



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2025

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note

$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $\text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a .

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, le coefficient sur la i -ème ligne et la j -ème colonne de A est noté $A_{i,j}$.

Si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur colonne, on note x_i sa i -ème composante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{{}^tXX}$ la norme euclidienne de X .

Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur un même espace probabilisé. Si Z est une variable aléatoire réelle, on note $E(Z)$ son espérance et $V(Z)$ sa variance, si elles existent.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les éléments de $\mathbb{R}^k$ sont considérés comme des vecteurs colonnes ; sauf indication contraire, on confond $\mathbb{R}^k$ et $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Dans tout l'énoncé, n, m, p désignent trois entiers naturels non nuls avec $n \geq 4$ et $n \geq p$, et A, B deux matrices réelles fixées telles que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. On pose $M = {}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$D(X) = MX - {}^tAY.$$

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant : minimiser

$$\frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \mu\|BX\|, \quad X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),$$

où, sauf indication contraire, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé et μ est un réel donné. On dira que X réalise un minimum global d'une fonction G si $G(X)$ est un minimum global de G .

La partie I porte sur des résultats d'algèbre linéaire utiles aux parties suivantes. La partie II traite le cas $\mu = 0$ et la partie III le cas $\mu = 1$.

Pour les programmes Python, on dispose du formulaire à la fin du sujet et des importations suivantes :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
```

Toute fonction Python écrite en réponse à une question peut être utilisée dans les programmes ou fonctions demandés par la suite.

Partie I : autour de l'adjoint

Dans cette partie, E et F désignent deux espaces euclidiens de dimensions respectives p et n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire de E , $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de E , $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ le produit scalaire de F et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormale de F .

Si G est un sous-espace de E ou de F , on note $G^\perp$ son supplémentaire orthogonal dans l'espace correspondant.

On note $u : E \rightarrow F$ l'application linéaire de matrice A dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:
 $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$.

1. Soit $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe un et un seul vecteur $a_0 \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E.$$

2. En déduire que, pour tout $y \in F$, il existe un seul $z_y \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E.$$

3. Montrer que l'application $u^* : F \rightarrow E$, définie par $u^*(y) = z_y$, est linéaire.

L'application u^* s'appelle l'application adjointe de u . On a ainsi l'identité

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E. \quad (1)$$

4. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^t A$ et en déduire que $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$ et $(u^*)^* = u$.

5. Montrer que $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

6. Montrer que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$ et en déduire que $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)$.

7. Soit $w : \text{Im}(u^*) \rightarrow \text{Im}(u^*)$ défini par

$$\forall x \in \text{Im}(u^*), \quad w(x) = u^* \circ u(x).$$

Montrer que w est un isomorphisme et donner une interprétation de ce résultat en termes d'équation matricielle.

8. Soit π le projecteur orthogonal de F sur $\text{Im}(u)$ et Q sa matrice dans $\mathcal{B}_F$.

(a) Montrer que ${}^t A Q = {}^t A$.

(b) Montrer que $\text{Tr}(Q) = \text{rg}(u)$.

9. Montrer que M est inversible si et seulement si A est de rang égal à p .

10. On suppose que le rang de A est égal à p .

(a) Montrer que $Q = A M^{-1} {}^t A$.

(b) Écrire une fonction Python `Calcule_Q(A)` qui prend en entrée une matrice A de type array, de taille $n \times p$, teste si A est de rang p et renvoie la matrice Q de la question précédente dans ce cas et un message d'erreur sinon.

11. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$.

Partie II : minimisation d'une fonction quadratique

On s'intéresse à la minimisation de la fonction J_0 définie sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par

$$J_0(X) = \frac{1}{2} \|AX - Y\|^2.$$

12. Montrer que, pour tous $X, H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$J_0(X + H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH. \quad (2)$$

13. Montrer que X réalise un minimum global de J_0 si et seulement si $D(X) = 0$.

On notera dans la suite $\mathcal{S}_0 = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid D(X) = 0\}$.

14. Montrer qu'il existe $X_0 \in \text{Ker}(A)^\perp$ tel que $\mathcal{S}_0 \cap \text{Ker}(A)^\perp = \{X_0\}$.

15. Soit $X \in \mathcal{S}_0$.

(a) Justifier l'identité $AX = QY$. (3)

(b) Montrer que $X - X_0 \in \text{Ker}(A)$ et en déduire que, si $X \neq X_0$, alors $\|X\| > \|X_0\|$.

(c) On suppose que le rang de A est égal à p . Montrer que $\mathcal{S}_0 = \{X\}$ avec

$$X = M^{-1} {}^tAY. \quad (4)$$

16. On suppose à nouveau que le rang de A est égal à p et que $Y = AU_0 + Z$, où U_0 est un vecteur constant fixé et $Z = {}^t(z_1, \dots, z_n)$, les variables $z_1, \dots, z_n$ étant indépendantes, identiquement distribuées selon $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$.

On définit $X = M^{-1}{}^tAY$. Les composantes $y_1, \dots, y_n$ de Y et $x_1, \dots, x_p$ de X sont donc des variables aléatoires. On considère $T = \|A(X - U_0)\|^2$.

- (a) Montrer que $T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ$.
- (b) Proposer une fonction Python `simuleT(A, sigma)` qui prend en arguments A de type array et σ de type flottant et simule la variable T .
- (c) Proposer une fonction Python `esperance(A, sigma)` qui prend les mêmes arguments et renvoie une valeur approchée de l'espérance de T .
- (d) Nous avons testé notre algorithme pour $\sigma = 1$ et trois matrices A_1, A_2, A_3 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

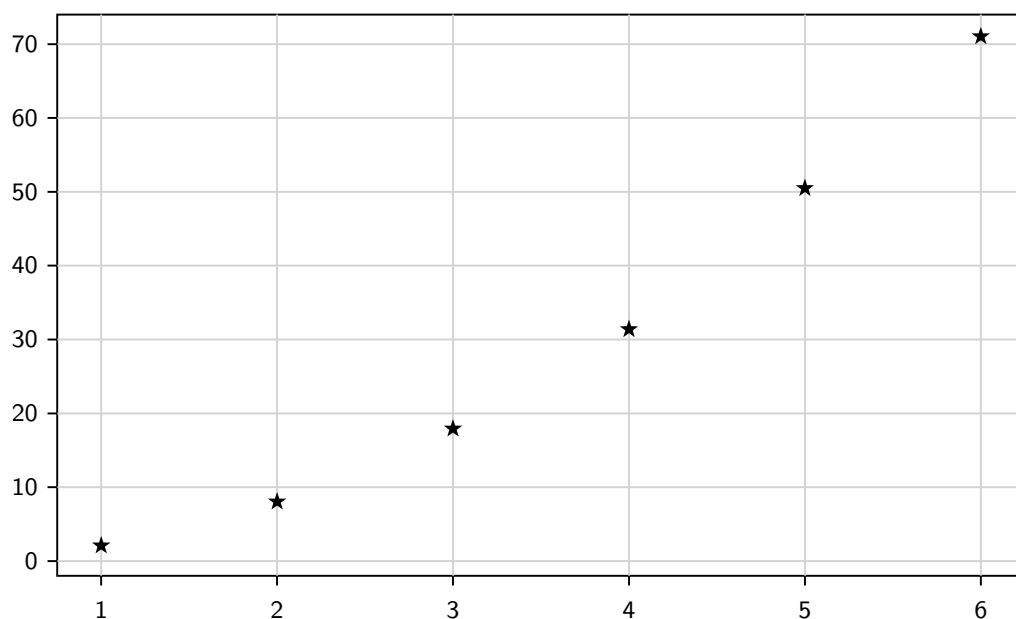
L'exemple A_1 est considéré avec $n = 3$. Les résultats obtenus sont respectivement 1,99, 3,01, 4,97. Que pouvez-vous conjecturer ?

On effectue maintenant le programme suivant :

Python

```
sig = np.arange(1, 7)
rep = np.zeros(6)
for k in range(6):
    rep[k] = esperance(A1, sig[k])
plt.plot(sig, rep, "*k")
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient ce graphique :



Que pouvez-vous conjecturer ? Prouvons ces conjectures dans les questions suivantes.

(e) Exprimer $E(z_1^2)$, $E(z_1^3)$ et $E(z_1^4)$ en fonction de σ .

(f) Montrer que $T = T_1 + 2T_2$, où

$$T_1 = \sum_{i=1}^n Q_{i,i} z_i^2, \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Q_{i,j} z_i z_j.$$

En déduire $E(T)$ et vérifier les conjectures.

(g) Montrer que $E(T_1 T_2) = 0$.

(h) Notons

$$q = \sum_{k=1}^n Q_{k,k}^2.$$

Montrer que

$$E(T_1^2) = \sigma^4(2q + p^2), \quad E(T_2^2) = \frac{\sigma^4}{2}(p - q).$$

(i) En déduire que $V(T) = 2p\sigma^4$ et montrer que, pour tout $\alpha > 0$,

$$P(T > (1 + \alpha)p\sigma^2) \leq \frac{2}{p\alpha^2}.$$

Partie III : minimisation d'une fonction non différentiable

Dans cette partie, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est à nouveau un vecteur fixé. On considère

$$J(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \|BX\|, \quad X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}). \quad (5)$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{N}(X) = \{^tBV \mid V \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), \|V\| \leq 1, \|BX\|V - BX = 0\}.$$

17. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}. \quad (6)$$

18. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J . Montrer que, si $BX_0 \neq 0$, alors nécessairement

$$-D(X_0) = {}^tB \frac{BX_0}{\|BX_0\|},$$

et en déduire que $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$.

19. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J et vérifiant $BX_0 = 0$.

(a) Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\langle D(X_0), H \rangle \leq \|BH\|$.

(b) En déduire que $D(X_0) \in \text{Ker}(B)^\perp$.

(c) En déduire qu'il existe $W \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(X_0) = {}^tBW$.

(d) En déduire qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(X_0) = {}^tBBV$.

(e) Montrer que $\|BV\| \leq 1$ et en déduire que $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$.

20. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

(a) Montrer que

$$\|u + v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} \right)^2 = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}.$$

(b) En déduire que

$$\|u + v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}. \quad (7)$$

21. Soient $X_0, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{N}(X_0)$.

(a) Montrer que $\|BX\| - \|BX_0\| \geq \langle W, X - X_0 \rangle$.

(b) En déduire que

$$J(X) - J(X_0) \geq \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle. \quad (8)$$

22. En déduire que $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalise un minimum global de J si et seulement si $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$.

23. Dans toute la suite, $n = p = m$, $A = I_n$ et B est la matrice diagonale définie par

$$B_{i,i} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

où k est un entier vérifiant $1 \leq k < n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des réels tous non nuls. On pose

$$\rho(Y) = \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{\alpha_i^2}.$$

On définit $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2}.$$

(a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^k y_i^2.$$

(b) On suppose dans cette question uniquement que $\rho(Y) > 1$. Montrer qu'il existe un

unique $\lambda_0 > 0$ tel que $F(\lambda_0) = 0$ et justifier

$$\lambda_0 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k y_i^2.$$

(c) On pose $\beta = 0$ si $\rho(Y) \leq 1$ et $\beta = \lambda_0$ si $\rho(Y) > 1$, puis $X_0 = Y - BV$, où $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par

$$v_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i y_i}{\beta + \alpha_i^2} & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Montrer que X_0 réalise un minimum global de J .

(d) Python. Les données sont représentées par un tableau monodimensionnel `alpha` contenant $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, un tableau monodimensionnel `Y` contenant Y , un flottant `lda` représentant $\lambda \geq 0$ et un flottant `epsilon` représentant $\varepsilon > 0$.

(i) Écrire une fonction `FoncSom(alpha, Y, lda)` renvoyant $F(\lambda)$.

(ii) Écrire une fonction `CalcBeta(alpha, Y, epsilon)` renvoyant une valeur approchée β_a de β à ε près, obtenue par dichotomie dans

$$\left[0, \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k y_i^2\right]$$

lorsque $\rho(Y) > 1$.

(iii) Écrire une fonction `CalcSolution(alpha, Y, epsilon)` prenant les mêmes arguments et renvoyant un tableau monodimensionnel approchant X_0 par remplacement de β par β_a dans la formule précédente.

Formulaire Python

I. Mathématiques générales

Python

```
import numpy as np
```

Instruction	Résultat
<code>np.linspace(a,b,n)</code>	Tableau monodimensionnel de n valeurs uniformément réparties entre a et b , inclus.
<code>np.zeros([n,m])</code>	Matrice nulle de taille $n \times m$.
<code>np.zeros(n)</code>	Tableau monodimensionnel nul de longueur n .
<code>np.arange(a,b,eps)</code>	Tableau des valeurs de a à b exclu, avec un pas eps .
<code>np.shape(M)</code>	Dimensions du tableau M , sous forme d'un tuple.
<code>np.transpose(M)</code>	Transposée de M .
<code>np.dot(M,P), M.dot(P), M @ P</code>	Produit matriciel MP .

II. Algèbre linéaire

Python

```
import numpy.linalg as al
```

Instruction	Résultat
<code>al.inv(M)</code>	Inverse d'une matrice inversible.
<code>al.matrix_rank(M)</code>	Rang numérique de la matrice.

Instruction	Résultat
<code>al.matrix_power(M,n)</code>	Puissance entière de la matrice.

III. Simulations probabilistes

Python

```
import numpy.random as rd
```

Instruction	Résultat
<code>rd.exponential(a, [q,r]),</code> <code>rd.exponential(a,n)</code>	Tableau de variables indépendantes de loi exponentielle de taux $1/a$, avec $a > 0$.
<code>rd.normal(m,d, [q,r]),</code> <code>rd.normal(m,d,n)</code>	Tableau de variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, d^2)$; d est l'écart-type positif.
<code>rd.gamma(m,a, [q,r]), rd.gamma(m,a,n)</code>	Tableau de variables indépendantes de loi de aG , où G suit la loi gamma de forme $m > 0$ et de taux 1, avec $a > 0$.

IV. Graphiques

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Instruction	Résultat
<code>plt.plot(X,Y,options)</code>	Représentation des points de coordonnées données par X,Y avec les options indiquées. "*" affiche des étoiles noires sans ligne entre elles.
<code>plt.grid()</code>	Affiche le quadrillage.
<code>plt.show()</code>	Affiche le graphique.