



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2023

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes.

- Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\{0, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers k vérifiant $0 \leq k \leq n$.
De même, $\{1, \dots, n\}$ désigne les entiers de 1 à n .
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .
- Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont notés $(A)_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.
- La transposée d'une matrice A est notée tA . Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a . Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|V\|$ sa norme euclidienne.
- Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $E(X)$ son espérance, si elle existe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k de X , s'il existe, le réel $E(X^k)$. On le note $m_k(X)$ et on convient que $m_0(X) = 1$.
- Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $\nabla g(x_1, x_2)$ et $\nabla^2 g(x_1, x_2)$, respectivement, son gradient et sa matrice hessienne au point (x_1, x_2) .
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction puissance α sur $\mathbb{R}_+$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ si $x > 0$, et $0^\alpha = 0$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $f|_J$ la restriction de f à J .

Partie I : questions préliminaires, problème des moments

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

1. Montrer que, dans les cas suivants, la variable X admet des moments de tout ordre et déterminer ces moments.

1. (a) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. (b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite, on se donne une suite de réels $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et un intervalle J de $\mathbb{R}$.

On considère le problème suivant, appelé problème des moments et noté $\mathcal{M}^*(J)$: trouver une variable aléatoire réelle X vérifiant les trois conditions suivantes.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et $m_k(X) = u_k$.
- X admet une densité f , avec $f|_J$ continue sur J .
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus J$, $f(x) = 0$.

Si X est une solution de ce problème et f une densité de X vérifiant les points précédents, on dit que f est une densité de X adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$.

Dans ce problème, on s'intéressera uniquement à deux cas : le cas $J = \mathbb{R}_+$, appelé problème de Stieltjes, et le cas $J = [0, 1]$, appelé problème de Hausdorff.

Partie II : le problème de Stieltjes

II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On suppose dans cette partie II.1 que le problème $\mathcal{M}^*(J)$ avec $J = \mathbb{R}_+$ admet une solution notée X . On note f une densité de X adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n et G_n les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}, \quad (G_n)_{i,j} = u_{i+j-1}.$$

2. Écrire explicitement H_3 et G_3 en fonction de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$${}^t W H_n W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2} \quad (1),$$

puis que

$${}^t W H_n W = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx \quad (2),$$

où P est la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de H_n sont positives ou nulles.

5. Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de G_n sont positives ou nulles.
6. On suppose uniquement dans cette question que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{3}$. Montrer que nécessairement $u_3 \geq \frac{2}{9}$.
7. On suppose dans cette question seulement qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(t^\theta) dt$ converge.
7. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $t^n \exp(-t^\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$.
7. (b) En déduire que la série de terme général $(u_n)^{-\theta/n}$ diverge.

8. Python

On se donne un entier naturel N . On pose $N^* = 1 + \lfloor N/2 \rfloor$.

On voudrait vérifier numériquement que la condition suivante, portant sur les $N + 1$ premiers termes $u_0, \dots, u_N$, est vérifiée :

$$\forall n \in \{1, \dots, N^*\}, \quad \text{toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives ou nulles} \quad (CS_N).$$

On rappelle que cette condition est nécessaire d'après la question 4.

La fonction `test_stieltjes` ci-dessous est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` de type `array` comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \dots, u_N$.

Compléter les parties laissées en blanc afin que la fonction renvoie la valeur 1 si la condition (CS_N) est satisfaite et la valeur 0 sinon.

La fonction `eigvalsh` de `numpy.linalg` renvoie un tableau unidimensionnel contenant les valeurs propres d'une matrice symétrique donnée en paramètre. La commande `len(U)` donne la taille du tableau `U`. La division entière $\mathbb{N} // 2$ donne $\lfloor N/2 \rfloor$.

Reproduire le programme après l'avoir complété, sans les commentaires.

Python

```
import numpy as np

import numpy.linalg as al

def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U

    m = 1 + N // 2

    H = np.zeros((m, m))

    for n in range(1, m + 1): # taille de la matrice H_n
        for i in range(_____, _____):
            H[i, n - 1] = U[i + n - 1]

            H[n - 1, i] = _____

    valp = al.eigvalsh(H)

    for k in range(0, _____):
        if (_____):
            return ____

    return ____
```

II.2) Non unicité des solutions

On définit la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(-x^{1/4}) \sin(x^{1/4})$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ existent. On convient que $t^0 = 1$.

On note dans la suite

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt, \quad T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt, \quad V_n = \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

10. Montrer que $S_0 = \frac{1}{2}$. On admet que $T_0 = S_0$.

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n \quad (3),$$

$$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1)S_n \quad (4).$$

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = (n+1)MV_n$, où

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = n!M^n V_0$.

14. Calculer M^4 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{4n+3} = 0$.

15. En utilisant le changement de variable $x = t^4$, dont on justifiera la validité, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 0 \quad (5).$$

16. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2 positives, distinctes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx \quad (6)$$

existent et sont égales.

17. Que peut-on conclure par rapport au problème $\mathcal{M}^*(J)$ quand $J = [0, +\infty[$?

Partie III : le problème de Hausdorff

Dans toute cette partie, on suppose que $J = [0, 1]$.

III.1) Une condition nécessaire d'existence

On suppose dans ce paragraphe III.1 que le problème $\mathcal{M}^*(J)$ avec $J = [0, 1]$ admet une solution notée à nouveau X . On note f une densité de X adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$.

18. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

19. Plus généralement, montrer que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0 \quad (7).$$

20. On suppose dans cette question seulement que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{3}$. Montrer que $u_3 \in \left] \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right[$.

21. Revenons au cas général. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général u_n/n^α , $n \geq 1$, est convergente. Cette affirmation reste-t-elle vraie quand $\alpha = 0$?

III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

Revenons à la condition (7). Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} \quad (8).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la condition (7) est vraie à l'ordre n si

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \Delta_{n,j} > 0 \quad (CH_n).$$

22. Exprimer $\Delta_{n,0}$ en fonction de u_n .

23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} \quad (9).$$

24. Python

La fonction `test_hausdorff` ci-dessous est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` de type `array` comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \dots, u_N$. Ici N est calculé à partir de la taille de `U` en utilisant la fonction `len`, qui renvoie la taille du tableau.

Compléter les parties laissées en blanc afin que la fonction renvoie un couple comportant les deux éléments suivants :

- Un entier `info` tel que `info = -1` si la condition (CH_n) est satisfaite pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$; sinon, `info` est le plus petit entier $n \in \{0, \dots, N\}$ pour lequel (CH_n) n'est pas satisfaite.
- Un tableau bidimensionnel `Delta`, de taille $(N+1) \times (N+1)$, comportant les coefficients $\Delta_{n,j}$ pour $n, j \in \{0, \dots, N\}$. On pose $\Delta_{n,j} = 0$ si $j > n$.

Reproduire le programme après l'avoir complété, sans les commentaires.

Python

```
import numpy as np

def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
    Delta = np.zeros((N + 1, N + 1))
    info = -1
    for k in range(_____, _____):
        Delta[k, 0] = U[_____]
        if ((_____ ) and (info == -1)):
            info = k
        for j in range(_____, _____):
            Delta[k, j] = _____
            if ((_____ ) and (_____ )):
                info = _____
    return (info, Delta)
```

25. Python

Python

```
import numpy as np

def test3():
    N = 10
    U = np.zeros(N + 1)
    for k in range(0, N + 1):
        U[k] = 1.0 / (k + 1) # correspond à une loi uniforme
    V = test_hausdorff(U)
    U[3] = 0.16
    W = test_hausdorff(U)
    return V, W
```

On tape dans la console :

Python

```
V, W = test3()
```

Quelles seront les valeurs de $V[0]$ et $W[0]$ retournées ?

III.3) Unicité de solutions à densité de classe C^1

On suppose dans ce paragraphe que X_1 et X_2 sont solutions du problème $\mathcal{M}^*(J)$ avec $J = [0, 1]$. On note f_1 et f_2 des densités de X_1 et X_2 , respectivement, adaptées au problème $\mathcal{M}^*(J)$. On suppose les restrictions de f_1 et f_2 sur $[0, 1]$ de classe C^1 sur $[0, 1]$. On pose $h = f_2 - f_1$ et on considère la suite de fonctions polynomiales $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\hat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

26. Montrer qu'il existe une constante réelle $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |h(x) - h(y)| \leq K|x - y|.$$

27. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés tous les deux. Soit Y_n une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. On pose $Z_n = Y_n/n$.

27. (a) Montrer que $|h(x) - E(h(Z_n))| \leq KE(|Z_n - x|)$.

27. (b) En déduire que $|h(x) - E(h(Z_n))| \leq K\sqrt{E((Z_n - x)^2)}$.

28. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \hat{h}_n(x) h(x) dx = 0$.

30. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx$.

31. En déduire que $f_1 = f_2$. Conclure.

III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit trois fonctions :

$$R_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) dt,$$

$$F_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_k(\alpha_1, \alpha_2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)},$$

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\alpha_1, \alpha_2) = \ln(R_0(\alpha_1, \alpha_2)) - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2.$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction R_k est continue sur $\mathbb{R}^2$.

32. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq Cx^2.$$

33. Soit $k \in \mathbb{N}$.

33. (a) Montrer que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point et que, pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (10).$$

On admet que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable en tout point et que

$$\partial_2 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (11).$$

33. (b) Pour tout $i \in \{1, 2\}$, en déduire l'identité $\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i$ (12).

33. (c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 (t^i - F_i(\alpha_1, \alpha_2))(t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)) \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) dt.$$

34. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

34. (a) Exprimer $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ en fonction des dérivées partielles des $F_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $k \geq 0$.

34. (b) En déduire que, pour tout

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

tel que $v \neq 0$, on a ${}^t v \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0$.

34. (c) En déduire que les valeurs propres de la matrice $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ sont strictement positives.

34. (d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une variable aléatoire X solution de $\mathcal{M}^*(J)$ et de densité f adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$ telle que

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) & \text{si } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que G admet alors un minimum local en (α_1, α_2) .