



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2024

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Si A est un ensemble fini non vide, on note $\#A$ le nombre d'éléments de A . Si $A = \emptyset$, on convient que $\#A = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, le coefficient sur la i -ième ligne et la j -ième colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée tA . Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a . Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|U\|$ sa norme euclidienne associée au produit scalaire canonique, c'est-à-dire $\|U\|^2 = {}^tUU$.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $E(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance, si elles existent.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQQ = I_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- Pour tous $i, k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{i,k} = 0$ si $i \neq k$.
- On note dans tout le problème $\|x\|$ la norme d'un vecteur x , la nature du vecteur entre les doubles barres suffisant à préciser de quelle norme il s'agit.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on adopte les deux définitions suivantes tout au long de l'énoncé :

- On dit qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une bijection σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même telle que $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- On dit qu'une matrice est de Hadamard si elle est carrée, si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et si ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

L'énoncé comporte trois parties essentiellement indépendantes.

Partie I : existence des matrices de Hadamard

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On suppose dans toute cette partie I qu'il existe une matrice de Hadamard $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ses vecteurs colonnes et $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ ses vecteurs lignes.

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que tP est aussi une matrice de permutation.
2. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante :

Q est une matrice de Hadamard $\iff {}^tQQ = nI_n$ et $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{i,j}^2 = 1$.

3. Montrer que tH est une matrice de Hadamard.
4. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ne comportant que les valeurs -1 et 1 sur sa diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation. Montrer que PH, DH, HP et HD sont toutes des matrices de Hadamard.
5. En déduire qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \dots, 1)$.

6. En déduire que n est pair.
7. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard telle que $S_{1,j} = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que, pour tous $i, m \in \{2, \dots, n\}$ tels que $i \neq m$,

$$\sum_{k=1}^n (S_{i,k} + 1)(S_{m,k} + 1) = n.$$

8. En déduire que soit $n = 2$, soit n est un multiple de 4.
9. Dans le cas où $n > 2$, montrer qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont les trois premières lignes sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 & | & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 & | & 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas dans cette question de montrer que les quatre blocs verticaux comportent le même nombre de colonnes.

Indication : on peut observer que la permutation de certaines colonnes, ou la multiplication par -1 de certaines colonnes, dans une matrice de Hadamard donne encore une matrice de Hadamard, d'après la question 4.

10. Montrer que les quatre blocs de la matrice de Hadamard de la question précédente comportent le même nombre de colonnes et en déduire à nouveau que n est nécessairement divisible par 4.

11. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, où $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on note $A \otimes B$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ définie bloc par bloc comme suit :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ A_{2,1}B & \cdots & A_{2,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1}B & \cdots & A_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chacun des blocs $A_{i,j}B$ est de taille $k \times k$.

Montrer que si A et B sont des matrices de Hadamard, alors $A \otimes B$ l'est aussi.

12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$.
13. La fonction `test_hadamard` ci-dessous est écrite en Python. Elle est incomplète et a comme paramètre d'entrée une matrice M de coefficients entiers représentée par un tableau bidimensionnel de type `array`.

Compléter les parties laissées en pointillé afin que la fonction :

- renvoie la valeur -2 si la matrice M n'est pas carrée ;
- renvoie la valeur -1 si la matrice M est carrée mais au moins l'un de ses coefficients n'appartient pas à $\{-1, 1\}$;
- renvoie la valeur 0 si la matrice M est carrée et ses coefficients appartiennent tous à $\{-1, 1\}$, mais M n'est pas une matrice de Hadamard ;
- renvoie la valeur 1 si M est une matrice de Hadamard.

On reproduira le programme après l'avoir complété.

Python

```
import numpy as np

def test_hadamard(M):
    n, p = np.shape(M)
    if ...:
        return -2
    else:
        for i in range(0, ...):
            for j in range(0, ...):
                if ... != 1:
                    return -1
            for j in range(0, ...):
                for k in range(..., n):
                    if np.dot(...) != 0:
                        return 0
    return 1
```

14. On voudrait maintenant écrire en Python une fonction `rand_hadam` qui cherche une matrice de Hadamard dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1 — ainsi, chacune des autres lignes comporte autant de 1 que de -1 — et de taille $4m \times 4m$, où m est un entier donné en paramètre. Cette fonction a aussi un autre paramètre d'entrée `Nmax`, désignant le nombre maximal de matrices à tester. On procède comme suit :

(a) On construit aléatoirement une matrice ne contenant que des -1 et 1 comme coefficients de la manière suivante : pour chaque ligne, à partir de la deuxième, on choisit successivement et aléatoirement les coefficients dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ jusqu'à ce que le nombre de la valeur 1 ou le nombre de la valeur -1 dans la ligne atteigne $n/2 = 2m$. Si le nombre de coefficients égaux à 1 , respectivement -1 , dans la ligne atteint $n/2$, on attribue à tous les coefficients restants de la ligne la valeur -1 , respectivement $+1$.

(b) En utilisant la fonction `test_hadamard`, on teste si la matrice ainsi construite est de Hadamard. Si oui, la fonction renvoie cette matrice. Sinon, on refait la construction d'une

matrice de la même manière que dans (a), et cela autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention d'une matrice de Hadamard, sans toutefois dépasser un nombre maximal de matrices testées désigné par $N_{\max}$. Si ce nombre maximal est atteint sans trouver une matrice de Hadamard, la fonction `rand_hadam` renvoie la matrice nulle de taille $4m \times 4m$.

Compléter les parties laissées en pointillé de la fonction ci-dessous. On reproduira le programme après l'avoir complété, sans les commentaires.

Python

```
import numpy.random as rd

def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in range(0, Nmax):
        matpm = np.ones((n, n), dtype=int)
        for i in range(..., n):
            nb_un = 0
            j = 0
            while 2*nb_un < n and ... < n:
                val = rd.randint(0, 2)
                nb_un += ...
                matpm[i, j] = 2*val - 1
                j ...
            if 2*nb_un == n:
                for k in range(j, n):
                    matpm[i, k] = ...
        if test_hadamard(matpm) == 1:
            return ...
    return np.zeros((n, n), dtype=int)
```

Partie II : variables aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé où Ω désigne un univers fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et P une probabilité. On pose $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ où l'entier $n \geq 2$ désigne ici, dans la suite de cette partie, le nombre d'éléments de Ω . On suppose que $P(A) \neq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ non vide et on pose

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad p_i = P(\{\omega_i\}).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans cette partie II sont définies sur cet espace probabilisé. On suppose qu'il existe un entier naturel $\ell \geq 2$ et des variables aléatoires réelles $Z_1, \dots, Z_\ell$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Pour tous $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ avec $i \neq j$, Z_i et Z_j sont indépendantes ; autrement dit, $Z_1, \dots, Z_\ell$ sont deux à deux indépendantes.
- Pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $\#Z_i(\Omega) \geq 2$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on pose $z_i = (Z_i(\omega_1), \dots, Z_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$.

Pour tous vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\langle u; v \rangle = \sum_{k=1}^n p_k u_k v_k.$$

On pose $u_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

15. Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x; y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$E(a_i Z_i + b_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(a_i Z_i + b_i) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on pose, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $X_i = a_i Z_i + b_i$ et $x_i = (X_i(\omega_1), \dots, X_i(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n$, où le couple (a_i, b_i) est celui de la question 16.

17. Soient V et W deux variables aléatoires réelles sur Ω . On pose

$$v = (V(\omega_1), \dots, V(\omega_n)) \text{ et } w = (W(\omega_1), \dots, W(\omega_n)).$$

Montrer que $E(V) = \langle v; u_0 \rangle$ et $E(VW) = \langle v; w \rangle$.

18. En déduire les relations, pour tous $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ tels que $i \neq j$:

$$\langle x_i; u_0 \rangle = 0, \quad \langle x_i; x_i \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle x_i; x_j \rangle = 0.$$

19. En déduire que $3 \leq \ell + 1 \leq n$.

20. Soit Z une variable aléatoire réelle d'espérance nulle. On pose

$$z = (Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_n)) \in \mathbb{R}^n. \text{ On suppose que } Z(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \text{ où } m = \#Z(\Omega) > 2.$$

(a) Montrer qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^m P(Z = \alpha_k) \beta_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^m P(Z = \alpha_k) \alpha_k \beta_k = 0.$$

(b) Montrer que l'application $T : Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \mapsto (Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) \in \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$.

(c) En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $m - 1$ tel que

$$E(Q(Z)) = 0, \quad E(Q(Z)Z) = 0 \quad \text{et} \quad Q(Z)(\Omega) \neq \{0\}.$$

21. On pose $r = \#\{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid \#X_i(\Omega) > 2\}$.

(a) Montrer que $\ell + r \leq n - 1$.

(b) En déduire que $r \leq \frac{n-1}{2}$.

22. On suppose de plus dans cette question que $\ell = n - 1$; on rappelle que nécessairement $n \geq 3$. On considère la matrice carrée réelle M de taille $n \times n$ dont les coefficients sont définis par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, n\}, \quad M_{i,j} = X_i(\omega_j) \quad \text{et} \quad M_{n,j} = 1.$$

On considère aussi la matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $D_{i,i} = \sqrt{p_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\#X_i(\Omega) = 2$.

(b) Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Soient α_i et β_i deux réels tels que $X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\}$ et $\alpha_i > \beta_i$, et soit $\theta_i \in]0, 1[$ tel que $P(X_i = \alpha_i) = \theta_i$ et $P(X_i = \beta_i) = 1 - \theta_i$.

Montrer les deux relations :

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{1 - \theta_i}{\theta_i}}, \quad \beta_i = -\frac{1}{\alpha_i}.$$

(c) Montrer que la matrice MD est orthogonale.

(d) Soit Y la variable aléatoire définie par $Y(\omega_j) = 1/p_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que

$$Y = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k^2.$$

(e) En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$E(X_i^3) = \sum_{k=1}^n X_i(\omega_k).$$

(f) On reprend les notations de la question 22(b) et on pose

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad m_i = \#\{k \in \{1, \dots, n\} \mid X_i(\omega_k) = \alpha_i\}.$$

Montrer que les trois affirmations suivantes sont nécessairement vraies :

- (A1) Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\alpha_i = \sqrt{\frac{n-m_i-1}{m_i-1}}$ et $\theta_i = \frac{m_i-1}{n-2}$.
- (A2) $n \geq 4$.
- (A3) $2 \leq m_i \leq n-2$.

(g) On suppose dans cette question que $p_i = 1/n$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer les deux assertions suivantes :

- (a) n est nécessairement pair et $\theta_i = 1/2$.
- (b) M est une matrice de Hadamard.

Partie III : deux propriétés des matrices de Hadamard

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On considère la fonction

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $S(A)_{i,j} = \text{sgn}(A_{i,j})$, où sgn est la fonction signe définie par $\text{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.

On considère le produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\langle A; B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{i,j},$$

ainsi que la norme associée

$$\|A\| = \sqrt{\langle A; A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2}.$$

On note φ l'application définie par

$$\varphi : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (x_1, \dots, x_{n^2}) \longmapsto [x_{(i-1)n+j}]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

L'espace $\mathbb{R}^{n^2}$ est euclidien, muni du produit scalaire canonique.

- 23.** Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

24. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|^2 = \text{Tr}(^tAA)$.

25. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \leq F(A) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

(1)

26. On pose $\mathcal{K}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \varphi(x) \in \mathcal{O}_n\}$. Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n^2}$.

On rappelle qu'un ensemble défini par un nombre fini d'égalités $f_j(x) = 0$, où chaque f_j est continue sur $\mathbb{R}^{n^2}$, est fermé.

27. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$,

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq n\|x - y\|.$$

28. En déduire que F admet un minimum global et un maximum global, atteints, sur $\mathcal{O}_n$.

Dans toute la suite, on note M_n^- , respectivement M_n^+ , la valeur minimale, respectivement maximale, de F sur $\mathcal{O}_n$:

$$M_n^- = \min_{Q \in \mathcal{O}_n} F(Q), \quad M_n^+ = \max_{Q \in \mathcal{O}_n} F(Q).$$

29. Montrer que $M_n^- = n$.

30. Trouver toutes les matrices $Q \in \mathcal{O}_n$ qui vérifient $F(Q) = n$.

31. Montrer que, pour toute matrice $Q \in \mathcal{O}_n$,

$$F(Q) = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2.$$

32. En déduire que $M_n^+ \leq n\sqrt{n}$.

Montrer que l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe au moins une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

33. En déduire que si n n'est pas un multiple de 4, alors $M_n^+ < n\sqrt{n}$.

34. On suppose dans cette question que $n = 3$. Pour tous réels α et β , on pose

$$U(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Trouver tous les couples (α, β) pour lesquels $U(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}_3$ et en déduire un encadrement de M_3^+ ; on note que $3\sqrt{3} \approx 5,196152$.

35. On suppose dans cette question que n est pair.

(a) Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $|x_i| = |y_i| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\langle x; y \rangle \neq 0$. Montrer que $|\langle x; y \rangle| \geq 2$.

(b) Soient x, y, u, v quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle| \leq \sqrt{2 (\|y\|^2 \|x - u\|^2 + \|u\|^2 \|y - v\|^2)}.$$

(c) Soit $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $S(Q)$ n'est pas de Hadamard. Montrer que

$$\left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2 \geq \frac{2}{n^2}.$$

(d) En déduire que s'il n'existe aucune matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$M_n^+ \leq n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$