



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2016

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

et

$$\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ , des expressions des fonctions $\sin$, $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction $\sin$. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D .

2. Imparité et périodicité de φ

2.a. Justifier que φ est impaire.

2.b. Vérifier que, pour $x \in D$:

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}.$$

2.c. Montrer que, pour $x \in D$: $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.

La fonction φ est donc périodique de période 1.

3. Continuité de φ

3.a. Justifier, pour x dans l'ensemble $D \cup \{0, 1\}$, l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right).$$

3.b. Vérifier que :

$$\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - g(x).$$

3.c. Soit $h \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$; montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |g(x + h) - g(x)| \leq C|h|,$$

avec

$$C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1) \left(n - \frac{3}{2}\right)}.$$

3.d. En déduire que g est continue sur $[0, 1]$, puis que φ est continue sur $]0, 1[$.

La fonction φ est donc continue sur D .

4. Étude de φ en 0 et en 1

4.a. Montrer que : $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

4.b. Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II : Étude de l'opérateur T

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note, pour tout entier naturel k , e_k l'élément de E défini par $\forall x \in [0, 1], e_k(x) = x^k$, et, pour tout entier naturel n , F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_0, \dots, e_n)$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E .

6. Étude de T sur F_n

6.a. Vérifier que : $\forall f \in F_n, T(f) \in F_n$.

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$.

6.b. Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n .

6.c. Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable?

7. Étude du noyau de l'endomorphisme $T - 2 \text{id}_E$

7.a. Montrer que $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit $f \in \text{Ker}(T - 2 \text{id}_E)$. On note $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$. On fixe $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$.

7.b. Montrer que : $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$.

7.c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.

7.d. En déduire que : $m = f(0)$.

7.e. Faire une étude similaire pour M .

7.f. Montrer alors que f est constante.

8. Étude de la fonction cot

Pour tout $x \in D$, on note $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

8.a. Vérifier que cot est définie et continue sur D , qu'elle est impaire et périodique de période 1.

8.b. Montrer que :

$$\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \text{ et } \cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x.$$

8.c. Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

8.d. Démontrer que, pour tout $x \in D$, on a $\frac{x}{2} \in D$, $\frac{x+1}{2} \in D$ et

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cot(x).$$

9. Calcul de φ

9.a. Vérifier que, pour tout $x \in D$:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

9.b. Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.

9.c. Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit :

$$\forall x \in D, \quad \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

10. Première application

10.a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose

$$\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

10.b. Vérifier que :

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

10.c. En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

10.d. Déterminer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout entier naturel non nul n et tout $x \in [0, 1[$, on pose

$$\alpha_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \text{ et}$$

$$\beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x).$$

11. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$$

converge. On note alors

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x).$$

12. Explicitation de β : on fixe $x \in]0, 1[$.

12.a. Pour N entier naturel non nul, calculer

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$$

en fonction de $\beta_N(x)$.

12.b. Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

12.c. Montrer que :

$$\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

12.d. En déduire que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

12.e. Montrer alors que, pour tout $x \in]0, 1[$: $\beta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$.

13. Pour tout nombre réel x et tout entier naturel non nul n , on pose

$$P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right).$$

13.a. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note

$$P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

13.b. Vérifier que, pour tout $x \in [0, 1[$: $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

13.c. Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x . On note encore $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

13.d. Soient n entier naturel non nul et $x \in]-n, n[$; montrer que :

$$P_n(x+1) = -\frac{n+1+x}{n-x} P_n(x).$$

13.e. En déduire que, pour tout nombre réel $x : P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

13.f. Montrer alors que, pour tout nombre réel $x : P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et tout $x \in D \cup \{0\}$, on pose

$$\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt \text{ et } v_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

14. Montrer que, pour tout $x \in D \cup \{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.

La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

15. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout $x \in D \cup \{0\}$:

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) v_n(x).$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

16. Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n , on pose

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt).$$

16.a. Vérifier que, lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$:

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

16.b. Expliciter $C_n(t)$ lorsque $t = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

16.c. Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt$.

17. Soit F une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$; montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt = 0.$$

18. Pour $x \in D$, on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin(t/2)} & \text{si } t \in]0, \pi], \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

18.a. Montrer que Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

18.b. Vérifier que :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

18.c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in D, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt$$

$$+ I_n.$$

19. Application

19.a. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que, pour tout $x \in D$:

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

19.b. En déduire que, pour tout $x \in D$:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$