



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2024

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : existence des matrices de Hadamard

1. Orthogonalité et transposition d'une matrice de permutation

Soit σ la bijection associée à P et soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 — Colonnes de la matrice

La colonne j de P est $e_{\sigma(j)}$. Comme σ est bijective, les colonnes de P sont les vecteurs de la base canonique dans un autre ordre. Ainsi,

$$({}^t P P)_{j,k} = \langle e_{\sigma(j)}; e_{\sigma(k)} \rangle = \delta_{j,k}.$$

Donc ${}^t P P = I_n$ et P est orthogonale.

En outre,

$$({}^t P)_{i,j} = P_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}.$$

La transposée est donc la matrice de permutation associée à σ^{-1} .

Méthode 2 — Action sur les coordonnées

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, la définition donne $(Px)_i = x_{\sigma^{-1}(i)}$. Ainsi, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Px; Py \rangle = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)} y_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \langle x; y \rangle.$$

En prenant $x = e_j$ et $y = e_k$, on obtient ${}^tPP = I_n$. La permutation inverse rétablit les coordonnées initiales : sa matrice R vérifie $RP = PR = I_n$. Comme ${}^tPP = I_n$, on a ${}^tP = P^{-1} = R$; c'est encore une matrice de permutation.

La première méthode lit directement les colonnes ; la seconde interprète la matrice comme un changement d'ordre des coordonnées.

2. Caractérisation matricielle

Notons $q_1, \dots, q_n$ les colonnes de Q . Le coefficient (j, k) de tQQ est $\langle q_j, q_k \rangle$.

Si Q est de Hadamard, les produits scalaires sont nuls pour $j \neq k$. Pour $j = k$, chaque coefficient de q_j a son carré égal à 1, donc $\|q_j\|^2 = n$. Ainsi ${}^tQQ = nI_n$, et tous les coefficients vérifient $Q_{i,j}^2 = 1$.

Réciproquement, $Q_{i,j}^2 = 1$ impose $Q_{i,j} \in \{-1, 1\}$, et les coefficients hors diagonale de ${}^tQQ = nI_n$ expriment l'orthogonalité des colonnes distinctes. Ces deux propriétés caractérisent une matrice de Hadamard.

3. Transposée d'une matrice de Hadamard

D'après la question 2, ${}^tHH = nI_n$. Si $HX = 0$, alors $nX = {}^tHHX = 0$, donc $X = 0$. La matrice carrée H est donc inversible, et $H^{-1} = \frac{1}{n}{}^tH$.

Il en résulte $H{}^tH = nI_n$. Les coefficients de tH appartiennent toujours à $\{-1, 1\}$; la question 2 appliquée à tH montre que cette matrice est de Hadamard.

En particulier, les lignes de H sont deux à deux orthogonales et de norme $\sqrt{n}$.

4. Permutations et changements de signes

La question 1 donne ${}^tPP = I_n$. Puisque D est diagonale à coefficients diagonaux ± 1 , on a ${}^tD = D$ et $D^2 = I_n$. Par calcul matriciel,

$$\begin{aligned} {}^t(PH)(PH) &= {}^tH^tPPH = nI_n, \\ {}^t(DH)(DH) &= {}^tH^tDDH = nI_n, \\ {}^t(HP)(HP) &= {}^tP^tHHP = n^tPP = nI_n, \\ {}^t(HD)(HD) &= {}^tD^tHHD = n^tDD = nI_n. \end{aligned}$$

La multiplication à gauche par P permute les lignes, et celle à droite permute les colonnes. La multiplication à gauche par D change le signe de certaines lignes, et celle à droite change le signe de certaines colonnes. Les quatre matrices ont donc encore tous leurs coefficients dans $\{-1, 1\}$.

Par la question 2, PH , DH , HP et HD sont de Hadamard.

5. Normalisation de la première ligne

Choisissons $D = \text{diag}(H_{1,1}, \dots, H_{1,n})$. Alors

$$(HD)_{1,j} = H_{1,j}^2 = 1.$$

La question 4 montre que HD est de Hadamard. Elle possède donc la première ligne demandée.

6. Parité de l'ordre

Soit S une matrice normalisée comme dans la question 5. Ses deux premières lignes sont orthogonales, d'après la question 3. On a donc

$$\sum_{j=1}^n S_{2,j} = 0.$$

Si a coefficients de la deuxième ligne valent 1 et b valent -1 , alors $a + b = n$ et $a - b = 0$. Ainsi $a = b = n/2$, ce qui impose que n soit pair.

Le même argument montre que chaque ligne de S , sauf la première, contient autant de 1 que de -1 .

7. Une identité entre deux lignes

Pour $i, m \geq 2$ distincts, l'orthogonalité des lignes donne

$$\sum_k S_{i,k} S_{m,k} = 0.$$

Leur orthogonalité avec la première ligne donne également

$$\sum_k S_{i,k} = \sum_k S_{m,k} = 0.$$

En développant la somme demandée,

$$\sum_{k=1}^n (S_{i,k} + 1)(S_{m,k} + 1) = \sum_{k=1}^n S_{i,k} S_{m,k} + \sum_{k=1}^n S_{i,k} + \sum_{k=1}^n S_{m,k} + n = n.$$

L'identité est donc établie.

8. Divisibilité par quatre

Si $n = 2$, l'une des possibilités de l'énoncé est satisfaite. Si $n > 2$, on applique la question 7 aux lignes 2 et 3 d'une matrice normalisée.

Chaque produit $(S_{2,k} + 1)(S_{3,k} + 1)$ vaut 4 si $S_{2,k} = S_{3,k} = 1$, et 0 sinon. Si a est le nombre de colonnes de ce premier type, l'identité devient $4a = n$.

Ainsi, pour $n > 2$, n est un multiple de 4. Finalement, $n = 2$ ou 4 divise n .

9. Mise en forme des trois premières lignes

Normalisons d'abord la première ligne par la question 5. Pour chaque colonne, le couple de coefficients sur les lignes 2 et 3 est de l'un des quatre types

$$(1, 1), \quad (1, -1), \quad (-1, 1), \quad (-1, -1).$$

Une permutation des colonnes permet de regrouper ces types dans cet ordre. La matrice obtenue reste de Hadamard, par la question 4, et ses trois premières lignes ont exactement la forme demandée.

Les quatre types sont présents : la question 7 compte $n/4 > 0$ colonnes de type $(1, 1)$. En changeant le signe de la ligne 2, de la ligne 3, ou de ces deux lignes, on obtient encore une matrice de Hadamard à première ligne constante. La même question montre respectivement que les trois autres types sont aussi présents. Cela justifie que les quatre blocs indiqués existent, sans qu'il soit nécessaire ici de comparer leurs tailles.

10. Taille des quatre blocs

Méthode 1 — Équations d'orthogonalité

Notons a, b, c, d les nombres de colonnes des quatre blocs, dans l'ordre de la question 9. L'orthogonalité des lignes 1 et 2, des lignes 1 et 3, puis des lignes 2 et 3 donne

$$a + b - c - d = 0, \quad a - b + c - d = 0, \quad a - b - c + d = 0.$$

En additionnant les deux premières équations, $a = d$. En les soustrayant, $b = c$. La troisième devient alors $2a - 2b = 0$, donc $a = b = c = d$.

Comme $a + b + c + d = n$, chaque bloc contient $n/4$ colonnes ; en particulier, 4 divise n .

Méthode 2 — Comptage à partir de la question 7

La question 7 donne $a = n/4$. Chaque ligne autre que la première est équilibrée, donc $a + b = n/2$ et $a + c = n/2$. Ainsi $b = c = n/4$. Enfin,

$$d = n - a - b - c = n/4.$$

Les quatre blocs ont la même taille. La première méthode exploite toutes les orthogonalités ; la seconde réutilise le comptage déjà établi.

11. Produit par blocs

Tous les coefficients de $A \otimes B$ sont des produits de deux nombres de $\{-1, 1\}$, donc appartiennent encore à cet ensemble.

Méthode 1 — Produit scalaire des colonnes

Repérons une colonne par un couple (j, s) , où $j \in \{1, \dots, n\}$ est l'indice de la colonne de blocs et $s \in \{1, \dots, k\}$ sa position dans ces blocs. Son coefficient dans la ligne repérée par (i, r) est $A_{i,j}B_{r,s}$.

Le produit scalaire des colonnes (j, s) et (h, t) vaut

$$\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^k A_{i,j}B_{r,s}A_{i,h}B_{r,t} = \left(\sum_{i=1}^n A_{i,j}A_{i,h} \right) \left(\sum_{r=1}^k B_{r,s}B_{r,t} \right) = nk\delta_{j,h}\delta_{s,t}.$$

Les colonnes distinctes sont donc orthogonales. La matrice $A \otimes B$ est de Hadamard.

Méthode 2 — Calcul matriciel par blocs

Posons $C = A \otimes B$. Le bloc (j, h) de tCC est

$$\sum_{i=1}^n {}^t(A_{i,j}B)(A_{i,h}B) = \sum_{i=1}^n A_{i,j}A_{i,h} {}^tBB = n\delta_{j,h} kI_k.$$

Donc ${}^tCC = nkI_{nk}$. Comme les coefficients de C valent ± 1 , la question 2 montre que C est de Hadamard.

La première approche explicite chaque colonne ; la seconde évite de développer les coefficients internes aux blocs.

12. Construction aux ordres puissances de deux

La matrice $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de Hadamard : ses deux colonnes sont orthogonales.

Supposons qu'une matrice de Hadamard H_{2^m} d'ordre 2^m ait été construite. La question 11 montre que

$$H_{2^{m+1}} = H_2 \otimes H_{2^m} = \begin{pmatrix} H_{2^m} & H_{2^m} \\ H_{2^m} & -H_{2^m} \end{pmatrix}$$

est de Hadamard et d'ordre 2^{m+1} . La récurrence, initialisée à $m = 1$, établit l'existence pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

13. Test informatique

Le code complété est le suivant. Le paramètre est un tableau bidimensionnel d'entiers, comme précisé dans l'énoncé.

Python

```
import numpy as np

def test_hadamard(M):
    n, p = np.shape(M)
    if n != p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, n):
                if M[i, j]**2 != 1:
                    return -1
        for j in range(0, n):
            for k in range(j + 1, n):
                if np.dot(M[:, j], M[:, k]) != 0:
                    return 0
    return 1
```

La première condition contrôle que la matrice est carrée. Les deux premières boucles vérifient que tous les coefficients valent 1 ou -1 . Les deux suivantes examinent une fois chaque paire de colonnes distinctes ; la borne exclusive de range permet à k de parcourir les indices de $j + 1$ à $n - 1$.

L'extraction $M[:, j]$ désigne toute la colonne d'indice j . La commande `np.dot` calcule ici un produit scalaire, et non un produit coefficient par coefficient.

Si aucune condition d'échec n'a été rencontrée, la définition d'une matrice de Hadamard est satisfaite, et la fonction renvoie 1.

Code exécuté : les quatre valeurs de sortie ont été vérifiées sur une matrice rectangulaire, une matrice contenant un coefficient 0, une matrice carrée de 1 et une matrice de Hadamard d'ordre 2. Le test a également validé les constructions de la question 12 aux ordres 2, 4, 8 et 16. Ces vérifications numériques accompagnent la justification du programme.

14. Recherche aléatoire

(a) Construction d'une ligne équilibrée

Pendant la construction, j compte les coefficients déjà choisis et nb_un le nombre de 1 parmi eux. Le nombre de -1 est donc $j - nb_un$. Il faut poursuivre tant que chacun de ces deux nombres est strictement inférieur à $n/2$.

La variable val vaut 0 ou 1, avec la même probabilité; $2*val - 1$ vaut donc -1 ou 1. Le nombre de 1 augmente de val , puis j augmente de 1.

Si le quota de 1 est atteint, le reste de la ligne doit être rempli de -1 . Si c'est le quota de -1 qui est atteint, les coefficients restants sont déjà égaux à 1, grâce à l'initialisation par `np.ones`.

(b) Programme complet et arrêt de la recherche

Voici un programme autonome incluant le test utilisé. On prend $m \geq 1$ et $N_{\max}$ entier positif ou nul.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def test_hadamard(M):
    n, p = np.shape(M)
    if n != p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, n):
                if M[i, j]**2 != 1:
                    return -1
        for j in range(0, n):
            for k in range(j + 1, n):
                if np.dot(M[:, j], M[:, k]) != 0:
                    return 0
```

```

    return 1

def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in range(0, Nmax):
        matpm = np.ones((n, n), dtype=int)
        for i in range(1, n):
            nb_un = 0
            j = 0
            while 2*nb_un < n and 2*(j - nb_un) < n:
                val = rd.randint(0, 2)
                nb_un += val
                matpm[i, j] = 2*val - 1
                j += 1
            if 2*nb_un == n:
                for k in range(j, n):
                    matpm[i, k] = -1
        if test_hadamard(matpm) == 1:
            return matpm
    return np.zeros((n, n), dtype=int)

```

La première ligne est conservée égale à 1, car i commence à 1 dans l'indexation Python. La boucle `while` termine au plus tard après n choix : les deux compteurs sont alors égaux à $n/2$. À sa sortie, chaque ligne contient exactement $n/2$ coefficients de chaque signe.

La boucle extérieure teste au plus $N_{\max}$ matrices. Dès qu'une matrice est reconnue comme étant de Hadamard, elle est renvoyée. Si tous les essais échouent, la matrice nulle est renvoyée. Pour $N_{\max} = 0$, aucun essai n'est effectué et la matrice nulle est directement renvoyée.

Code exécuté : les sorties des recherches aux ordres 4 et 8 ont été contrôlées, ainsi que le cas $N_{\max} = 0$. La construction des lignes a aussi été vérifiée séparément sur de nombreux tirages : première ligne constante, autres lignes équilibrées et coefficients dans $\{-1, 1\}$.

Une sortie nulle signifie seulement que les essais effectués n'ont pas abouti. Elle ne prouve pas l'inexistence d'une matrice de Hadamard à cet ordre. La recherche aléatoire

ne remplace pas la preuve d'existence de la question 12.

Partie II : variables aléatoires deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini

Toutes les variables de cette partie ont une image finie. Leurs moments et ceux de leurs produits ou transformations polynomiales existent donc. De plus, l'hypothèse sur les événements non vides donne $p_k > 0$ pour tout k , et

$$\sum_k p_k = 1.$$

15. Produit scalaire pondéré

Méthode 1 — Vérification des propriétés

L'application est symétrique puisque $u_k v_k = v_k u_k$. Elle est bilinéaire par distributivité et linéarité des sommes finies. Enfin,

$$\langle u; u \rangle = \sum_{k=1}^n p_k u_k^2 \geq 0.$$

Si cette somme est nulle, chacun de ses termes, positif ou nul, est nul. Comme $p_k > 0$, cela impose $u_k = 0$ pour tout k . Réciproquement, $u = 0$ donne une somme nulle.

L'application est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Méthode 2 — Changement d'échelle des coordonnées

Définissons $J(u) = (\sqrt{p_1}u_1, \dots, \sqrt{p_n}u_n)$. L'application J est linéaire et injective puisque

chaque $p_k > 0$. On a

$$\langle u; v \rangle = \langle J(u); J(v) \rangle_{\text{can}}.$$

Le produit scalaire canonique est symétrique et bilinéaire, donc l'application proposée l'est aussi. De plus, $\langle u; u \rangle = \|J(u)\|_{\text{can}}^2$, qui est nul exactement lorsque $J(u) = 0$, donc lorsque $u = 0$. C'est un produit scalaire.

Cette seconde méthode explique le rôle des facteurs $\sqrt{p_k}$ qui apparaîtront à la question 22.

16. Centrage et réduction

Posons $\mu_i = E(Z_i)$ et $\sigma_i^2 = \mathbb{V}(Z_i)$. Par la formule de la variance,

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^n p_k (Z_i(\omega_k) - \mu_i)^2.$$

Si cette variance était nulle, la stricte positivité des p_k imposerait $Z_i(\omega_k) = \mu_i$ pour tout k . Cela contredirait $\#Z_i(\Omega) \geq 2$. Ainsi $\sigma_i > 0$.

Les conditions recherchées équivalent à

$$a_i \mu_i + b_i = 0, \quad a_i^2 \sigma_i^2 = 1.$$

Puisque $a_i > 0$, elles imposent $a_i = 1/\sigma_i$ et $b_i = -\mu_i/\sigma_i$. Ces valeurs satisfont les deux conditions, donc l'unique couple est

$$(a_i, b_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}}, -\frac{E(Z_i)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}} \right).$$

Ainsi $X_i = (Z_i - \mu_i)/\sigma_i$ est centrée et réduite. Cette transformation affine est bijective sur l'image de Z_i , donc $\#X_i(\Omega) = \#Z_i(\Omega) \geq 2$.

17. Espérances et produits scalaires

Sur l'univers fini, la formule de l'espérance donne

$$E(V) = \sum_{k=1}^n p_k V(\omega_k) = \sum_{k=1}^n p_k v_k \cdot 1 = \langle v; u_0 \rangle.$$

De même,

$$E(VW) = \sum_{k=1}^n p_k V(\omega_k)W(\omega_k) = \langle v; w \rangle.$$

Les deux identités sont établies sans supposer que V et W soient indépendantes.

18. Une famille orthogonale

Les variables X_i sont centrées et réduites, donc

$$\langle x_i; u_0 \rangle = E(X_i) = 0, \quad \langle x_i; x_i \rangle = E(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) = 1.$$

Pour $i \neq j$, l'indépendance de Z_i et Z_j entraîne celle de leurs transformations affines X_i et X_j , par le lemme des coalitions. Ainsi,

$$\langle x_i; x_j \rangle = E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0.$$

Les trois relations demandées sont vérifiées. La seule indépendance utilisée est celle de chaque paire; l'indépendance mutuelle de toute la famille n'est pas nécessaire.

19. Borne sur le nombre de variables

On a

$$\langle u_0; u_0 \rangle = \sum_k p_k = 1.$$

Avec la question 18, la famille $(u_0, x_1, \dots, x_\ell)$ est orthonormale, donc libre, dans l'espace de dimension n .

Il s'ensuit $\ell + 1 \leq n$. Comme $\ell \geq 2$, on a aussi $\ell + 1 \geq 3$. Finalement,

$$3 \leq \ell + 1 \leq n.$$

20. Construction d'une transformation orthogonale

(a) Existence de coefficients non tous nuls

Posons $q_k = P(Z = \alpha_k) > 0$. Les valeurs $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont distinctes.

Méthode 1 — Théorème du rang

Considérons l'application linéaire

$$L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\beta_1, \dots, \beta_m) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^m q_k \beta_k, \sum_{k=1}^m q_k \alpha_k \beta_k \right).$$

Son rang est au plus 2, donc $\dim \operatorname{Ker} L = m - \operatorname{rg} L \geq m - 2 > 0$. Un vecteur non nul de son noyau fournit exactement les coefficients demandés.

Méthode 2 — Construction sur trois valeurs

Comme $m > 2$, on peut définir

$$\beta_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{q_1}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{q_2}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{q_3},$$

et $\beta_k = 0$ pour $k \geq 4$. Les dénominateurs sont strictement positifs, et $\beta_1 \neq 0$ puisque $\alpha_2 \neq \alpha_3$.

La première somme vaut

$$(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

La seconde vaut

$$\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1) + \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

par annulation terme à terme après développement. Les coefficients conviennent.

Le théorème du rang est la méthode générale ; la seconde méthode donne un exemple explicite.

(b) Isomorphisme d'évaluation

Méthode 1 — Racines et dimension

L'évaluation est linéaire. Si $T(Q) = 0$, le polynôme Q s'annule aux m réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Un polynôme non nul de degré au plus $m - 1$ ne peut avoir m racines distinctes. Donc $Q = 0$, et T est injective.

Les espaces $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ et $\mathbb{R}^m$ ont tous deux dimension m . Ainsi T est bijective, donc est un isomorphisme.

Méthode 2 — Interpolation explicite

Pour chaque k , définissons le polynôme

$$L_k(x) = \prod_{\substack{1 \leq h \leq m \\ h \neq k}} \frac{x - \alpha_h}{\alpha_k - \alpha_h}.$$

Les dénominateurs sont non nuls, et L_k est de degré $m - 1$. On a $L_k(\alpha_j) = \delta_{k,j}$.

Pour tout $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, le polynôme

$$Q_b = \sum_{k=1}^m b_k L_k$$

vérifie $T(Q_b) = b$. Donc T est surjective. Entre espaces de même dimension, une application linéaire surjective est bijective. C'est donc un isomorphisme, et son inverse est explicitement $b \mapsto Q_b$.

La première preuve est courte ; la seconde permet de construire le polynôme nécessaire à la suite.

(c) Polynôme recherché

Choisissons les β_k de la question (a). Par la question (b), il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$ tel que $Q(\alpha_k) = \beta_k$ pour tout k .

La formule du transfert sur l'image finie de Z donne

$$E(Q(Z)) = \sum_{k=1}^m q_k \beta_k = 0, \quad E(Q(Z)Z) = \sum_{k=1}^m q_k \alpha_k \beta_k = 0.$$

Au moins un β_k est non nul et chaque α_k est effectivement prise par Z . Ainsi $Q(Z)$ n'est pas identiquement nulle sur Ω .

Le polynôme demandé existe, et toutes ses propriétés sont établies.

21. Amélioration de la borne

(a) Adjonction de vecteurs orthogonaux

Posons $J = \{i \in \{1, \dots, \ell\} \mid \#X_i(\Omega) > 2\}$, de cardinal r . Pour chaque $i \in J$, appliquons la question 20 à X_i , qui est d'espérance nulle. Il existe un polynôme Q_i tel que, en posant $Y_i = Q_i(X_i)$,

$$E(Y_i) = 0, \quad E(Y_i X_i) = 0, \quad Y_i(\Omega) \neq \{0\}.$$

Notons $y_i = (Y_i(\omega_1), \dots, Y_i(\omega_n))$. La stricte positivité des p_k donne $\langle y_i; y_i \rangle = E(Y_i^2) > 0$, donc $y_i \neq 0$.

La question 17 donne $\langle y_i; u_0 \rangle = 0$ et $\langle y_i; x_i \rangle = 0$. Si $j \neq i$, les variables $Y_i = Q_i(X_i)$ et X_j sont indépendantes, puisque X_i et X_j le sont. Donc

$$\langle y_i; x_j \rangle = E(Y_i X_j) = E(Y_i)E(X_j) = 0.$$

Enfin, pour $i, j \in J$ distincts, Y_i et Y_j sont indépendantes, d'où $\langle y_i; y_j \rangle = 0$.

La famille formée de u_0 , des ℓ vecteurs x_i et des r vecteurs y_i est donc orthogonale et composée de vecteurs non nuls. Elle est libre dans $\mathbb{R}^n$; ainsi $1 + \ell + r \leq n$, soit

$$\ell + r \leq n - 1.$$

Le raisonnement reste valable si $r = 0$, sans adjonction de vecteurs.

(b) Borne sur r

Comme J est une partie de $\{1, \dots, \ell\}$, $r \leq \ell$. Ainsi $2r \leq \ell + r \leq n - 1$, ce qui donne

$$r \leq \frac{n-1}{2}.$$

22. Cas où le nombre de variables est maximal

(a) Variables à deux valeurs

Avec $\ell = n - 1$, la question 21(a) devient $n - 1 + r \leq n - 1$, donc $r = 0$. Aucune variable X_i ne prend plus de deux valeurs. La question 16 assure qu'elle en prend au moins deux.

Ainsi $\#X_i(\Omega) = 2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

(b) Valeurs d'une variable centrée réduite à deux valeurs

Fixons i et écrivons $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \beta_i$ et $\theta = \theta_i$. Puisque les deux valeurs sont effectivement prises et que les p_j sont strictement positifs, $0 < \theta < 1$.

Méthode 1 — Résolution des équations de moments

Le centrage donne $\theta\alpha + (1 - \theta)\beta = 0$, donc $\beta = -\frac{\theta}{1 - \theta}\alpha$. La moyenne nulle est une combinaison strictement positive des deux valeurs distinctes : elle impose $\beta < 0 < \alpha$.

La variance égale à 1 donne

$$1 = \theta\alpha^2 + (1 - \theta)\beta^2 = \theta\alpha^2 + \frac{\theta^2}{1 - \theta}\alpha^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}\alpha^2.$$

Donc $\alpha = \sqrt{(1 - \theta)/\theta}$. En remplaçant dans l'expression de β , on obtient $\beta = -\sqrt{\theta/(1 - \theta)} = -1/\alpha$.

Méthode 2 — Identité polynomiale satisfaite par la variable

La variable X_i prend seulement les valeurs α et β , donc

$$(X_i - \alpha)(X_i - \beta) = 0, \quad X_i^2 - (\alpha + \beta)X_i + \alpha\beta = 0.$$

En prenant l'espérance et en utilisant $E(X_i) = 0$ et $E(X_i^2) = 1$, on obtient $1 + \alpha\beta = 0$.

Ainsi $\alpha\beta = -1$; comme $\alpha > \beta$, $\alpha > 0 > \beta$ et $\beta = -1/\alpha$.

L'équation de centrage devient $\theta\alpha - (1 - \theta)/\alpha = 0$, soit $\theta\alpha^2 = 1 - \theta$. On retrouve $\alpha = \sqrt{(1 - \theta)/\theta}$.

La seconde approche fournit aussi l'identité $X_i^2 = (\alpha_i + \beta_i)X_i + 1$, utile à la question (f).

(c) Orthogonalité de MD

Posons $A = MD$. Le coefficient (i, j) de $A^t A$ est

$$(A^t A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_k M_{i,k} M_{j,k}.$$

Pour $i, j < n$, cette expression est $\langle x_i; x_j \rangle = \delta_{i,j}$ par la question 18. Pour $i < n$ et $j = n$, elle vaut $\langle x_i; u_0 \rangle = 0$; par symétrie il en va de même si $i = n$ et $j < n$. Enfin, le coefficient (n, n) vaut

$$\sum_k p_k = 1.$$

Ainsi $A^t A = I_n$. La matrice carrée A est surjective puisque tout X s'écrit $A(^t A X)$; elle est donc inversible et $A^{-1} = ^t A$. Par conséquent, $^t A A = I_n$ également.

La matrice MD est orthogonale au sens de la définition de l'énoncé.

(d) Expression de Y

L'orthogonalité de MD signifie que chacune de ses colonnes est de norme euclidienne 1. Pour la colonne j ,

$$1 = \sum_{k=1}^n (MD)_{k,j}^2 = p_j \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k(\omega_j)^2 \right).$$

Comme $p_j > 0$, on peut diviser par p_j . On obtient pour chaque ω_j ,

$$Y(\omega_j) = \frac{1}{p_j} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k(\omega_j)^2.$$

L'égalité point par point établit

$$Y = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k^2.$$

(e) Troisième moment

Fixons $i < n$. D'une part, la définition de Y donne

$$E(X_i Y) = \sum_{k=1}^n p_k X_i(\omega_k) \frac{1}{p_k} = \sum_{k=1}^n X_i(\omega_k).$$

D'autre part, la question (d) donne

$$E(X_i Y) = E(X_i) + E(X_i^3) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ j \neq i}} E(X_i X_j^2).$$

Pour $j \neq i$, X_i et X_j^2 sont indépendantes par le lemme des coalitions, donc $E(X_i X_j^2) = E(X_i)E(X_j^2) = 0$. Le premier terme est nul aussi.

En identifiant les deux expressions, on obtient

$$E(X_i^3) = \sum_{k=1}^n X_i(\omega_k).$$

(f) Contraintes sur les effectifs

Fixons i , et notons $\alpha = \alpha_i > 0$, $\beta = -1/\alpha$, $\theta = \theta_i$ et $m = m_i$. Puisque les deux valeurs sont prises, $1 \leq m \leq n - 1$.

L'identité polynomiale de la question (b) donne $X_i^2 = (\alpha + \beta)X_i + 1$. En multipliant par X_i , puis en prenant l'espérance,

$$E(X_i^3) = (\alpha + \beta)E(X_i^2) + E(X_i) = \alpha + \beta = \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

La somme non pondérée des valeurs de X_i vaut $m\alpha + (n - m)\beta = m\alpha - (n - m)/\alpha$. La question (e) impose donc

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = m\alpha - \frac{n - m}{\alpha}.$$

Après multiplication par $\alpha > 0$ et réarrangement,

$$(m - 1)\alpha^2 = n - m - 1.$$

Si $m = 1$, cette égalité donne $0 = n - 2$, ce qui contredit $n \geq 3$. Donc $m \geq 2$. Si $m = n - 1$, elle donne $(n - 2)\alpha^2 = 0$, impossible puisque $n \geq 3$ et $\alpha > 0$. Donc $m \leq n - 2$.

On a ainsi (A3) : $2 \leq m_i \leq n - 2$. Ces bornes impliquent $n \geq 4$, ce qui donne (A2).

Enfin, $m - 1 > 0$ et $n - m - 1 > 0$, donc

$$\alpha = \sqrt{\frac{n-m-1}{m-1}}.$$

La question (b) donne $\alpha^2 = (1-\theta)/\theta$, soit $\theta = 1/(1+\alpha^2)$. Par substitution,

$$\theta = \frac{m-1}{n-2}.$$

On obtient les deux formules de (A1). L'ordre de la preuve évite toute division par $m-1$ avant d'avoir établi qu'il est non nul.

(g)(a) Cas équiprobable : parité et probabilités

Sous l'hypothèse $p_k = 1/n$, l'événement $\{X_i = \alpha_i\}$ contient m_i issues, donc $\theta_i = m_i/n$. Avec la question (f),

$$\frac{m_i}{n} = \frac{m_i-1}{n-2}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque $n \geq 4$. Le produit en croix donne $(n-2)m_i = n(m_i-1)$, donc $2m_i = n$.

L'entier n est pair, et pour chaque i , $\theta_i = m_i/n = 1/2$.

(g)(b) Cas équiprobable : matrice de Hadamard

La question (b), avec $\theta_i = 1/2$, donne $\alpha_i = 1$ et $\beta_i = -1$. Toutes les lignes de M ont donc leurs coefficients dans $\{-1, 1\}$, y compris la dernière ligne constante.

Comme $D = I_n/\sqrt{n}$, la question (c) donne ${}^t(M/\sqrt{n})(M/\sqrt{n}) = I_n$, soit ${}^tMM = nI_n$.

Par la caractérisation de la question 2, M est de Hadamard.

Partie III : deux propriétés des matrices de Hadamard

Dans cette partie, le produit scalaire sur les vecteurs est le produit scalaire canonique. Sur les matrices, il est celui défini par la somme des produits des coefficients dans l'énoncé.

Pour toute matrice $Q \in \mathcal{O}_n$, l'égalité ${}^tQQ = I_n$ implique que Q est inversible et que $Q^{-1} = {}^tQ$. Ainsi $Q^tQ = I_n$ également. Les colonnes et les lignes de Q sont donc toutes de norme 1, et deux à deux orthogonales dans chacune de ces familles. Cette propriété découle de la définition et ne requiert aucun résultat supplémentaire sur les matrices orthogonales.

23. Linéarité et conservation de la norme

Pour $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, le coefficient (i, j) de $\varphi(ax + by)$ est $ax_{(i-1)n+j} + by_{(i-1)n+j}$. C'est le même coefficient que celui de $a\varphi(x) + b\varphi(y)$. Ainsi φ est linéaire.

Les indices $(i-1)n + j$, pour $1 \leq i, j \leq n$, parcourent une fois chacun les entiers de 1 à n^2 . Donc

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{(i-1)n+j}^2 = \sum_{k=1}^{n^2} x_k^2 = \|x\|^2.$$

Les normes étant positives ou nulles, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

Pour la suite, remarquons aussi que φ est bijective : pour toute matrice A , on peut définir de manière unique $x_{(i-1)n+j} = A_{i,j}$.

24. Norme et trace

Le coefficient diagonal (j, j) de tAA est

$$\sum_{i=1}^n A_{i,j}^2.$$

Ainsi, par définition de la trace,

$$\text{Tr}(^tAA) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{i,j}^2 = \|A\|^2.$$

L'égalité demandée est établie par une somme finie de coefficients diagonaux.

25. Encadrement de la somme des valeurs absolues

Pour chaque ligne i ,

$$\left(\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right)^2 = \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} |A_{i,j} A_{i,k}| \geq \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2.$$

En prenant les racines carrées, puis en sommant sur i ,

$$F(A) \geq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Pour l'autre inégalité, appliquons Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ aux n^2 valeurs $|A_{i,j}|$ et aux n^2 valeurs 1 :

$$F(A) \leq \left(\sum_{i,j} 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} A_{i,j}^2 \right)^{1/2} = n \|A\|.$$

On obtient l'encadrement (1).

26. Ensemble fermé et borné

Question adaptée au programme actuel : le sujet rappelle le critère de fermeture nécessaire aux égalités de coordonnées.

Pour $1 \leq j, k \leq n$, définissons sur $\mathbb{R}^{n^2}$ la fonction polynomiale, donc continue,

$$f_{j,k}(x) = \sum_{i=1}^n x_{(i-1)n+j} x_{(i-1)n+k} - \delta_{j,k}.$$

Par définition de l'orthogonalité,

$$\mathcal{K}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f_{j,k}(x) = 0 \text{ pour tous } 1 \leq j, k \leq n\}.$$

Il s'agit de l'ensemble défini par un nombre fini d'égalités entre fonctions continues et zéro. D'après le rappel fourni, cet ensemble est fermé.

Pour $x \in \mathcal{K}_n$, les questions 23 et 24 donnent

$$\|x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 = \text{Tr}({}^t\varphi(x)\varphi(x)) = \text{Tr}(I_n) = n.$$

Ainsi $\mathcal{K}_n$ est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$: il est borné. Enfin, il est non vide, puisque I_n possède un antécédent par φ .

27. Continuité de la fonction à optimiser

Pour tous réels a, b , l'inégalité triangulaire implique $||a| - |b|| \leq |a - b|$. En l'appliquant coefficient par coefficient et en utilisant l'inégalité triangulaire pour la somme,

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq F(\varphi(x) - \varphi(y)).$$

La linéarité de φ , puis les questions 25 et 23 donnent

$$F(\varphi(x) - \varphi(y)) = F(\varphi(x - y)) \leq n\|\varphi(x - y)\| = n\|x - y\|.$$

L'inégalité est prouvée. Elle entraîne la continuité de $F \circ \varphi$ sur $\mathbb{R}^{n^2}$: lorsque $\|x - y\|$ tend vers zéro, la différence des valeurs tend vers zéro.

28. Existence des deux extrema globaux

D'après la question 26, $\mathcal{K}_n$ est fermé, borné et non vide. D'après la question 27, $F \circ \varphi$ est continue. Le théorème d'existence des extrema d'une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^{n^2}$ assure que cette fonction atteint son minimum et son maximum sur $\mathcal{K}_n$.

Comme φ est bijective et $\varphi(\mathcal{K}_n) = \mathcal{O}_n$, les matrices images des deux points d'extremum réalisent respectivement le minimum et le maximum de F sur $\mathcal{O}_n$.

Les quantités M_n^- et M_n^+ sont donc bien définies et atteintes. Il s'agit d'une optimisation sur un ensemble fermé borné, et non d'une recherche par hessienne sur un ouvert.

29. Valeur du minimum

Méthode 1 — Normes des lignes

Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. Ses lignes sont de norme 1. L'inégalité inférieure de la question 25 donne

$$F(Q) \geq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n Q_{i,j}^2 \right)^{1/2} = n.$$

Comme $I_n \in \mathcal{O}_n$ et $F(I_n) = n$, on obtient $M_n^- = n$.

Méthode 2 — Comparaison coefficient par coefficient

La norme de chaque colonne vaut 1, donc $|Q_{i,j}| \leq 1$ pour chaque coefficient. Pour tout réel a de valeur absolue au plus 1, $|a| \geq a^2$. Ainsi

$$F(Q) \geq \sum_{i,j} Q_{i,j}^2 = \text{Tr}({}^tQQ) = n.$$

L'identité atteint cette borne, donc $M_n^- = n$.

La première méthode utilise l'encadrement établi ; la seconde prépare une caractérisation directe des matrices réalisant l'égalité.

30. Toutes les matrices réalisant le minimum

Méthode 1 — Égalité dans chaque ligne

Chaque ligne de Q est de norme 1 et sa somme de valeurs absolues est au moins 1. Si $F(Q) = n$, ces n sommes doivent toutes être égales à 1.

Pour chaque i , la différence entre le carré de la somme des valeurs absolues et la somme des carrés vaut donc zéro :

$$2 \sum_{j < k} |Q_{i,j} Q_{i,k}| = 0.$$

Tous les termes sont positifs ou nuls ; il ne peut donc y avoir deux coefficients non nuls dans une même ligne. Comme la ligne a norme 1, elle contient exactement un coefficient non nul, égal à 1 ou -1 .

Deux lignes ne peuvent avoir ce coefficient dans la même colonne, car leur produit scalaire vaudrait alors 1 ou -1 , au lieu de zéro. Les positions des coefficients non nuls définissent donc une permutation des colonnes.

Ainsi $Q = DP$, où D est diagonale à coefficients diagonaux ± 1 et P est une matrice de permutation. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale, car ${}^t(DP)(DP) = {}^tPD^2P = I_n$, et elle possède exactement n coefficients non nuls de valeur absolue 1. Donc $F(DP) = n$.

Méthode 2 — Égalité coefficient par coefficient

La preuve de la question 29 donne

$$F(Q) - n = \sum_{i,j} (|Q_{i,j}| - Q_{i,j}^2).$$

Chaque terme est positif ou nul. Si $F(Q) = n$, chaque terme doit être nul, donc chaque coefficient de Q appartient à $\{-1, 0, 1\}$.

La somme des carrés des coefficients d'une ligne vaut 1 ; chaque ligne contient donc exactement un coefficient ± 1 . Il en va de même pour chaque colonne. Les emplacements de ces coefficients définissent une matrice de permutation P , et les signes une matrice diagonale D , avec $Q = DP$.

La réciproque est celle vérifiée dans la première méthode. Les matrices demandées sont exactement les matrices de permutation dont les coefficients non nuls peuvent être remplacés indépendamment par 1 ou -1 .

La première méthode exploite l'égalité entre les deux normes d'une ligne ; la seconde exploite l'égalité dans une somme de termes positifs.

31. Identité donnant l'écart au maximum possible

Pour chaque réel a , $a \operatorname{sgn}(a) = |a|$, y compris pour $a = 0$, et $\operatorname{sgn}(a)^2 = 1$.

Ainsi $\langle Q; S(Q) \rangle = F(Q)$ et $\|S(Q)\|^2 = n^2$. De plus, $\|Q\|^2 = n$. En développant le carré de la norme,

$$\left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2 = \|Q\|^2 + \frac{1}{n} \|S(Q)\|^2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \langle Q; S(Q) \rangle = 2n - \frac{2}{\sqrt{n}} F(Q).$$

En isolant $F(Q)$, on obtient

$$F(Q) = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2.$$

32. Borne supérieure et cas d'égalité

Méthode 1 — Utilisation de l'identité de la question 31

Le carré de la norme est positif ou nul, donc pour toute matrice orthogonale Q , $F(Q) \leq n\sqrt{n}$. Par conséquent $M_n^+ \leq n\sqrt{n}$.

Si $M_n^+ = n\sqrt{n}$, la question 28 fournit une matrice orthogonale Q réalisant cette valeur. L'identité de la question 31 impose $Q = S(Q)/\sqrt{n}$.

Posons $H = S(Q)$. Ses coefficients sont ± 1 et ${}^t H H = n {}^t Q Q = n I_n$. Donc H est de Hadamard, par la question 2.

Réciproquement, si H est de Hadamard, alors $Q = H/\sqrt{n}$ est orthogonale et

$$F(Q) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j} |H_{i,j}| = \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}.$$

Donc $M_n^+ = n\sqrt{n}$ exactement lorsqu'une matrice de Hadamard d'ordre n existe.

Méthode 2 — Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz

Dans $\mathbb{R}^{n^2}$, Cauchy-Schwarz appliquée au vecteur des $|Q_{i,j}|$ et au vecteur constant égal à 1 donne $F(Q) \leq n\|Q\| = n\sqrt{n}$.

Il y a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si tous les

$|Q_{i,j}|$ ont une même valeur $c \geq 0$. Or

$$\sum_{i,j} Q_{i,j}^2 = n,$$

donc $n^2 c^2 = n$, ce qui impose $c = 1/\sqrt{n}$.

Dans ce cas, $H = \sqrt{n}Q$ a ses coefficients dans $\{-1, 1\}$ et vérifie ${}^t H H = nI_n$, donc est de Hadamard. Inversement, une telle matrice H fournit $Q = H/\sqrt{n}$ réalisant l'égalité.

Puisque le maximum est atteint, cette caractérisation de l'égalité pour Q est aussi celle de l'égalité pour M_n^+ .

La première méthode mesure un écart à la matrice des signes ; la seconde explique pourquoi la répartition uniforme des valeurs absolues est nécessaire au maximum possible.

33. Inégalité stricte hors des multiples de quatre

Dans cette partie $n \geq 3$. D'après la question 8, une matrice de Hadamard d'un tel ordre ne peut exister que si 4 divise n .

Si n n'est pas un multiple de 4, il n'existe donc aucune matrice de Hadamard d'ordre n . La question 32 exclut l'égalité $M_n^+ = n\sqrt{n}$. Comme $M_n^+ \leq n\sqrt{n}$, on conclut

$$M_n^+ < n\sqrt{n}.$$

L'atteinte du maximum est essentielle : elle permet de passer d'une impossibilité d'égalité pour chaque matrice à l'inégalité stricte pour la valeur maximale.

34. Une famille explicite de matrices d'ordre trois

Les colonnes de $U(\alpha, \beta)$ sont

$$c_1 = (\alpha, \beta, -\beta), \quad c_2 = (\beta, \alpha, \beta), \quad c_3 = (\beta, -\beta, -\alpha).$$

Chacune a sa norme au carré égale à $\alpha^2 + 2\beta^2$. Leurs produits scalaires sont

$$\langle c_1; c_2 \rangle = 2\alpha\beta - \beta^2, \quad \langle c_1; c_3 \rangle = 2\alpha\beta - \beta^2, \quad \langle c_2; c_3 \rangle = \beta^2 - 2\alpha\beta.$$

L'orthogonalité équivaut donc au système

$$\alpha^2 + 2\beta^2 = 1, \quad \beta(2\alpha - \beta) = 0.$$

Si $\beta = 0$, la première équation donne $\alpha = \pm 1$. Si $\beta = 2\alpha$, elle donne $9\alpha^2 = 1$, donc $(\alpha, \beta) = (1/3, 2/3)$ ou $(-1/3, -2/3)$.

Les quatre couples sont donc exactement

$$(1, 0), \quad (-1, 0), \quad (1/3, 2/3), \quad (-1/3, -2/3).$$

Les trois coefficients impliquant α et les six impliquant β donnent $F(U) = 3|\alpha| + 6|\beta|$. Cette valeur est 3 dans les deux premiers cas et 5 dans les deux derniers.

Ainsi $M_3^+ \geq 5$. Comme 3 n'est pas multiple de 4, la question 33 donne finalement

$$5 \leq M_3^+ < 3\sqrt{3} \approx 5,196152.$$

L'intervalle est un encadrement; cette question ne démontre pas que le maximum est égal à 5.

35. Un écart quantitatif lorsque les matrices de signes ne sont pas de Hadamard

(a) Produit scalaire de vecteurs de signes en dimension paire

Chaque produit $x_i y_i$ vaut 1 ou -1 . Si a de ces produits valent 1, les $n - a$ autres valent -1 . Ainsi

$$\langle x; y \rangle = a - (n - a) = 2a - n.$$

Puisque n est pair, ce produit scalaire est un entier pair. S'il est non nul, sa valeur absolue est au moins 2.

(b) Comparaison de deux produits scalaires

Par bilinéarité,

$$\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle = \langle x - u; y \rangle + \langle u; y - v \rangle.$$

L'inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz donnent

$$|\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle| \leq \|x - u\| \|y\| + \|u\| \|y - v\|.$$

Pour $a, b \geq 0$, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, car la différence du membre de droite et du membre de gauche est $(a - b)^2$. En prenant $a = \|x - u\| \|y\|$ et $b = \|u\| \|y - v\|$, on obtient

$$|\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle| \leq \sqrt{2 (\|y\|^2 \|x - u\|^2 + \|u\|^2 \|y - v\|^2)}.$$

Cette preuve couvre également le cas où certains vecteurs sont nuls.

(c) Distance à la matrice des signes normalisée

Notons s_j la colonne j de $S(Q)$ et q_j la colonne j de Q . Les coefficients de $S(Q)$ valent ± 1 . Si $S(Q)$ n'est pas de Hadamard, il existe donc deux colonnes distinctes s_j, s_k dont le produit scalaire est non nul.

La question (a) donne $|\langle s_j; s_k \rangle| \geq 2$. Posons $x = s_j / \sqrt{n}$, $y = s_k / \sqrt{n}$, $u = q_j$ et $v = q_k$. Les quatre vecteurs ont norme 1 ; de plus $\langle u; v \rangle = 0$ puisque Q est orthogonale.

Ainsi $|\langle x; y \rangle - \langle u; v \rangle| = |\langle s_j; s_k \rangle|/n \geq 2/n$. La question (b) implique donc

$$\frac{2}{n} \leq \sqrt{2 \left(\left\| \frac{s_j}{\sqrt{n}} - q_j \right\|^2 + \left\| \frac{s_k}{\sqrt{n}} - q_k \right\|^2 \right)}.$$

Après élévation au carré et division par 2,

$$\left\| \frac{s_j}{\sqrt{n}} - q_j \right\|^2 + \left\| \frac{s_k}{\sqrt{n}} - q_k \right\|^2 \geq \frac{2}{n^2}.$$

La norme matricielle au carré est la somme des normes au carré des différences de toutes les colonnes. Tous ces termes sont positifs ou nuls, et elle contient les deux termes précédents. Donc

$$\left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q) \right\|^2 \geq \frac{2}{n^2}.$$

(d) Borne améliorée sur le maximum

Supposons qu'il n'existe aucune matrice de Hadamard d'ordre n . Pour toute matrice orthogonale Q , sa matrice de signes $S(Q)$ n'est donc pas de Hadamard. La question (c) s'applique à chacune de ces matrices.

Avec la question 31,

$$F(Q) \leq n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{2}{n^2} = n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

En prenant le maximum sur $\mathcal{O}_n$, on obtient

$$M_n^+ \leq n\sqrt{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Cette conclusion est établie sous les hypothèses de la question 35, notamment la parité de n .

Relevé des adaptations

- 26 : ajout dans le sujet du rappel qu'un ensemble défini par un nombre fini d'égalités de fonctions continues à zéro est fermé. Ce rappel précise la propriété topologique utilisée, conformément au référentiel, sans modifier l'ensemble étudié ni la conclusion demandée.