



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Premières propriétés et premiers exemples

On adopte la convention $n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, notamment dans les séries définissant $A(r)$.

1. Pour $|x| \leq r$, on a $0 \leq n^k |a_n| |x|^n \leq n^k |a_n| r^n$. La série majorante converge puisque $a \in A(r)$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs donne donc la convergence demandée pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Si $0 < r \leq r'$ et $a \in A(r')$, on applique cette comparaison avec $x = r$ et avec le rayon r' : toutes les séries

$$\sum n^k |a_n| r^n$$

convergent. Ainsi $A(r') \subset A(r)$.

2. Si $a \in B(r')$ et $0 < r \leq r'$, alors

$$|a_n r^n| = |a_n (r')^n| (r/r')^n \leq |a_n (r')^n| \rightarrow 0.$$

Donc $a \in B(r)$. Si $a \in A(r)$, la série

$$\sum |a_n| r^n$$

converge, en prenant $k = 0$. Son terme général tend vers 0, donc $a_n r^n \rightarrow 0 : A(r) \subset B(r)$.

3. La suite nulle appartient à $A(r)$. Soient $a, c \in A(r)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq n^k |\lambda a_n + \mu c_n| r^n \leq |\lambda| n^k |a_n| r^n + |\mu| n^k |c_n| r^n.$$

La série de droite converge par linéarité des séries convergentes. Par comparaison, $\lambda a + \mu c \in A(r)$. L'ensemble $A(r)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- 4.a. Pour $n \geq 1$, $u_n(k) > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} = \frac{r}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+2} \rightarrow 0.$$

On utilise cette limite pour établir une majoration géométrique, sans invoquer un critère général de convergence. Il existe $N \geq 1$ tel que $u_{n+1}(k) \leq u_n(k)/2$ pour tout $n \geq N$. Par récurrence, $0 \leq u_{N+j}(k) \leq u_N(k)2^{-j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_n(k) \rightarrow 0$ et cette suite est bornée : il existe M_k tel que $u_n(k) \leq M_k$.

Pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{n^k r^n}{n!} = \frac{u_n(k)}{n^2} \leq \frac{M_k}{n^2}.$$

La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge. Le terme d'indice 0 est fini et ne change pas la convergence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum n^k r^n / n!$$

converge, donc $\alpha \in A(r)$ pour tout $r > 0$.

4.b. On a $\beta_n(\lambda)r^n = (\lambda r)^n$. Cette suite tend vers 0 exactement lorsque $0 < \lambda r < 1$. Si $\lambda r = 1$, elle est constamment égale à 1 ; si $\lambda r > 1$, elle tend vers $+\infty$. Donc

$$\beta(\lambda) \in B(r) \iff 0 < r < 1/\lambda.$$

L'inclusion $A(r) \subset B(r)$ montre que la même condition est nécessaire pour $A(r)$.

Montrons qu'elle suffit. Posons $t = \lambda r \in]0, 1[$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les croissances comparées donnent $n^{k+2}t^n \rightarrow 0$; cette suite est donc bornée par une constante M . Pour $n \geq 1$, $n^k t^n \leq M/n^2$. La comparaison avec une série de Riemann prouve la convergence de

$$\sum n^k t^n.$$

Ainsi

$$\beta(\lambda) \in A(r) \iff 0 < r < 1/\lambda.$$

5. Puisque $a_n \rho^n \rightarrow 0$, la suite $(|a_n| \rho^n)$ est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n| \rho^n \leq M$ pour tout n . Pour $0 < r < \rho$, posons $t = r/\rho \in]0, 1[$. Alors

$$0 \leq n^k |a_n| r^n \leq M n^k t^n.$$

La convergence de

$$\sum n^k t^n$$

a été démontrée en 4.b par comparaison avec $1/n^2$. Par comparaison, $a \in A(r)$ pour tout $r \in]0, \rho[$.

Partie II — Régularité de la fonction f_a

6. Fixons $x \in]-R, R[$ et choisissons r tel que $|x| < r < R$. D'après 5, $a \in A(r)$. La question 1, avec $k = 0$, donne la convergence de

$$\sum |a_n| |x|^n.$$

La série définissant $f_a(x)$ est donc absolument convergente. Cela vaut pour tout $x \in]-R, R[$.

7.a. Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis.

Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $|nt^{n-1}| \leq nr^{n-1}$ sur $[-r, r]$. Les deux points x et $x + h$ appartiennent à ce segment. L'inégalité des accroissements finis donne

$$|(x + h)^n - x^n| \leq nr^{n-1} |h|.$$

Pour $n = 0$, les deux valeurs sont égales à 1, donc la différence est nulle.

Méthode 2 — Factorisation de la différence de puissances.

Pour $n \geq 1$, l'identité polynomiale

$$u^n - v^n = (u - v) \sum_{j=0}^{n-1} u^{n-1-j} v^j$$

appliquée à $u = x + h$ et $v = x$ donne, puisque $|u|, |v| \leq r$,

$$|u^n - v^n| \leq |h| \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-1} = nr^{n-1} |h|.$$

Les deux approches aboutissent à la même majoration ; la seconde ne demande que des identités algébriques.

7.b. Pour une somme finie, l'inégalité triangulaire et 7.a donnent

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n ((x+h)^n - x^n) \right| \leq \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^N n |a_n| r^n.$$

Les deux séries de gauche convergent absolument par 6. La série de droite converge car $a \in A(r)$, d'après 5. On passe donc à la limite dans cette inégalité entre sommes finies pour obtenir

$$|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq C_r |h|, \quad C_r = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n < +\infty.$$

Aucun échange de limite et de somme infinie n'est utilisé.

7.c. L'inégalité de 7.b prouve que la restriction de f_a à $[-r, r]$ est lipschitzienne, donc continue, y compris aux extrémités relativement à ce segment. Pour chaque

$x_0 \in]-R, R[$, on choisit r tel que $|x_0| < r < R$: le point x_0 est intérieur à ce segment et f_a est continue en x_0 . Ainsi f_a est continue sur $] -R, R[$.

8.a. Fixons $\rho \in [r, R[$. La suite $(|a_n|R^n)$ est bornée par M . Les croissances comparées donnent

$$|na_n\rho^n| \leq Mn(\rho/R)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi $(na_n) \in B(\rho)$. Pour traiter g_a , il faut également tenir compte du décalage d'indice ; une division par x ne conviendrait pas en 0.

Posons $c_m = (m+1)a_{m+1}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in]0, R[$,

$$|c_m|u^m = \frac{1}{u}|(m+1)a_{m+1}u^{m+1}| \rightarrow 0.$$

Cette limite résulte du même argument que celui appliqué à ρ . Donc $c \in B(u)$. Les questions 6 et 7 appliquées à c montrent que f_c est définie et continue sur $] -u, u[$. Or sa série est exactement celle de g_a , par le changement d'indice $n = m+1$. Comme $u < R$ est arbitraire, g_a est définie et continue sur $] -R, R[$.

8.b. Le polynôme S_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $S_n(0) = a_0$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne $S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S'_n(t) dt$, soit l'identité demandée.

8.c. Puisque $a \in A(r)$, la série

$$\sum k|a_k|r^k$$

converge. Pour $|t| \leq r$, les séries dérivées convergent absolument et

$$|g_a(t) - S'_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k||t|^{k-1} \leq \frac{1}{r} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k.$$

Cette majoration peut d'abord être écrite pour une somme finie, puis obtenue par passage à la limite. L'intégrande est continu par 8.a. Pour x de signe quelconque,

l'inégalité de majoration des intégrales donne

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \frac{|x|}{r} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

On n'a pas intégré une série terme à terme.

8.d. Le membre de droite de 8.c est un reste de série convergente et tend vers 0. Ainsi

$\int_0^x S'_n(t) dt \rightarrow \int_0^x g_a(t) dt$. Par définition, $S_n(x) \rightarrow f_a(x)$. En passant à la limite dans l'identité de 8.b, on obtient

$$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt.$$

Pour tout $x \in]-R, R[$, on peut choisir $r \in]|x|, R[$, donc cette égalité est valable sur tout l'intervalle.

8.e. La fonction g_a est continue sur $] -R, R[$. Le théorème fondamental du calcul intégral, appliqué à l'expression de 8.d, prouve que f_a est de classe C^1 et que

$$f'_a(x) = g_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

La dérivation de cette somme a donc été démontrée dans ce cas particulier.

9.a. Supposons d'abord $a \in A(r)$. Pour $k = 0$, la convergence est celle de

$$\sum |a_n| r^n.$$

Pour $k \geq 1$ et $n \geq k$,

$$0 \leq \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k} \leq \frac{1}{k! r^k} n^k |a_n| r^n.$$

La comparaison établit toutes les convergences demandées.

Réciproquement, supposons ces séries convergentes pour tout k . Le cas $k = 0$ fournit le poids constant. Pour un entier $j \geq 1$ et $n \geq 2j$, chacun des facteurs $n, n-1, \dots, n-j+1$ est au moins $n/2$. Ainsi

$$\binom{n}{j} \geq \frac{n^j}{2^j j!}, \quad n^j |a_n| r^n \leq 2^j j! r^j \binom{n}{j} |a_n| r^{n-j}.$$

La série majorante converge par hypothèse. Les termes d'indice $n < 2j$ sont en nombre fini. On conclut que

$$\sum n^j |a_n| r^n$$

converge pour chaque j , c'est-à-dire $a \in A(r)$.

9.b. Nous itérons le résultat de 8 en vérifiant à chaque étape les hypothèses sur les coefficients. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons

$$c_m^{[k]} = \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de a_m . Pour tout $u \in]0, R[$ et $k \geq 1$ fixé, la borne $|a_n| R^n \leq M$ donne

$$|c_m^{[k]}| u^m \leq M R^{-k} (m+k)^k (u/R)^m.$$

Par croissances comparées, ces expressions tendent vers 0. Pour $k = 0$, il suffit d'utiliser $M(u/R)^m$. Donc $c^{[k]} \in B(u)$ pour tout $u < R$.

La question 8, appliquée sur chaque $] -u, u[$, montre que la somme associée à $c^{[k]}$ est de classe C^1 et que sa dérivée a pour coefficients

$$(m+1)c_{m+1}^{[k]} = \frac{(m+k+1)!}{m!} a_{m+k+1} = c_m^{[k+1]}.$$

Par récurrence, f_a possède des dérivées continues de tout ordre sur $] -R, R[$ et

$$f_a^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} x^m = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Ces séries convergent absolument, par la question 6 appliquée aux suites $c^{[k]}$. Cela justifie aussi la formule en $x = 0$.

9.c. Dans la formule précédente en $x = 0$, le terme constant est $n!a_n$ et tous les termes de degré strictement positif sont nuls. Donc

$$a_n = \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.a. Méthode 1 — Série exponentielle du programme.

La série exponentielle donne $f_\alpha(x) = e^x$ pour tout réel x . Cette identification est valable sur $\mathbb{R}$; la convergence absolue a aussi été établie en 4.a. Toutes les dérivées de l'exponentielle sont égales à l'exponentielle, donc $f_\alpha^{(k)}(1) = e$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Identité différentielle établie dans la partie II.

La question 4.a assure les hypothèses pour tous les rayons. Par 8,

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_\alpha(x).$$

La fonction $x \mapsto e^{-x} f_\alpha(x)$ a donc une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ et est constante par le théorème des accroissements finis. Sa valeur en 0 est 1, donc $f_\alpha(x) = e^x$. On retrouve $f_\alpha^{(k)}(1) = e$. Cette approche illustre l'utilisation de la formule de dérivation déjà prouvée.

10.b. Pour $|\lambda x| < 1$, la somme géométrique donne

$$f_\beta(x) = \frac{1}{1 - \lambda x}.$$

Pour appliquer 9.b à un point x , choisissons u avec $|x| < u < 1/\lambda$. D'après 4.b, $\beta \in B(u)$, donc

$$f_\beta^{(k)}(x) = k! \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}.$$

D'autre part, une récurrence sur k , en dérivant la fonction rationnelle, donne

$f_{\beta}^{(k)}(x) = k!\lambda^k/(1-\lambda x)^{k+1}$. Comme $k!\lambda^k > 0$, on peut diviser pour obtenir

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}.$$

La convergence absolue résulte de 9.b et de sa preuve, et non d'une dérivation formelle de séries.

Partie III — Une formule de réciprocity

Les coefficients sont désormais positifs ou nuls, $R > 1$ et (H) fournit $\rho > 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, la formule de 9.b, à coefficients non négatifs, donne

$$0 \leq f_a^{(j)}(t) \leq f_a^{(j)}(1).$$

Ces inégalités découlent d'abord de celles entre sommes finies, puis du passage à la limite ; elles seront utilisées pour majorer les restes.

11.a. Méthode 1 — Taylor avec reste intégral.

La fonction f_a est de classe C^∞ sur l'ouvert $] - R, R[$ contenant $[0, 1]$. La formule de Taylor entre 1 et 0 donne

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^N \frac{f_a^{(p)}(1)}{p!} (-1)^p + \int_1^0 \frac{(0-t)^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt.$$

Le changement d'orientation de l'intégrale et $(0-t)^N = (-1)^N t^N$ donnent exactement

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt.$$

Méthode 2 — Intégrations par parties et récurrence.

Posons $I_N = \int_0^1 t^N f_a^{(N+1)}(t)/N! dt$. Pour $N = 0$, le théorème fondamental donne $I_0 = f_a(1) - f_a(0) = b_0 - f_a(0)$.

Pour $N \geq 1$, l'intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ donne

$$I_N = \left[\frac{t^N}{N!} f_a^{(N)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} f_a^{(N)}(t) dt = b_N - I_{N-1}.$$

Si l'identité demandée est vraie à l'ordre $N - 1$, le remplacement de I_{N-1} par $b_N - I_N$ y ajoute le terme $(-1)^N b_N$ et transforme le reste en $(-1)^{N+1} I_N$. Elle est donc vraie par récurrence. Cette seconde méthode construit explicitement le reste de Taylor.

11.b. Par la positivité rappelée au début de la partie,

$$0 \leq I_N \leq \frac{f_a^{(N+1)}(1)}{N!} \int_0^1 t^N dt = \frac{f_a^{(N+1)}(1)}{(N+1)!} = b_{N+1}.$$

L'hypothèse (H) entraîne $b_n \rightarrow 0$, car $b_n = (b_n \rho^n) \rho^{-n}$. Par encadrement, $I_N \rightarrow 0$.

11.c. Dans 11.a, le reste tend vers 0 et $f_a(0) = a_0$ par 9.c. Les sommes partielles

$$\sum_{p=0}^N (-1)^p b_p$$

tendent donc vers a_0 , d'où

$$a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p.$$

La série est même absolument convergente : $(b_p \rho^p)$ est bornée par M et $0 \leq b_p \leq M \rho^{-p}$, terme d'une série géométrique convergente. Cet argument ne repose sur aucun critère de série alternée.

12.a. La fonction $f_a^{(s)}$ est de classe C^∞ sur un ouvert contenant $[0, 1]$. On lui applique la même formule de Taylor entre 1 et 0, à l'ordre N . Ses dérivées d'ordre p sont $f_a^{(p+s)}$. En tenant compte de l'orientation du reste comme en 11.a, on obtient

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt.$$

12.b. Posons $J_{N,s} = \int_0^1 t^N f_a^{(N+s+1)}(t) / N! dt$. La même majoration donne

$$0 \leq J_{N,s} \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+1)!}.$$

En multipliant et divisant par $(N+s+1)!$ et par ρ^{N+s+1} , quantités strictement positives, ce dernier majorant devient

$$\frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

Il s'agit exactement du majorant demandé, et l'intégrale est positive ou nulle, donc son module est égal à elle-même.

12.c. Le premier facteur $b_{N+s+1} \rho^{N+s+1}$ tend vers 0 par (H) et est borné. Pour $s \geq 1$,

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} = \prod_{j=2}^{s+1} (N+j) \leq (N+s+1)^s.$$

Pour $s = 0$, ce quotient vaut 1. Dans tous les cas, les croissances comparées donnent

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \rho^{-(N+s+1)} \rightarrow 0.$$

Le majorant de 12.b tend donc vers 0. Par encadrement, $J_{N,s} \rightarrow 0$.

12.d. En divisant 12.a par $s!$ et en utilisant 9.c, on obtient

$$a_s = \sum_{p=0}^N (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s} + \frac{(-1)^{N+1}}{s!} J_{N,s}.$$

Le reste tend vers 0 par 12.c. La série converge donc et le changement d'indice $n = p + s$ donne

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

On peut aussi vérifier sa convergence absolue : par (H), $b_n \leq M\rho^{-n}$, tandis que $\binom{n}{s} \leq n^s/s!$ pour $s \geq 1$. La série

$$\sum n^s \rho^{-n}$$

converge par la comparaison déjà établie en 4.b. Pour $s = 0$, une série géométrique suffit.

13.a. Les coefficients sont nuls à partir de l'indice $d + 1$. Ainsi

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$$

est une fonction polynomiale de degré au plus d , définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La suite a appartient à $B(R)$ pour tout $R > 0$, puisque $a_n R^n$ est finalement nulle.

13.b. Pour $n > d$, $f_a^{(n)}$ est identiquement nulle et $b_n = 0$. Pour tout $\rho > 1$, $b_n \rho^n$ est finalement nul, donc tend vers 0. La condition (H) est réalisée.

13.c. Méthode 1 — Formule de réciprocity.

Les hypothèses de la partie III sont satisfaites avec n'importe quel $R > 1$. Par 12.d et

puisque $b_n = 0$ pour $n > d$,

$$a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n, \quad 0 \leq s \leq d.$$

Méthode 2 — Développement polynomial au point 1.

La formule de Taylor pour les polynômes donne exactement

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^d b_n (x-1)^n.$$

Le binôme donne

$$(x-1)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^{n-s} x^s.$$

Les sommes étant finies, on peut les regrouper selon les puissances de x : le coefficient de x^s est

$$\sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

L'unicité des coefficients d'un polynôme donne le résultat. Cette méthode explique la formule comme un changement de centre dans un développement polynomial.

Partie IV — Applications aux variables aléatoires discrètes

14.a. Les événements $(X = n), n \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements, donc $a_n \geq 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

Une série convergente a un terme général tendant vers 0, donc $a_n 1^n \rightarrow 0$. Ainsi $a \in B(1)$.

14.b. La question 9.b appliquée avec $R = 1$ donne une fonction G_X définie et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. Il suffit donc de prendre $R = 1$. L'énoncé n'affirme pas qu'on peut toujours choisir $R > 1$ ni que les dérivées existent toujours en 1.

15.a. Pour $X \sim \mathcal{P}(1)$, $a_n = e^{-1}/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par 10.a,

$$G_X(x) = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées sont égales à e^{x-1} . En particulier, $G_X^{(s)}(1) = 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

15.b. Pour appliquer la partie III, vérifions aussi l'hypothèse sur a , et pas seulement (H) . La série définissant $G_X(2)$ converge par l'hypothèse de définition sur $\mathbb{R}$; son terme général $a_n 2^n$ tend vers 0. Donc $a \in B(2)$, avec $2 > 1$, et $a_n \geq 0$ puisque ce sont des probabilités.

Par hypothèse, $b_n = 1/n!$. La question 4.a et l'inclusion $A(\rho) \subset B(\rho)$ donnent $\rho^n/n! \rightarrow 0$ pour tout $\rho > 1$. Ainsi (H) est réalisée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule de réciprocité donne

$$a_n = \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{e^{-1}}{n!}.$$

La série est absolument convergente d'après 12.d, et la dernière somme vaut e^{-1} par la série exponentielle. On reconnaît $X \sim \mathcal{P}(1)$.

16.a. La convention du programme pour la loi géométrique est $P(Y = m) = p(1 - p)^{m-1}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. Avec $Y = X + 1$ et $q = 1 - p \in]0, 1[$,

$$a_n = P(X = n) = P(Y = n + 1) = pq^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La somme géométrique donne $G_X(x) = p/(1 - qx)$ pour $|x| < 1/q$. Le dénominateur y est strictement positif, donc cette fonction rationnelle est de classe C^∞ sur cet intervalle. Par récurrence sur s ,

$$G_X^{(s)}(x) = \frac{p s! q^s}{(1 - qx)^{s+1}}.$$

Comme $1 - q = p$ et $1 < 1/q$, toutes ces dérivées sont définies en 1 et

$$G_X^{(s)}(1) = s! \left(\frac{q}{p} \right)^s.$$

La série définissant G_X diverge aux deux extrémités $x = \pm 1/q$ car son terme général y a pour module p et ne tend pas vers 0.

16.b. De $p > 1/2$, on déduit $q = 1 - p < p$, donc $0 < q/p < 1$. Choisissons ρ tel que $1 < \rho < p/q$. Par hypothèse $b_s = (q/p)^s$, donc

$$b_s \rho^s = (\rho q/p)^s \rightarrow 0.$$

La condition (H) est réalisée. Pour vérifier l'autre hypothèse de la partie III, choisissons $R_0 \in]1, 1/q[$, intervalle non vide puisque $q < 1$. La série définissant $G_X(R_0)$ converge; son terme général tend vers 0, donc $a \in B(R_0)$ avec $R_0 > 1$. Les coefficients sont non négatifs.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $t = q/p \in]0, 1[$. La réciprocité donne

$$a_n = \sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} t^m = t^n \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} (-t)^{m-n}.$$

La question 10.b avec $\lambda = 1$, $k = n$ et $x = -t$ est applicable puisque $-t \in]-1, 1[$. Elle donne

$$a_n = \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}.$$

Or $1+t = (p+q)/p = 1/p$, donc $a_n = pq^n$. Ainsi, pour tout $m \geq 1$,
 $P(X+1=m) = pq^{m-1}$: $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre p .

17.a. Méthode 1 — Degrés distincts et liberté.

Pour chaque s , H_s est un polynôme de degré s et de coefficient dominant $1/s!$, avec $H_0 = 1$. Si

$$\sum_{s=0}^d c_s H_s = 0$$

et si un coefficient est non nul, soit m le plus grand indice tel que $c_m \neq 0$. Le coefficient de x^m dans cette somme est $c_m/m! \neq 0$, contradiction. La famille est donc libre. Elle contient $d+1$ éléments dans Pol_d , de dimension $d+1$: c'est une base.

Méthode 2 — Évaluations successives aux entiers.

Pour $j, s \in \{0, \dots, d\}$, $H_s(j) = 0$ si $j < s$, tandis que $H_s(s) = 1$. Dans une relation

$$\sum c_s H_s = 0,$$

l'évaluation en 0 donne $c_0 = 0$. Si $c_0, \dots, c_{j-1}$ sont nuls, l'évaluation en j donne $c_j = 0$, les termes d'indice $s > j$ étant également nuls. Par récurrence, tous les coefficients sont nuls. La famille est libre puis une base par le même argument de dimension. Cette méthode utilise les zéros particuliers des polynômes plutôt que leurs termes dominants.

17.b. Pour $P, Q \in Pol_d$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda(P(x+1) - P(x)) + \mu(Q(x+1) - Q(x)).$$

Donc Δ est linéaire. La substitution $x \mapsto x + 1$ préserve le caractère polynomial et le degré au plus d , donc $\Delta(P) \in \text{Pol}_d$. Ainsi Δ est un endomorphisme de Pol_d . Plus précisément, pour un polynôme de degré $m \geq 1$, les termes de degré m s'annulent, si bien que $\Delta(P)$ est de degré au plus $m - 1$; pour un polynôme constant, la différence est nulle.

17.c. Comme $H_0 = 1$, $\Delta(H_0) = 0$. Pour $s \geq 1$, $H_s(0) = 0$ car le produit contient le facteur x .

Posons

$$Q_s(x) = \prod_{j=0}^{s-2} (x - j),$$

avec le produit vide égal à 1 si $s = 1$. Alors

$$H_s(x+1) = \frac{(x+1)Q_s(x)}{s!}, \quad H_s(x) = \frac{(x-s+1)Q_s(x)}{s!}.$$

En soustrayant,

$$\Delta(H_s)(x) = \frac{sQ_s(x)}{s!} = \frac{Q_s(x)}{(s-1)!} = H_{s-1}(x).$$

L'identité est ainsi établie pour tous les réels x et pour $s = 1$ également.

17.d. Comme $(H_j)_{j=0}^d$ est une base, il existe des coefficients uniques c_j tels que

$$P = \sum_{j=0}^d c_j H_j.$$

La question 17.c, itérée, donne

$$\Delta^s(H_j) = H_{j-s} \text{ si } j \geq s, \quad \Delta^s(H_j) = 0 \text{ si } j < s.$$

On utilise ici Δ^0 égal à l'identité. Par linéarité,

$$\Delta^s(P) = \sum_{j=s}^d c_j H_{j-s}.$$

En évaluant en 0, seul le terme $j = s$ subsiste, car $H_0(0) = 1$ et $H_m(0) = 0$ pour $m \geq 1$.
Donc $(\Delta^s(P))(0) = c_s$. On obtient bien

$$P(x) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(P))(0)] H_s(x).$$

17.e. Pour $k \in \{0, \dots, d\}$, le polynôme $e_k : x \mapsto x^k$ appartient à Pol_d . On applique 17.d à $P = e_k$ et on évalue en $x = n$ pour obtenir

$$n^k = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] H_s(n).$$

Pour $k = 0$ et $n = 0$, le membre de gauche représente la valeur du polynôme constant $e_0 = 1$. Pour $s > k$, le coefficient est nul, car chaque application de Δ abaisse le degré jusqu'à atteindre le polynôme nul.

17.f. Puisque $0 \leq X \leq d$, toutes les variables X^k et $H_s(X)$ ont un nombre fini de valeurs ; leurs espérances existent absolument. L'identité de 17.e, appliquée à $n = X$, et la linéarité d'une somme finie donnent

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] E(H_s(X)).$$

Pour $n < s$, $H_s(n) = 0$, et pour $n \geq s$, $H_s(n) = \binom{n}{s}$. Par transfert pour une variable finie,

$$E(H_s(X)) = \sum_{n=s}^d \binom{n}{s} a_n.$$

Le polynôme

$$G_X(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$$

satisfait

$$\frac{G_X^{(s)}(1)}{s!} = \sum_{n=s}^d \binom{n}{s} a_n = b_s.$$

Donc $E(H_s(X)) = b_s$ et

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] b_s.$$

Il n'y a aucun échange de séries infinies : toutes les sommes utilisées dans cette question sont finies.

17.g. Méthode 1 — Base des polynômes H_s et réciprocité.

On a $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$ et $H_2(x) = x(x-1)/2$. Les identités polynomiales $x = H_1(x)$ et $x^2 = H_1(x) + 2H_2(x)$ donnent

$$b_0 = E(1) = 1, \quad b_1 = E(X) = 1, \quad b_1 + 2b_2 = E(X^2) = 3/2.$$

Donc $b_2 = 1/4$. Par la formule finie de 13.c,

$$a_2 = b_2 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = b_1 - 2b_2 = \frac{1}{2}, \quad a_0 = b_0 - b_1 + b_2 = \frac{1}{4}.$$

Les probabilités sont non négatives et leur somme vaut 1. Elles correspondent à $P(X = n) = \binom{2}{n}(1/2)^n(1/2)^{2-n}$ pour $n = 0, 1, 2$. Ainsi $X \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$.

Méthode 2 — Système sur les probabilités.

Le support fini et les deux moments imposent les trois équations

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 + 2a_2 = 1, \quad a_1 + 4a_2 = 3/2.$$

La soustraction des deux dernières donne $2a_2 = 1/2$, donc $a_2 = 1/4$. La deuxième donne $a_1 = 1/2$, puis la première $a_0 = 1/4$. On reconnaît à nouveau la loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$. Enfin, $G_X(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ donne $b_0 = G_X(1) = 1$, $b_1 = G'_X(1) = a_1 + 2a_2 = 1$ et $b_2 = G''_X(1)/2 = a_2 = 1/4$. Cette approche directe est particulièrement utile lorsque le support a peu de valeurs.

Relevé des adaptations

4.a. Le quotient $u_{n+1}(k)/u_n(k)$ est explicitement considéré pour $n \geq 1$: $u_0(k) = 0$, donc le quotient n'est pas défini en 0. La démonstration utilise une majoration géométrique élémentaire, sans critère général de d'Alembert.

7.a. Le cas $n = 0$ est formulé séparément, avec une différence nulle ; la majoration pour $n \geq 1$ est inchangée. Il s'agit d'une précision de rédaction, sans modification du résultat.

Aucune question n'a été supprimée ni admise. Les propriétés de régularité des sommes de séries sont démontrées dans le cas particulier proposé, sans utilisation de la théorie générale des séries entières.