que $P = P_\sigma$. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{P}_n$.

Pour $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle U, V \rangle = {}^tUV = {}^tVU$ le produit scalaire canonique et $\|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle}$ la norme euclidienne associée.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\text{diag}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \text{DG}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $D(X)$ la matrice diagonale de diagonale X :

$$D(X) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Soient E un espace vectoriel réel et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que g est convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], \quad g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

Dans tout le problème, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, on pose $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Pour les programmes Python, on dispose du formulaire placé à la fin du sujet. On importe les bibliothèques suivantes :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Toute fonction Python écrite en réponse à une question peut être utilisée dans les programmes ou fonctions demandés par la suite.

Partie I : préliminaires

1. Soient $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et φ_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ . Montrer que $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \varphi_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
2. Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_n$. Montrer que $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$ et en déduire que l'inverse d'une matrice de permutation est aussi une matrice de permutation.
3. Montrer que toute matrice de permutation $P \in P_n$ est orthogonale.
4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $\alpha \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}. \quad (1)$$

5. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ tels que $x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}$ et $x_{\beta(1)} \geq \dots \geq x_{\beta(n)}$. Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_{\alpha(i)} = x_{\beta(i)}.$$

Dans toute la suite, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, où $\hat{x}_i = x_{\alpha(i)}$ et α est choisi pour que $x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}$. Ainsi, $\hat{x}$ contient les composantes de x réordonnées dans l'ordre décroissant.

6. On écrit une fonction Python ayant comme entrée un tableau monodimensionnel de réels X représentant un vecteur et qui renvoie un tableau Y contenant les mêmes valeurs que X ordonnées dans l'ordre décroissant, ainsi qu'une permutation α correspondant à la question 4.

Compléter la fonction suivante afin que `permutevecteur(X)` renvoie le couple (Y, α) ainsi obtenu. Reproduire cette fonction en remplissant les parties pointillées.

Python

```
def permutevecteur(X):
    n = len(X)
    alpha = np.arange(0, n, 1)
    Y = X.copy() # Nouveau tableau initialisé avec les valeurs de X
    for i in range(n):
        imax = ...
        for k in range(i, n):
            if Y[k] > ...:
                imax = ...
        if imax > i:
            ..., ... = ..., ...
            alpha[i], alpha[imax] = alpha[imax], alpha[i]
    return Y, alpha
```

Partie II : matrices bistochastiques

Théorème de Birkhoff-Von Neumann en basses dimensions

Définitions

Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

$$(a) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad S_{i,j} \geq 0.$$

$$(b) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} = 1.$$

$$(c) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{i=1}^n S_{i,j} = 1.$$

Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthostochastique s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, S_{i,j} = (Q_{i,j})^2.$$

L'un des objectifs de cette partie est de prouver le théorème suivant lorsque $n \in \{2, 3\}$.

Théorème de Birkhoff-Von Neumann. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, des matrices de permutation $P_1, \dots, P_k \in P_n$ et des réels positifs ou nuls $a_1, \dots, a_k$ tels que $a_1 + \dots + a_k = 1$ et $S = a_1 P_1 + \dots + a_k P_k$.

7. (a) Montrer que toute matrice orthostochastique et toute matrice de permutation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont bistochastiques.
7. (b) Montrer qu'une matrice bistochastique n'est pas toujours orthostochastique en donnant un exemple pour $n = 3$.
8. On se place dans le cas particulier $n = 2$.
 8. (a) Trouver toutes les matrices de permutation appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 8. (b) En déduire qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bistochastique si et seulement s'il existe $\alpha \in [0, 1]$ et une matrice de permutation $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $S = \alpha I_2 + (1 - \alpha)P$.
9. On se place dans le cas particulier $n = 3$. Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.
 9. (a) Quel est le nombre de permutations de $\{1, 2, 3\}$?
 9. (b) Montrer que les matrices suivantes sont des matrices de permutation et indiquer les bijections σ associées :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. (c) Montrer que S est de la forme

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & 1 - S_{1,1} - S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & 1 - S_{2,1} - S_{2,2} \\ 1 - S_{1,1} - S_{2,1} & 1 - S_{1,2} - S_{2,2} & S_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Exprimer $S_{3,3}$ en fonction des coefficients $S_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, et donner des conditions nécessaires sur ces coefficients.

9. (d) Ces conditions étant satisfaites, on pose $\beta_0 = \min_{1 \leq i \leq 3} S_{i,i}$. Montrer qu'il existe des réels positifs ou nuls β_i , $1 \leq i \leq 5$, tels que

$$S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^5 \beta_i P_i.$$

9. (e) Conclure.

10. Écrire une fonction Python `bistochastique(n, iter)` ayant deux paramètres d'entrée `n` et `iter`, représentant des entiers naturels non nuls, et qui renvoie une matrice approximativement bistochastique construite de la manière suivante.

On construit au départ une matrice $A^{(0)}$ de taille $n \times n$ dont chaque coefficient est obtenu en simulant une réalisation de la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Pour $0 \leq k < \text{iter}$:

On calcule $A^{(2k+1)}$ en divisant chaque ligne de $A^{(2k)}$ par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+1)} = \frac{A_{i,j}^{(2k)}}{\sum_{\ell=1}^n A_{i,\ell}^{(2k)}}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

On calcule ensuite $A^{(2k+2)}$ en divisant chaque colonne de $A^{(2k+1)}$ par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+2)} = \frac{A_{i,j}^{(2k+1)}}{\sum_{\ell=1}^n A_{\ell,j}^{(2k+1)}}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

La fonction renvoie la dernière matrice $A^{(2 \text{ iter})}$, obtenue lorsque $k = \text{iter} - 1$. On admet que si iter est assez grand, on peut considérer que cette matrice est bistochastique.

Partie III : fonctions symétriques et fonctions S-convexes

On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2. On admet que le théorème de Birkhoff-Von Neumann énoncé dans la partie II est vrai en dimension n .

On pose $H_n = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n\}$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{P}_n$, on a $f(x) = f(x_\sigma)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est S-convexe si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice bistochastique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $f(BX) \leq f(X)$.

11. Soient $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer $P_\sigma X$.

12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est symétrique si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall P \in P_n, f(PX) = f(X)$.

13. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est symétrique si et seulement s'il existe une fonction $\hat{f} : H_n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \hat{f}(\hat{x})$.
14. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est symétrique ou non en le prouvant si la réponse est oui, ou en donnant un contre-exemple si la réponse est non :

$$f_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$f_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$f_3 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i, j \leq n} |x_i - x_j|.$$

15. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_{i,x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_{i,x}(t) = f(x + te_i)$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
15. (a) Montrer que $g_{i,x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f .
15. (b) Montrer que $g_{i,x_\sigma} = g_{\sigma(i),x}$.
15. (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial_i f(x_\sigma) = \partial_{\sigma(i)} f(x)$.
16. Montrer que toute fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est symétrique.
17. Soient E un espace vectoriel réel et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que pour tous $z_1, \dots, z_m \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$, et tous réels positifs ou nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$, on a

$$g\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k z_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k g(z_k).$$

18. En déduire que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique et convexe est S-convexe.
19. On se place dans le cas particulier $n = 2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ S-convexe de classe C^1 . Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_2 + tx_1).$$

19. (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f , de t , x_1 et x_2 .
19. (b) Montrer que $g(t) \leq g(0)$ pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que $g'(0) \leq 0$.
19. (c) En déduire que $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1 - x_2)(\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \geq 0$.
20. On revient au cas général où $n \geq 2$ est quelconque mais fixé. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ S-convexe de classe C^1 . Montrer que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_i - x_j)(\partial_i f(x) - \partial_j f(x)) \geq 0.$$

21. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n h(x_k).$$

Montrer que f est S-convexe si et seulement si h est convexe.

Partie IV : fonctions spectrales. Théorèmes de Davis et de Fan

Dans toute cette partie, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées symétriques appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\hat{\lambda}(A) = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1(A) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_n(A) \end{pmatrix},$$

où $\hat{\lambda}_1(A) \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n(A)$ désignent les valeurs diagonales d'une matrice diagonale semblable à A , ordonnées dans l'ordre décroissant. On pose $\Lambda(A) = D(\hat{\lambda}(A))$.

Une application $G : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est spectrale si

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad G(QA^tQ) = G(A).$$

Dans toute la suite, F désigne une application fixée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, pas nécessairement spectrale sauf indication contraire.

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $F_k : A \mapsto \text{Tr}(A^k)$ est spectrale.

23. Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), P_\sigma D(X) {}^tP_\sigma = D(P_\sigma X)$.

24. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale Q telle que $A = Q\Lambda(A) {}^tQ$.

25. On suppose dans cette question que F est spectrale. On lui associe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = F(D((x_1, \dots, x_n)^t))$.

25. (a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), F(A) = F(\Lambda(A))$.
25. (b) Montrer que f est symétrique.
25. (c) Montrer que si F est convexe, alors f est convexe aussi.
26. On revient au cas général. Montrer que F est spectrale si et seulement s'il existe une fonction symétrique $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), F(A) = f(\hat{\lambda}(A))$. Prouver que f est unique.
27. On suppose maintenant que F est spectrale et que la fonction f associée à F dans la question 26 est convexe. On voudrait démontrer que F est convexe, ce qui constitue le théorème de Davis.
27. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice bistochastique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{diag}(A) = S\hat{\lambda}(A)$.
27. (b) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A + B$. Montrer qu'il existe deux matrices bistochastiques S_1, S_2 telles que $\hat{\lambda}(C) = S_1\hat{\lambda}(A) + S_2\hat{\lambda}(B)$.
27. (c) En déduire que F est convexe.
27. (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $F(\text{DG}(A)) \leq F(A)$.
28. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $m \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$\Sigma_m(A) = \sum_{k=1}^m \hat{\lambda}_k(A).$$

28. (a) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), m \in \{1, \dots, n\}$ et $V_1, \dots, V_m$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AV_i = \hat{\lambda}_i(A)V_i$ pour tout i .

On pose $C = A + B$. On note $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $CX_i = \hat{\lambda}_i(C)X_i$ pour tout i . Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle X_k, AX_k \rangle \leq \hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i=1}^{m-1} (\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A)) \langle X_k, V_i \rangle^2, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^m \langle X_k, AX_k \rangle \leq \Sigma_m(A). \quad (4)$$

28. (b) En déduire que les fonctions Σ_m sont toutes convexes.

29. Soit $H : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{\lambda}_k(A),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels donnés tels que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$. Montrer que H est spectrale et convexe.

Indication : on peut exprimer $H(A)$ en fonction de $\Sigma_1(A), \dots, \Sigma_n(A)$.

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\widehat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^t$, où $\hat{x}_i = x_{\alpha(i)}$ et $\alpha \in \mathcal{P}_n$ est choisi tel que $x_{\alpha(1)} \geq \dots \geq x_{\alpha(n)}$. Ainsi, $\widehat{X}$ est obtenu en réordonnant les composantes de X dans l'ordre décroissant.

30. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $U = \text{diag}(A)$ et $V = \text{diag}(B)$. Montrer que

$$\langle \widehat{U}, \widehat{V} \rangle \leq \langle \hat{\lambda}(A), \hat{\lambda}(B) \rangle. \quad (\text{Inégalité de Fan})$$

Formulaire Python

I. Mathématiques générales

Commande	Rôle
<code>np.linspace(a, b, n)</code>	Tableau à une dimension de n valeurs régulièrement espacées, bornes incluses.
<code>np.zeros([n, m])</code>	Tableau nul de taille n par m .
<code>np.zeros(n)</code>	Tableau nul à une dimension, de longueur n .
<code>np.arange(a, b, eps)</code>	Tableau de valeurs de a à b exclu, avec un pas eps .
<code>np.shape(M)</code>	Tuple donnant les dimensions du tableau M .
<code>np.transpose(M)</code>	Transposée de M .
<code>np.dot(M, P), M.dot(P), M @ P</code>	Pour deux matrices, produit matriciel.
<code>np.sum(M)</code>	Somme de tous les éléments de M .
<code>np.sum(M, axis=i)</code>	Pour une matrice, sommes des colonnes si $i=0$, sommes des lignes si $i=1$.

II. Algèbre linéaire

Dans les commandes suivantes, `al` désigne `numpy.linalg` :

Python

```
import numpy.linalg as al
```

Commande	Rôle
<code>al.inv(M)</code>	Inverse d'une matrice inversible.

Commande	Rôle
<code>al.matrix_rank(M)</code>	Rang de la matrice.
<code>al.matrix_power(M, n)</code>	Puissance entière de la matrice carrée.

III. Simulations probabilistes

Commande	Rôle
<code>rd.random([q, r])</code>	Tableau de taille q par r de réalisations indépendantes uniformes ; les valeurs informatiques sont dans $[0, 1[$.
<code>rd.normal(m, d, [q, r])</code>	Tableau de taille q par r de réalisations indépendantes de loi normale de moyenne m et d'écart-type d .
<code>rd.normal(m, d, n)</code>	Même simulation dans un tableau à une dimension de longueur n .
<code>rd.gamma(m, a, [q, r])</code>	Tableau de taille q par r de réalisations indépendantes d'une loi gamma de forme $m > 0$ et d'échelle $a > 0$.
<code>rd.gamma(m, a, n)</code>	Même simulation dans un tableau à une dimension de longueur n .

La loi normale mentionnée ci-dessus est $\mathcal{N}(m, d^2)$, avec $d > 0$. Pour les commandes gamma, le taux est $1/a$; la densité sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x^{m-1} e^{-x/a} / (\Gamma(m) a^m)$.

IV. Graphiques

Dans les commandes suivantes, `plt` désigne `matplotlib.pyplot` :

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Commande	Rôle
<code>plt.plot(X, Y, options)</code>	Courbe des points définis par les tableaux <code>X</code> et <code>Y</code> ; <code>options</code> est une chaîne précisant le style.
<code>plt.grid()</code>	Affiche le quadrillage.
<code>plt.show()</code>	Affiche le graphique.
