



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2018

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations et objectifs

Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note :

$$A(r) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq 0} n^k |a_n| r^n \text{ converge}\}$$

et

$$B(r) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_n r^n \rightarrow 0\}.$$

Pour $k = 0$, le facteur n^k vaut 1, y compris pour $n = 0$.

À toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$. Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a . Dans la troisième, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $(f_a^{(n)}(1))_{n \in \mathbb{N}}$. Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I — Premières propriétés et premiers exemples

1. Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$. Montrer que, pour tout nombre réel x de $[-r, r]$ et pour tout entier naturel k , la série

$$\sum_{n \geq 0} n^k |a_n| |x|^n$$

converge. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a $A(r') \subset A(r)$.

2. Vérifier également : $0 < r \leq r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif r , $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
4. Exemples.
 - 4.a. On souhaite montrer que, pour tout r réel strictement positif, la suite $\alpha = (1/n!)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose, pour tout entier naturel k , $u_n(k) = n^{k+2}r^n/n!$. En considérant le quotient $u_{n+1}(k)/u_n(k)$ pour $n \geq 1$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure alors : $\alpha \in A(r)$.
 - 4.b. Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Déterminer ensuite les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.
5. Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout réel r de $]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $A(r)$.

On pourra penser à écrire : $n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k (r/\rho)^n$.

Partie II — Régularité de la fonction f_a

Dans cette partie, R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

6. Vérifier que

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $] - R, R[$. On utilisera la question 5.

7. Continuité de f_a .

7.a. Soit r un réel de $]0, R[$, x dans $[-r, r]$ et h un réel tel que $x + h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $|(x + h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|$. Pour $n = 0$, la différence est nulle.

7.b. Justifier alors soigneusement que

$$|f_a(x + h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n \right) |h|.$$

7.c. Montrer alors que f_a est continue sur $[-r, r]$, puis sur $] - R, R[$.

8. Caractère C^1 de f_a .

On considère ici un réel r de $]0, R[$ et x dans $[-r, r]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

et, sous réserve d'existence,

$$g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

8.a. Soit $\rho \in [r, R[$. Justifier que la suite $(n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$; en déduire que g_a est définie et continue sur $] - R, R[$.

8.b. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S'_n(t) dt$.

8.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

8.d. En déduire que $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$.

8.e. Montrer alors que f_a est de classe C^1 sur $] -R, R[$ et que $f'_a = g_a$.

9. Caractère C^∞ de f_a .

9.a. Soit $r \in]0, R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$$

converge.

9.b. Montrer que f_a est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et que, pour tout $x \in] -R, R[$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

9.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

10. Exemples.

10.a. On pose $\alpha = (1/n!)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n / n!.$$

Donner une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.

10.b. Soit λ un réel strictement positif, $\beta = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n.$$

Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout $x \in]-1/\lambda, 1/\lambda[$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1/\lambda, 1/\lambda[$, la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$$

converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1 - \lambda x)^{k+1}}.$$

Partie III — Une formule de réciprocité

Dans cette partie, R désigne un réel strictement supérieur à 1 et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = f_a^{(n)}(1)/n!$. On fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que la suite $(b_n \rho^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

11. Expression de a_0 .

11.a. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt.$$

11.b. Démontrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = 0$.

11.c. En déduire que la série

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p$$

converge et que

$$a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p.$$

12. Généralisation. On considère ici un entier naturel s fixé.

12.a. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt.$$

12.b. Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

12.c. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt$.

12.d. Montrer alors que la série

$$\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$$

converge et que

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

13. Cas particulier. On suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que $n \geq d + 1 \Rightarrow a_n = 0$.

13.a. Que peut-on dire de la fonction f_a ?

13.b. Montrer que la condition (H) est réalisée.

13.c. En déduire que, pour tout $s \in \{0, \dots, d\}$,

$$a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

Partie IV — Applications aux variables aléatoires discrètes

Dans cette partie, les variables aléatoires sont discrètes, définies sur un espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X , on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = P(X = n), \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f_a(x).$$

14. Premiers résultats.

14.a. Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

14.b. En déduire qu'il existe un réel $R \geq 1$ tel que G_X soit définie et de classe C^∞ sur $] - R, R[$.

15. Premier exemple.

15.a. On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer la fonction G_X , vérifier qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $s \in \mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

15.b. On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $f_a^{(s)}(1) = 1$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de X ?

16. Deuxième exemple. On considère ici un réel $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

16.a. On suppose que $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p . Déterminer la suite $a = (a_n)$ puis la fonction G_X ; vérifier que G_X est de classe C^∞ sur $] -1/q, 1/q[$. Enfin, pour tout $s \in \mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

16.b. On suppose maintenant que $p > 1/2$. Vérifier que $q/p < 1$.

On considère X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose de plus que $G_X = f_a$ est définie et de classe C^∞ sur $] -1/q, 1/q[$ et que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $f_a^{(s)}(1)/s! = (q/p)^s$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $X + 1$?

17. Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

On suppose dans cette question que X prend ses valeurs dans $\{0, \dots, d\}$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d . Pour $s \in \{0, \dots, d\}$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$; on rappelle que $(e_s)_{s=0}^d$ est une base de Pol_d .

On définit les fonctions de Pol_d : $H_0 : x \mapsto 1$ et, pour $s \in \{1, \dots, d\}$,

$$H_s : x \mapsto \frac{x(x-1) \cdots (x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (x-k).$$

17.a. Montrer que la famille $(H_s)_{s=0}^d$ est une base de Pol_d .

On note Δ défini sur Pol_d par : $\forall P \in Pol_d, \quad \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$.

17.b. Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d .

17.c. Montrer que $\Delta(H_0) = 0$ et que, pour tout $s \in \{1, \dots, d\}$, $\Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.

17.d. Montrer que, pour tout $P \in Pol_d$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(P))(0)] H_s(x).$$

17.e. En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^k = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] H_s(n).$$

17.f. Montrer alors que, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, l'espérance de X^k est

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] b_s, \quad b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

17.g. Exemple : on suppose ici que $d = 2$, $E(X) = 1$ et $E(X^2) = 3/2$. Déterminer b_0 , b_1 et b_2 , puis a_0 , a_1 et a_2 . Reconnaître la loi de X .