



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ESSEC–HEC, mathématiques approfondies, 2023

Partie I : questions préliminaires, problème des moments

1. (a) Loi uniforme sur $[0, 1]$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est bornée sur $[0, 1]$. Le moment existe donc absolument. Par le théorème de transfert,

$$m_n(X) = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

La formule vaut également pour $n = 0$ et donne $m_0(X) = 1$.

1. (b) Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Méthode 1 — Changement de variable et fonction gamma

La densité vaut $\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le changement de variable affine $t = \lambda x$, effectué d'abord sur un segment puis prolongé par passage à la limite, donne

$$\int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

La convergence de l'intégrale gamma, avec $n+1 > 0$, justifie l'existence absolue du moment. Ainsi $m_n(X) = n!/\lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Intégration par parties et récurrence

Sur un voisinage de 0, $x^n \lambda e^{-\lambda x}$ est continue et bornée. À l'infini, $x^n e^{-\lambda x/2}$ tend vers 0

par croissance comparée : pour x suffisamment grand, $x^n \lambda e^{-\lambda x} \leq \lambda e^{-\lambda x/2}$. Tous les moments existent donc par comparaison à une intégrale exponentielle convergente.

Pour $n \geq 1$ et $A > 0$, une intégration par parties sur $[0, A]$ donne

$$\int_0^A x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = -A^n e^{-\lambda A} + n \int_0^A x^{n-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Le terme de bord tend vers 0. En passant à la limite, $m_n(X) = \frac{n}{\lambda} m_{n-1}(X)$. Puisque $m_0(X) = 1$, la récurrence donne $m_n(X) = n!/\lambda^n$.

La première méthode reconnaît une intégrale usuelle ; la seconde reste utilisable lorsqu'on veut établir directement une relation entre moments successifs.

Partie II : le problème de Stieltjes

II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On utilise ici les hypothèses de II.1 : f est une densité, continue sur $\mathbb{R}_+$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et tous ses moments existent. En particulier, $f \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} f = 1$.

2. Écriture des matrices

En appliquant les indices $i + j - 2$ et $i + j - 1$ aux neuf coefficients,

$$H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices sont symétriques : le coefficient ne change pas lorsque l'on échange i et j .

3. Expression de la forme quadratique

La i -ième coordonnée de $H_n W$ est

$$\sum_{j=1}^n u_{i+j-2} \alpha_j.$$

Le produit par ${}^t W$ donne donc

$${}^t W H_n W = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n u_{i+j-2} \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}.$$

Tous les moments étant finis, chaque intégrale $\int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x) dx$ converge absolument. On peut ainsi employer la linéarité d'une somme finie d'intégrales :

$${}^t W H_n W = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2} \right) f(x) dx.$$

Le polynôme entre parenthèses est

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} \right)^2 = P(x)^2.$$

On obtient bien (1) et (2). La même expansion montre que $P^2 f$ est intégrable.

4. Signe des valeurs propres de H_n

La matrice H_n est réelle symétrique ; le théorème spectral s'applique. Soit λ une valeur propre et $W \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda \|W\|^2 = {}^t W H_n W = \int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x) dx \geq 0.$$

Comme $\|W\|^2 > 0$, on a $\lambda \geq 0$. Toutes les valeurs propres sont donc positives ou nulles, comme demandé.

On peut même établir ici la stricte positivité. La continuité de f et $\int f = 1$ assurent l'existence d'un point $x_0 > 0$ où $f(x_0) > 0$, puis d'un intervalle ouvert contenu dans $]0, +\infty[$ où $f > 0$. Si $W \neq 0$, P est un polynôme non nul et ne peut s'annuler sur cet intervalle entier. Il existe donc un sous-intervalle où $P^2 f > 0$, ce qui donne une intégrale strictement positive. Ainsi les hypothèses de densité permettent en réalité $\lambda > 0$.

5. Signe des valeurs propres de G_n

La même multiplication et la linéarité finie donnent, pour $W = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ et

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1},$$

$${}^t W G_n W = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-1} = \int_0^{+\infty} x P(x)^2 f(x) dx.$$

La convergence résulte de l'existence des moments jusqu'à l'ordre $2n - 1$. L'intégrande est positif ou nul. Comme G_n est symétrique, si $G_n W = \lambda W$ avec $W \neq 0$, alors $\lambda \|W\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$.

Les valeurs propres de G_n sont donc positives ou nulles. Le raisonnement de stricte positivité de la question 4 s'applique aussi sur un intervalle où $x > 0$ et $f(x) > 0$: elles sont même strictement positives sous les hypothèses de II.1.

6. Minoration de u_3

Méthode 1 — Forme quadratique de G_2

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & u_3 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 5, sa forme quadratique est positive ou nulle. Pour $W = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq {}^t W G_2 W = \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + u_3 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{3} \right)^2 + u_3 - \frac{2}{9}.$$

En choisissant $a = -2/3$, on obtient $u_3 \geq 2/9$.

Méthode 2 — Inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales

Pour $A > 0$, appliquons Cauchy-Schwarz sur $[0, A]$ aux fonctions continues $a(x) = \sqrt{x f(x)}$ et $b(x) = \sqrt{x^3 f(x)}$. Il vient

$$\left(\int_0^A x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^A x f(x) dx \right) \left(\int_0^A x^3 f(x) dx \right).$$

Les trois intégrales convergent par les hypothèses sur les moments. Le passage à la limite $A \rightarrow +\infty$ donne $u_2^2 \leq u_1 u_3$. Avec $u_1 = 1/2 > 0$ et $u_2 = 1/3$, cela devient $u_3 \geq 2/9$.

La première méthode exploite directement la matrice étudiée ; la seconde fait apparaître une inégalité entre trois moments successifs.

7. (a) Maximum de $t^n \exp(-t^\theta)$

Fixons $n \geq 1$ et $\theta > 0$. La fonction $\varphi(t) = t^n e^{-t^\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, vaut 0 en 0 et tend vers 0 à l'infini. Pour $t > 0$,

$$\varphi'(t) = t^{n-1} e^{-t^\theta} (n - \theta t^\theta).$$

Tous les facteurs hors parenthèses sont strictement positifs. La dérivée est positive pour $0 < t < (n/\theta)^{1/\theta}$, nulle en cette borne et négative ensuite. Le maximum global est donc

$$\varphi\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{1/\theta}\right) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}.$$

L'inégalité demandée vaut pour tout $t \geq 0$, y compris $t = 0$.

7. (b) Divergence de la série

Posons $A = \int_0^{+\infty} f(t)e^{t^\theta} dt$. Par hypothèse, A est fini; de plus $A \geq \int_0^{+\infty} f = 1$.

La question 7(a), multipliée par $f(t)e^{t^\theta} \geq 0$ puis intégrée, donne

$$u_n \leq A \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}.$$

On a $u_n > 0$: comme à la question 4, $f > 0$ sur un intervalle contenu dans $]0, +\infty[$, où $t^n f(t) > 0$. On peut donc élever la dernière inégalité à la puissance négative $-\theta/n$, ce qui inverse son sens :

$$(u_n)^{-\theta/n} \geq A^{-\theta/n} \frac{\theta e}{n}.$$

Comme $A^{-\theta/n} = \exp(-\theta \ln(A)/n) \rightarrow 1$, cette quantité est au moins $1/2$ à partir d'un certain rang. Dès lors,

$$(u_n)^{-\theta/n} \geq \frac{\theta e}{2n}.$$

La série harmonique diverge, donc la série à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} (u_n)^{-\theta/n}$$

diverge par comparaison.

8. Test de Stieltjes en Python

Question adaptée au programme actuel : la condition est écrite pour $1 \leq n \leq N^*$, au lieu de $0 \leq n \leq N^*$ dans le PDF. C'est une rectification de cohérence : seules les matrices H_n , $n \geq 1$, sont définies. Elle ne change pas la boucle du programme source, qui commence déjà à 1.

Le programme complété est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.linalg as al

def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1
    m = 1 + N // 2
    H = np.zeros((m, m))
    for n in range(1, m + 1):
        for i in range(0, n):
            H[i, n - 1] = U[i + n - 1]
            H[n - 1, i] = U[i + n - 1]
        valp = al.eigvalsh(H)
        for k in range(0, m):
            if valp[k] < 0:
                return 0
    return 1
```

La matrice H garde une taille fixe $m \times m$. Après l'étape de taille n , son bloc supérieur gauche est H_n et tous les autres coefficients sont nuls. En effet, la boucle remplit la nouvelle colonne et la nouvelle ligne avec le coefficient u_{i+n-1} , les indices Python commençant à 0. Les coefficients déjà écrits sont conservés.

Les valeurs propres de cette matrice sont celles de H_n , auxquelles s'ajoutent $m - n$ zéros : un vecteur se décompose en ses n premières coordonnées et ses $m - n$ dernières. Il faut donc parcourir les m valeurs renvoyées par `eigvalsh`, et refuser seulement une valeur strictement négative. Les zéros sont autorisés par (CS_N) .

L'indice maximal utilisé dans U est $2m - 2 = 2\lfloor N/2 \rfloor \leq N$; aucun accès ne dépasse les données disponibles. Si $N = 0$, $m = 1$ et le programme teste simplement $H_1 = [u_0]$.

Le code a été exécuté : il renvoie 1 pour $U = \text{np.array}([1.0])$ et pour les moments uniformes jusqu'à l'ordre 10 ; il renvoie 0 pour $U = \text{np.array}([1.0, 0.0, -1.0])$, dont H_2 possède une valeur propre négative.

Il s'agit d'un test numérique d'une condition nécessaire, qui ne prouve pas l'existence

d'une solution. En calcul flottant, une valeur proche de zéro peut subir une erreur d'arrondi ; le programme reproduit exactement le test demandé, sans seuil numérique ajouté.

II.2) Non unicité des solutions

9. Existence des intégrales S_n et T_n

Pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrandes sont continues sur $[0, +\infty[$, en convenant que $t^0 = 1$. De plus,

$$|t^n e^{-t} \sin t| \leq t^n e^{-t}, \quad |t^n e^{-t} \cos t| \leq t^n e^{-t}.$$

L'intégrale majorante est $\Gamma(n+1) = n! < +\infty$. Par comparaison, les deux intégrales convergent absolument ; S_n , T_n et V_n sont donc bien définis.

10. Calcul de S_0

Méthode 1 — Primitive réelle

La fonction $F(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)$ vérifie

$$F'(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t) = e^{-t} \sin t.$$

Ainsi, sur $[0, A]$, $\int_0^A e^{-t} \sin t \, dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-A}(\sin A + \cos A)$. Le dernier terme tend vers 0, car sinus et cosinus sont bornés. On conclut $S_0 = 1/2$.

Méthode 2 — Deux intégrations par parties

Écrivons $S(A) = \int_0^A e^{-t} \sin t \, dt$ et $T(A) = \int_0^A e^{-t} \cos t \, dt$. Sur le segment $[0, A]$, les intégrations par parties donnent

$$S(A) = -e^{-A} \sin A + T(A),$$

$$T(A) = 1 - e^{-A} \cos A - S(A).$$

Les convergences absolues ont été établies en question 9. Les termes de bord tendant vers 0, on obtient $S_0 = T_0$ et $T_0 = 1 - S_0$, d'où $S_0 = T_0 = 1/2$.

La première méthode convient si l'on reconnaît une primitive ; la seconde fournit les deux valeurs sans chercher de primitive explicite. La valeur $T_0 = S_0$ était déjà admise dans l'énoncé.

11. Relations entre intégrales successives

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Sur $[0, A]$, prenons $u(t) = t^{n+1}e^{-t}$, de dérivée $u'(t) = ((n+1)t^n - t^{n+1})e^{-t}$.

En intégrant $u(t) \sin t$ par parties avec la primitive $-\cos t$,

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t} \sin t \, dt = [-t^{n+1}e^{-t} \cos t]_0^A + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \cos t \, dt - \int_0^A t^{n+1}e^{-t} \cos t \, dt.$$

Le terme de bord en 0 est nul, et celui en A tend vers 0 par croissance comparée. Toutes les intégrales convergent par la question 9. En passant à la limite,

$$S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n.$$

De même, en intégrant $u(t) \cos t$ avec la primitive $\sin t$,

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t} \cos t \, dt = [t^{n+1}e^{-t} \sin t]_0^A - (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \sin t \, dt + \int_0^A t^{n+1}e^{-t} \sin t \, dt.$$

Le passage à la limite, justifié de la même façon, donne $T_{n+1} = -(n+1)S_n + S_{n+1}$, soit

$$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1)S_n.$$

12. Relation matricielle

En additionnant les relations (3) et (4), puis en les soustrayant, on obtient

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(S_n + T_n), \quad T_{n+1} = \frac{n+1}{2}(-S_n + T_n).$$

Ces deux égalités se regroupent en

$$V_{n+1} = (n+1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} V_n = (n+1) M V_n.$$

13. Expression de V_n

On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, $0! M^0 V_0 = V_0$, puisque $0! = 1$ et $M^0 = I_2$.

Supposons $V_n = n! M^n V_0$. La question 12 donne

$$V_{n+1} = (n+1) M V_n = (n+1) n! M M^n V_0 = (n+1)! M^{n+1} V_0.$$

L'initialisation et l'hérédité établissent $V_n = n! M^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. Calcul de M^4 et annulation de S_{4n+3}

Les produits successifs donnent

$$M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^4 = -\frac{1}{4} I_2.$$

Comme $V_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, on a

$$M^3 V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la question 13 donne alors

$$V_{4n+3} = (4n+3)!(M^4)^n M^3 V_0 = (4n+3)! \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Sa première coordonnée est nulle : $S_{4n+3} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15. Moments de g

La fonction $g(x) = e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 < a < b$, le changement de variable $x = t^4$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 entre $[a^{1/4}, b^{1/4}]$ et $[a, b]$, avec $dx = 4t^3 dt$. Il donne

$$\int_a^b x^n g(x) dx = 4 \int_{a^{1/4}}^{b^{1/4}} t^{4n+3} e^{-t} \sin t dt.$$

La même substitution sur les valeurs absolues donne une intégrale majorée par

$4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} dt = 4(4n+3)!$. Elle assure la convergence absolue avant passage aux bornes impropres. En faisant $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 4S_{4n+3} = 0.$$

La dérivée de t^4 étant nulle en 0, nous avons effectué la substitution avec $a > 0$, puis justifié le passage à la borne 0 ; aucune hypothèse d'inversibilité différentiable en 0 n'est requise.

16. Deux fonctions positives de mêmes moments

Posons, pour $x \geq 0$,

$$q(x) = e^{-x^{1/4}}, \quad g_1(x) = q(x), \quad g_2(x) = q(x) + \frac{1}{2}g(x) = e^{-x^{1/4}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin(x^{1/4})\right).$$

Ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $-1 \leq \sin(x^{1/4}) \leq 1$, on a $q(x)/2 \leq g_2(x) \leq 3q(x)/2$; les deux fonctions sont même strictement positives.

Elles sont distinctes : en $x = (\pi/2)^4$, on a $g(x) = e^{-\pi/2} > 0$, donc $g_2(x) \neq g_1(x)$.

Le changement de variable $x = t^4$, justifié comme en question 15, donne

$$\int_0^{+\infty} x^n q(x) dx = 4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} dt = 4(4n+3)!.$$

Les moments de g_1 et g_2 existent par cette formule et par domination. La linéarité des intégrales convergentes, avec la question 15, donne

$$\int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 4(4n+3)!.$$

Nous avons donc construit deux fonctions positives, continues et distinctes possédant tous les mêmes moments.

17. Conclusion pour le problème de Stieltjes

Il faut normaliser les fonctions précédentes pour obtenir des densités. Leur intégrale commune est $4 \cdot 3! = 24$. Définissons, pour $r \in \{1, 2\}$,

$$f_r(x) = \begin{cases} g_r(x)/24 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les fonctions f_r sont positives, d'intégrale 1, continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors de $\mathbb{R}_+$. Elles constituent donc des densités adaptées au problème de Stieltjes. Leurs moments valent

$$u_n = \frac{4(4n+3)!}{24} = \frac{(4n+3)!}{6} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

avec $u_0 = 1$.

Les lois correspondantes sont distinctes. En effet, $f_2 - f_1 = g/48$ est strictement positif sur un intervalle autour de $(\pi/2)^4$; les probabilités de cet intervalle diffèrent. L'exemple prouve que la suite de tous les moments ne détermine pas toujours une loi sur $\mathbb{R}_+$, même parmi les lois à densité continue sur ce demi-axe.

L'énoncé se place sur un espace commun où les variables considérées sont définies. La conclusion porte sur la non-unicité de la loi, et non simplement sur la possibilité de choisir deux variables différentes de même loi.

Partie III : le problème de Hausdorff

III.1) Une condition nécessaire d'existence

Dans cette sous-partie, f est une densité adaptée à $[0, 1]$; elle y est continue, positive ou nulle et d'intégrale 1.

18. Stricte positivité des moments

Comme f est continue et $\int_0^1 f = 1$, il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) > 0$. Sinon, f serait nulle sur $]0, 1[$ et son intégrale serait nulle. Par continuité, f est strictement positive sur un intervalle autour de x_0 , contenu dans $]0, 1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x^n f(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$ et cette fonction est strictement positive sur cet intervalle. Son intégrale est donc strictement positive :

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx > 0.$$

Pour $n = 0$, cette conclusion est également donnée par $u_0 = 1$.

19. Positivité des différences de moments

Fixons $i, j \in \mathbb{N}$. Par le binôme de Newton,

$$x^i(1-x)^j = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} x^{i+k}.$$

Les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[0, 1]$. La linéarité d'une somme finie donne donc

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} = \int_0^1 x^i(1-x)^j f(x) dx.$$

L'intégrande est positif ou nul sur $[0, 1]$. Sur l'intervalle de stricte positivité de f obtenu en question 18, on a $x > 0$ et $1-x > 0$; l'intégrande y est strictement positif, même si $i = 0$ ou $j = 0$. L'intégrale est strictement positive, ce qui établit (7).

20. Encadrement de u_3

Appliquons la question 19 avec $i = 1$ et $j = 2$:

$$u_1 - 2u_2 + u_3 > 0.$$

En remplaçant u_1 et u_2 , cela donne $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + u_3 > 0$, donc $u_3 > 1/6$.

Avec $i = 2$ et $j = 1$, on obtient $u_2 - u_3 > 0$, donc $u_3 < 1/3$. Ainsi,

$$u_3 \in \left] \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right[.$$

Les bornes sont strictes car elles proviennent d'intégrales strictement positives, et non seulement de l'inégalité $0 \leq X \leq 1$.

21. Convergence de la série

$$\sum u_n/n^\alpha$$

La densité f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $0 \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. Dès lors,

$$0 < u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \leq M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}.$$

Pour $n \geq 1$ et $\alpha > 0$,

$$0 < \frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{M}{n^\alpha(n+1)} \leq \frac{M}{n^{1+\alpha}}.$$

La série de Riemann d'exposant $1 + \alpha > 1$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} u_n / n^\alpha$$

converge.

Pour $\alpha = 0$, l'affirmation n'est plus vraie en général : avec la loi uniforme, $u_n = 1/(n+1)$ et

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

diverge.

Elle peut cependant être vraie pour certaines densités. Par exemple, $f(x) = 2(1-x)$ sur $[0, 1]$, nulle ailleurs, est une densité continue sur $[0, 1]$ et

$$u_n = 2 \int_0^1 x^n (1-x) dx = 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge par télescopage, sa somme étant 1. Le cas $\alpha = 0$ dépend donc de la densité choisie.

III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

22. Première colonne des différences

Pour $j = 0$, la somme définissant $\Delta_{n,j}$ ne contient que $k = 0$. Comme $\binom{0}{0} = 1$,

$$\Delta_{n,0} = (-1)^0 \binom{0}{0} u_n = u_n.$$

23. Relation de récurrence

Cette identité est purement algébrique : elle vaut pour toute suite (u_n) , sans supposer qu'elle est une suite de moments. Fixons $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq n$.

$$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n-j+k} - \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n-j+k+1}.$$

Dans la seconde somme, posons $r = k + 1$. Le signe de son opposé devient $-(-1)^{r-1} = (-1)^r$. On obtient

$$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = u_{n-j} + \sum_{r=1}^j (-1)^r \left(\binom{j}{r} + \binom{j}{r-1} \right) u_{n-j+r} + (-1)^{j+1} u_{n+1}.$$

La relation de Pascal donne $\binom{j}{r} + \binom{j}{r-1} = \binom{j+1}{r}$, tandis que les coefficients aux extrémités valent 1. Par conséquent,

$$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{r=0}^{j+1} (-1)^r \binom{j+1}{r} u_{n-j+r} = \Delta_{n+1,j+1}.$$

Si $j = 0$, la somme intermédiaire est vide et le calcul donne directement $u_n - u_{n+1} = \Delta_{n+1,1}$. La formule couvre donc tous les indices demandés.

24. Test de Hausdorff en Python

Le programme complété est :

Python

```
import numpy as np

def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1
    Delta = np.zeros((N + 1, N + 1))
    info = -1
    for k in range(0, N + 1):
        Delta[k, 0] = U[k]
        if ((Delta[k, 0] <= 0) and (info == -1)):
            info = k
        for j in range(1, k + 1):
            Delta[k, j] = Delta[k - 1, j - 1] - Delta[k, j - 1]
            if ((Delta[k, j] <= 0) and (info == -1)):
                info = k
    return (info, Delta)
```

La boucle extérieure parcourt $k = 0, \dots, N$, dans l'ordre croissant. La première colonne est initialisée avec $\Delta_{k,0} = u_k$.

Pour $k \geq 1$, la question 23, prise avec $n = k - 1$ et l'indice $j - 1$, donne

$$\Delta_{k,j} = \Delta_{k-1,j-1} - \Delta_{k,j-1} \quad (1 \leq j \leq k).$$

La ligne précédente est déjà remplie et le coefficient situé à gauche dans la ligne courante vient d'être calculé. Les dépendances sont donc respectées. Lorsque $k = 0$, $\text{range}(1, 1)$ est vide : aucun indice négatif n'est utilisé.

La condition (CH_k) exige la stricte positivité de tous les coefficients de la ligne utile. Un coefficient nul ou négatif entraîne donc un échec. La variable `info` n'est modifiée que si elle vaut encore -1 , ce qui conserve le premier ordre d'échec. Le calcul des lignes continue malgré cet échec pour renvoyer le tableau entier. Les coefficients avec $j > k$ restent nuls, conformément à la convention.

Le code a été exécuté et les coefficients obtenus ont été comparés aux sommes binomiales exactes pour les moments uniformes jusqu'à l'ordre 10. Il renvoie également `info = 0` pour `U = np.array([0.0])` et `info = -1` pour `U = np.array([1.0])`, ce qui vérifie le cas $N = 0$.

25. Résultats de test3

Le code complet exécuté, avec la fonction de la question 24 disponible, est :

Python

```
import numpy as np

def test3():
    N = 10
    U = np.zeros(N + 1)
    for k in range(0, N + 1):
        U[k] = 1.0 / (k + 1)
    V = test_hausdorff(U)
    U[3] = 0.16
    W = test_hausdorff(U)
    return V, W

V, W = test3()
```

Avant modification, $u_k = 1/(k + 1)$ est la suite des moments de la loi uniforme. Pour $0 \leq j \leq n \leq 10$, la question 19 donne

$$\Delta_{n,j} = \int_0^1 x^{n-j}(1-x)^j dx > 0.$$

Aucune ligne n'échoue : $V[0] = -1$.

Après modification, les termes u_0, u_1, u_2 restent $1, 1/2, 1/3$. Les lignes jusqu'à l'ordre 2 sont donc inchangées et strictement positives. À l'ordre 3,

$$\Delta_{3,0} = \frac{4}{25} > 0, \quad \Delta_{3,1} = \frac{1}{3} - \frac{4}{25} = \frac{13}{75} > 0,$$

$$\Delta_{3,2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{4}{25} = -\frac{1}{150} < 0.$$

Le premier échec intervient donc à l'ordre 3 : $w[0] = 3$.

L'exécution du programme donne bien $(-1, 3)$ pour le couple $(v[0], w[0])$. Ces valeurs sont justifiées exactement par les calculs précédents ; l'exécution sert de contrôle.

III.3) Unicité de solutions à densité de classe C^1

On pose $h = f_2 - f_1$, avec f_1, f_2 adaptées à $[0, 1]$ et de restrictions C^1 sur ce segment.

26. Majoration des accroissements de h

La fonction h est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Sa dérivée est continue sur ce segment, donc bornée. Posons $K = \max_{t \in [0, 1]} |h'(t)| \geq 0$.

Pour $x, y \in [0, 1]$ distincts, l'inégalité des accroissements finis donne $|h(x) - h(y)| \leq K|x - y|$. Si $x = y$, les deux membres sont nuls. Ainsi l'inégalité est établie pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$.

27. (a) Majoration par une espérance absolue

La variable Z_n prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1/n, \dots, 1\}$; les espérances utilisées existent. Pour chaque valeur possible z de Z_n , la question 26 donne $|h(x) - h(z)| \leq K|z - x|$.

Par linéarité, inégalité triangulaire sur une somme finie et croissance de l'espérance,

$$|h(x) - E(h(Z_n))| = |E(h(x) - h(Z_n))| \leq E(|h(x) - h(Z_n)|) \leq KE(|Z_n - x|).$$

Il n'est pas nécessaire de supposer une loi particulière pour Y_n dans cette question.

27. (b) Majoration par un moment d'ordre deux

Méthode 1 — Cauchy-Schwarz sur une somme pondérée

Notons $p_k = P(Y_n = k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Ces nombres sont positifs ou nuls et

$$\sum p_k = 1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$ appliquée aux coordonnées $\sqrt{p_k}$ et $\sqrt{p_k}|k/n - x|$ donne

$$\left(\sum_{k=0}^n p_k |k/n - x| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n p_k \right) \left(\sum_{k=0}^n p_k (k/n - x)^2 \right) = E((Z_n - x)^2).$$

En prenant les racines, $E(|Z_n - x|) \leq \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$. La question 27(a) donne la majoration demandée.

Méthode 2 — Positivité d'une variance

Posons $A = |Z_n - x|$. Cette variable est bornée, donc admet une variance. La formule de Huygens donne

$$0 \leq V(A) = E(A^2) - (E(A))^2.$$

Comme $E(A) \geq 0$ et $A^2 = (Z_n - x)^2$, on retrouve $E(|Z_n - x|) \leq \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$. En la reportant dans 27(a),

$$|h(x) - E(h(Z_n))| \leq K \sqrt{E((Z_n - x)^2)}.$$

La première méthode est une inégalité algébrique sur les probabilités ; la seconde utilise directement les outils de variance.

28. Approximation de h par $\hat{h}_n$

Fixons $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$. Choisissons une variable Y_n de loi binomiale de paramètres n et x . Pour $x = 0$ ou $x = 1$, on utilise la loi certaine correspondante ; les mêmes formules de moments restent valables.

Par transfert pour une variable finie,

$$E(h(Y_n/n)) = \sum_{k=0}^n h(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \hat{h}_n(x).$$

Aux extrémités $x = 0$ et $x = 1$, les expressions binomiales s'interprètent comme leurs valeurs polynomiales, et un seul terme demeure.

Avec $Z_n = Y_n/n$, les formules de la loi binomiale donnent

$$E(Z_n) = x, \quad V(Z_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

On a donc $E((Z_n - x)^2) = V(Z_n) = x(1-x)/n$. La question 27(b) donne

$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}.$$

Enfin, $x(1-x) = 1/4 - (x - 1/2)^2 \leq 1/4$, d'où $|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K/(2\sqrt{n})$. Cette dernière borne est indépendante de x .

29. Orthogonalité de $\hat{h}_n$ et h

Les deux densités ont les mêmes moments. Pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^r h(x) dx = \int_0^1 x^r f_2(x) dx - \int_0^1 x^r f_1(x) dx = u_r - u_r = 0.$$

La fonction $\hat{h}_n$ est un polynôme de degré au plus n : chaque terme $x^k(1-x)^{n-k}$ est un

tel polynôme. Écrivons

$$\hat{h}_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^r,$$

pour certains réels a_r .

Tous les produits considérés sont continus sur $[0, 1]$. Par linéarité d'une somme finie,

$$\int_0^1 \hat{h}_n(x) h(x) dx = \sum_{r=0}^n a_r \int_0^1 x^r h(x) dx = 0.$$

30. Majoration de l'intégrale de h^2

Par la question 29,

$$\int_0^1 h(x)^2 dx = \int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x)) h(x) dx.$$

L'intégrale de gauche est positive ou nulle. En prenant la valeur absolue à droite, puis en utilisant la borne uniforme de la question 28,

$$0 \leq \int_0^1 h(x)^2 dx \leq \int_0^1 |h(x) - \hat{h}_n(x)| |h(x)| dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx.$$

La continuité de h sur le segment assure que toutes ces intégrales sont finies.

31. Égalité des densités et unicité de la loi

La quantité $\int_0^1 |h(x)| dx$ est finie et ne dépend pas de n . En faisant tendre n vers l'infini dans l'encadrement de la question 30, on obtient

$$\int_0^1 h(x)^2 dx = 0.$$

La fonction h^2 est continue et positive ou nulle. Si $h(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in [0, 1]$, la continuité fournirait un intervalle de longueur strictement positive, éventuellement

unilatéral si x_0 est une extrémité, où h^2 est minorée par une constante strictement positive. Son intégrale serait alors strictement positive, contradiction.

Ainsi $h = 0$ sur $[0, 1]$, donc $f_1 = f_2$ sur ce segment. Les densités adaptées étant toutes deux nulles hors de $[0, 1]$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Le problème de Hausdorff admet donc au plus une loi solution parmi celles dont une densité adaptée est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Si X_1 et X_2 sont de telles solutions, elles ont la même loi. Cette conclusion ne signifie pas qu'elles sont égales comme variables aléatoires sur l'espace commun, et ne prouve pas l'existence d'une solution pour une suite arbitraire (u_n) .

III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour toute valeur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}$ est continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Ainsi $R_0(\alpha) > 0$, et tous les quotients F_k ainsi que G sont bien définis.

32. Majoration du reste de l'exponentielle

Méthode 1 — Convexité et inégalité de Taylor-Lagrange

L'exponentielle est convexe, donc située au-dessus de sa tangente en 0 : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .

Elle est de classe C^2 sur $[-1, 1]$ et sa dérivée seconde y est majorée par e . L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, autour de 0, donne

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{e}{2}x^2 \quad (x \in [-1, 1]).$$

En combinant les deux inégalités, $0 \leq e^x - 1 - x \leq (e/2)x^2$. On peut prendre $C = e/2 > 0$.

Méthode 2 — Reste intégral de Taylor

La formule de Taylor avec reste intégral donne $e^x - 1 - x = \int_0^x (x-t)e^t dt$. Pour $x \neq 0$, le changement de variable affine $t = sx$ conduit à

$$e^x - 1 - x = x^2 \int_0^1 (1-s)e^{sx} ds.$$

La formule est également vraie pour $x = 0$. Pour $|x| \leq 1$ et $0 \leq s \leq 1$, on a $0 < e^{sx} \leq e$. Ainsi

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq ex^2 \int_0^1 (1-s) ds = \frac{e}{2}x^2.$$

Cette deuxième méthode obtient simultanément le signe et la majoration du reste, y compris lorsque $x < 0$.

33. (a) Dérivée partielle de R_k

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour $s \neq 0$ avec $|s| \leq 1$, écrivons exactement

$$R_k(\alpha_1 + s, \alpha_2) - R_k(\alpha_1, \alpha_2) - sR_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^k e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} (e^{st} - 1 - st) dt.$$

Pour $t \in [0, 1]$, $|st| \leq 1$. La question 32 donne $0 \leq e^{st} - 1 - st \leq Cs^2t^2$. L'intégration de ces inégalités donne

$$0 \leq R_k(\alpha_1 + s, \alpha_2) - R_k(\alpha_1, \alpha_2) - sR_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) \leq Cs^2R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Le nombre $R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2)$ est fini, puisque l'intégrande est continu sur un segment. En divisant en valeur absolue par $|s|$,

$$\left| \frac{R_k(\alpha_1 + s, \alpha_2) - R_k(\alpha_1, \alpha_2)}{s} - R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) \right| \leq C|s|R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0.$$

La dérivée partielle existe donc et $\partial_1 R_k = R_{k+1}$. Nous avons contrôlé directement le quotient de différences ; aucun échange entre dérivation et intégration n'a été invoqué.

L'énoncé admet ensuite $\partial_2 R_k = R_{k+2}$. Cette identité sera utilisée comme donnée dans les questions suivantes.

33. (b) Dérivées des quotients F_k

Pour $i \in \{1, 2\}$, les identités précédentes donnent $\partial_i R_k = R_{k+i}$ et $\partial_i R_0 = R_i$. Comme $R_0 > 0$, la règle de dérivation d'un quotient donne

$$\partial_i F_k = \frac{R_{k+i} R_0 - R_k R_i}{R_0^2} = \frac{R_{k+i}}{R_0} - \frac{R_k}{R_0} \frac{R_i}{R_0} = F_{k+i} - F_k F_i.$$

Tous les R_r sont continus par l'hypothèse admise ; leurs dérivées partielles sont donc continues. Ils sont de classe C^1 . De même, les F_k sont de classe C^1 , et leurs dérivées partielles données ci-dessus sont continues. Ces observations permettront de justifier la régularité de G .

33. (c) Expression intégrale des dérivées de F_k

Fixons α et, uniquement pour alléger les expressions, notons $R_r = R_r(\alpha)$ et $F_r = F_r(\alpha)$. En développant le produit sous l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{R_0} \int_0^1 (t^i - F_i)(t^k - F_k) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt = \frac{R_{i+k} - F_k R_i - F_i R_k + F_i F_k R_0}{R_0}.$$

Comme $R_i = F_i R_0$ et $R_k = F_k R_0$, le membre de droite vaut

$$F_{i+k} - F_k F_i - F_i F_k + F_i F_k = F_{i+k} - F_i F_k.$$

D'après 33(b), il s'agit de $\partial_i F_k(\alpha)$. Cela établit exactement l'identité demandée. Les intégrales sont toutes finies, leurs intégrandes étant continues sur $[0, 1]$.

34. (a) Calcul de la hessienne de G

La dérivation de $G = \ln R_0 - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2$, avec $R_0 > 0$, donne

$$\partial_1 G = F_1 - u_1, \quad \partial_2 G = F_2 - u_2.$$

Ces fonctions sont de classe C^1 d'après 33(b). Ainsi G est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Sa hessienne est

$$\nabla^2 G = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 - F_1^2 & F_3 - F_1 F_2 \\ F_3 - F_1 F_2 & F_4 - F_2^2 \end{pmatrix}.$$

Les deux coefficients hors diagonale sont égaux, conformément à la symétrie de la hessienne d'une fonction de classe C^2 .

34. (b) Stricte positivité de la forme quadratique

Fixons α et $v = (v_1, v_2)^t \neq 0$. La question 33(c), appliquée aux quatre coefficients de la hessienne, donne

$${}^t v \nabla^2 G(\alpha) v = \frac{1}{R_0(\alpha)} \int_0^1 [v_1(t - F_1(\alpha)) + v_2(t^2 - F_2(\alpha))]^2 e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt.$$

Le facteur $R_0(\alpha)$ est strictement positif. Le polynôme

$$Q(t) = v_2 t^2 + v_1 t - v_1 F_1(\alpha) - v_2 F_2(\alpha)$$

ne peut être identiquement nul : cela imposerait, en identifiant ses coefficients de t^2 et de t , $v_2 = 0$ puis $v_1 = 0$, contrairement à $v \neq 0$.

Un polynôme non nul ne s'annule pas sur tout l'intervalle $]0, 1[$. Il existe donc $t_0 \in]0, 1[$ avec $Q(t_0) \neq 0$. Par continuité, Q^2 est strictement positif sur un intervalle autour de t_0 .

L'exponentielle est strictement positive partout. L'intégrande est donc positif ou nul sur $[0, 1]$ et strictement positif sur un sous-intervalle, ce qui prouve

$${}^t v \nabla^2 G(\alpha) v > 0.$$

34. (c) Signe des valeurs propres

La hessienne est une matrice symétrique réelle ; elle est diagonalisable dans une base orthonormale par le théorème spectral. Soient λ l'une de ses valeurs propres et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. La question 34(b) donne

$$0 < {}^t v \nabla^2 G(\alpha) v = \lambda \|v\|^2.$$

Comme $\|v\|^2 > 0$, on conclut $\lambda > 0$. Toutes les valeurs propres sont strictement positives, sans calcul de déterminant ni de polynôme caractéristique.

34. (d) Minimum de G

Méthode 1 — Point critique et hessienne

Notons $\alpha^* = (\alpha_1, \alpha_2)$ le point figurant dans la densité donnée. Comme X est une solution du problème des moments, ses deux premiers moments sont u_1 et u_2 . Le transfert appliqué à cette densité donne

$$u_1 = \int_0^1 t \frac{e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}}{R_0(\alpha^*)} dt = F_1(\alpha^*), \quad u_2 = F_2(\alpha^*).$$

La formule du gradient obtenue en 34(a) implique $\nabla G(\alpha^*) = 0$: le point est critique. La fonction est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et la hessienne en ce point possède uniquement des valeurs propres strictement positives, d'après 34(c). Le critère hessien autorisé donne donc un minimum local strict en α^* .

Méthode 2 — Restriction aux droites et minimum global

Le même calcul des moments établit d'abord $\nabla G(\alpha^*) = 0$. Soit $\beta \in \mathbb{R}^2$ distinct de α^* et posons $d = \beta - \alpha^* \neq 0$, puis $\varphi(s) = G(\alpha^* + sd)$ pour $s \in \mathbb{R}$. La fonction φ est de classe C^2 et la dérivation le long d'une droite donne

$$\varphi'(0) = \nabla G(\alpha^*) \cdot d = 0, \quad \varphi''(s) = {}^t d \nabla^2 G(\alpha^* + sd) d > 0.$$

Ainsi φ' est strictement croissante, donc $\varphi'(s) > 0$ pour $s > 0$. Par intégration sur $[0, 1]$,

$$G(\beta) - G(\alpha^*) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s) ds > 0.$$

Le point α^* est donc l'unique minimum global de G , ce qui implique en particulier le minimum local demandé. Cette preuve utilise la positivité de la hessienne en tous les points, tandis que le critère local de la première méthode utilise seulement la hessienne au point critique.

Relevé des adaptations

- Question 8 : l'intervalle d'indices de (CS_N) commence à 1 plutôt qu'à 0, car H_0 n'est pas définie. Le programme d'origine commençait déjà à 1 ; son comportement est conservé. Les explications des commandes `len` et `//` sont explicitées dans l'énoncé pour rendre le code autonome.

Les questions 4, 5 et 8 emploient « positives ou nulles » pour expliciter le sens non strict du terme « positives » utilisé dans le PDF. Aucun résultat supplémentaire n'est admis ; les deux admissions originales, $T_0 = S_0$ et $\partial_2 R_k = R_{k+2}$, ainsi que la continuité des R_k , sont conservées. Le code source étant déjà en Python, aucune conversion de langage n'est nécessaire.