



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2016

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Convergence de la série

On fixe $x \in D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tous les dénominateurs $n^2 - x^2$, pour $n \geq 1$, sont non nuls.

Méthode 1 — Comparaison avec une série de Riemann

Choisissons un entier N tel que $n \geq N$ implique $n^2 \geq 2x^2$. Alors $n^2 - x^2 \geq n^2/2$, d'où

$$|u_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \frac{4|x|}{n^2}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge, car son exposant vaut $2 > 1$. La comparaison montre donc la convergence absolue de

$$\sum u_n(x);$$

les premiers termes, en nombre fini, ne changent pas cette conclusion. Ainsi φ est bien définie sur D .

Méthode 2 — Équivalence des valeurs absolues

Comme $x \neq 0$ et x est fixé,

$$\frac{|u_n(x)|}{2|x|/n^2} = \frac{n^2}{|n^2 - x^2|} \rightarrow 1.$$

Les séries à termes positifs

$$\sum |u_n(x)|$$

et

$$\sum 2|x|/n^2$$

ont donc la même nature. On retrouve la convergence absolue. La comparaison fournit un contrôle explicite des termes ; l'équivalence donne plus directement leur ordre de grandeur.

2.a. Imparité

L'ensemble D est stable par changement de signe et $u_n(-x) = -u_n(x)$. En utilisant la linéarité de sommes de séries convergentes,

$$\varphi(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -\varphi(x).$$

La fonction φ est impaire.

2.b. Décomposition des termes

Pour $x \in D$, les nombres $n - x$ et $n + x$ sont non nuls. La mise au même dénominateur donne

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{(n+x) - (n-x)}{(n-x)(n+x)} = \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Cette identité concerne la différence des deux fractions : elle n'autorise pas à séparer la série en deux séries divergentes.

2.c. Périodicité

Pour $N \geq 1$ et $x \in D$, introduisons la somme finie

$$S_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+k}.$$

La dernière égalité découle de 2.b et de $-1/(n-x) = 1/(x-n)$. Par 1, $S_N(x) \rightarrow \varphi(x)$.

Un décalage d'indice dans une somme finie donne

$$S_N(x+1) = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}.$$

Les deux termes supplémentaires tendent vers zéro quand $N \rightarrow +\infty$. Comme $x+1 \in D$, on obtient $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Ainsi φ est 1-périodique. Aucun réarrangement de série divergente n'a été effectué.

3.a. Existence de g

Pour $x \in D$, la série qui définit g est la série convergente de 1 privée de son premier terme. Pour $x = 0$, tous ses termes sont nuls, donc $g(0) = 0$. Pour $x = 1$, ses termes sont $2/(n^2 - 1)$, avec $n \geq 2$; ils sont positifs et équivalents à $2/n^2$, donc leur série converge.

La décomposition de 2.b s'applique également à ces termes, puisque $n \geq 2$ et $x \in \{0, 1\}$ ne rendent aucun dénominateur nul. Les deux expressions de g sont ainsi valables sur $D \cup \{0, 1\}$.

3.b. Extraction du premier terme

Pour $x \in D$, la convergence établie autorise à isoler le terme d'indice 1 :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2} - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

C'est l'identité demandée.

3.c. Contrôle des variations de g

Fixons $x \in [0, 1]$ et $|h| < 1/2$. Alors $y = x + h \in]-1/2, 3/2[$. Dans cet intervalle, les seuls entiers possibles sont 0 et 1 ; $g(y)$ est donc définie par 3.a.

Pour $n \geq 2$, on a

$$|n - x| \geq n - 1, \quad |n + x| \geq n - 1, \quad |n - y| \geq n - \frac{3}{2}, \quad |n + y| \geq n - \frac{3}{2}.$$

En utilisant $|1/a - 1/b| = |b - a|/|ab|$ pour des nombres non nuls,

$$\left| \left(\frac{1}{n - y} - \frac{1}{n + y} \right) - \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right) \right| \leq \frac{2|h|}{(n - 1)(n - \frac{3}{2})}.$$

La série qui définit C converge : ses termes sont positifs et équivalents à $2/n^2$. Pour les sommes partielles, l'inégalité triangulaire donne la majoration par

$$|h| \sum_{n=2}^N 2/((n - 1)(n - 3/2)).$$

Passer à la limite dans cette inégalité entre sommes convergentes conduit à

$$|g(x + h) - g(x)| \leq C|h|.$$

3.d. Continuité

Le nombre C est fini et indépendant de x, h . Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, la majoration de 3.c implique $g(x + h) \rightarrow g(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$, y compris au voisinage des extrémités. Donc g est continue sur $[0, 1]$.

Les trois fonctions rationnelles intervenant dans 3.b sont continues sur $]0, 1[$; φ y est donc continue.

Pour étendre la conclusion, fixons $a \in D$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a - p \in]0, 1[$. Pour x suffisamment proche de a , $x - p \in]0, 1[$ et la périodicité donne $\varphi(x) = \varphi(x - p)$. La continuité sur $]0, 1[$ implique alors la continuité en a . Ainsi φ est continue sur D .

4.a. Comportement en zéro

L'identité 3.b est valable près de zéro, hors zéro. Par 3.c avec le point de référence 0, $g(x) \rightarrow g(0) = 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, à droite comme à gauche. Par conséquent,

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x) \rightarrow -1 + 1 - 0 = 0.$$

Ainsi $\varphi(x) = 1/x + o(1)$. En multipliant par x , $x\varphi(x) \rightarrow 1$, ce qui établit $\varphi(x) \sim 1/x$.

4.b. Comportement en un

Posons $y = x - 1$. La périodicité implique $\varphi(x) = \varphi(y)$ pour $x \in D$. Quand $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 0$, donc 4.a donne

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-1} \right) = 0.$$

Ces conclusions sont valables des deux côtés de 1.

Partie II : Étude de l'opérateur T

5. Endomorphisme

Pour $x \in [0, 1]$, $x/2 \in [0, 1/2]$ et $(x+1)/2 \in [1/2, 1]$. Si $f \in E$, ses deux composées avec ces applications affines sont donc bien définies et continues sur $[0, 1]$. Leur somme $T(f)$ appartient à E .

Pour $f, g \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, l'évaluation en tout $x \in [0, 1]$ donne

$$T(af + bg)(x) = aT(f)(x) + bT(g)(x).$$

L'application $T : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est un endomorphisme.

6.a. Stabilité de F_n

Pour $0 \leq j \leq n$,

$$T(e_j)(x) = 2^{-j}(x^j + (x+1)^j).$$

Cette fonction est polynomiale de degré au plus j , donc appartient à F_n . Comme $(e_0, \dots, e_n)$ engendre F_n et que T est linéaire, $T(F_n) \subset F_n$. La restriction T_n est bien un endomorphisme de F_n .

6.b. Matrice dans la base B_n

La formule du binôme donne

$$T(e_j) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} e_k + 2^{1-j} e_j,$$

avec une somme vide pour $j = 0$, et donc $T(e_0) = 2e_0$.

Notons $A_n = (a_{kj})_{0 \leq k, j \leq n}$ la matrice, les indices commençant ici à zéro. La colonne j contient les coordonnées de $T(e_j)$:

$$a_{kj} = \begin{cases} 2^{-j} \binom{j}{k} & 0 \leq k < j \leq n, \\ 2^{1-j} & k = j, \\ 0 & k > j. \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 3$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Cette description par coefficients reste valable pour tout n , y compris $n = 0$ où $A_0 = (2)$.

6.c. Valeurs propres et diagonalisation

La matrice A_n est triangulaire supérieure. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, donc

$$\text{Sp}(T_n) = \{2^{1-j} : 0 \leq j \leq n\}.$$

Ces $n + 1$ nombres sont deux à deux distincts. Comme $\dim F_n = n + 1$, le critère de diagonalisation par l'existence de $n + 1$ valeurs propres réelles distinctes s'applique : T_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

7.a. Un élément non nul du noyau

La fonction constante $e_0 : x \mapsto 1$ appartient à E et vérifie $T(e_0) = 2e_0$. Ainsi $e_0 \in \text{Ker}(T - 2\text{id}_E)$ et $e_0 \neq 0_E$. Ce noyau n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Pour toute la suite de 7, on fixe f dans ce noyau. La continuité de f sur le segment $[0, 1]$ garantit l'existence d'un minimum m et d'un maximum M , atteints respectivement en x_0, x_1 . L'identité du noyau s'écrit

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x/2) + f((x+1)/2) = 2f(x).$$

7.b. Propagation du minimum

En $x = x_0$, l'identité précédente donne

$$f(x_0/2) + f((x_0+1)/2) = 2m.$$

Chaque terme du membre de gauche est supérieur ou égal à m . La somme de leurs écarts à m , tous deux positifs ou nuls, est nulle. Les deux écarts sont donc nuls ; en particulier $f(x_0/2) = m$.

7.c. Itération

On démontre par récurrence que $f(x_0/2^n) = m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, il s'agit de la définition de x_0 . Si l'égalité est vraie au rang n , le point $x_0/2^n$ est un point où f atteint son minimum. Le raisonnement de 7.b, appliqué à ce point, donne $f(x_0/2^{n+1}) = m$. La propriété est donc établie à tout rang.

7.d. Passage à la limite

Comme $0 \leq x_0/2^n \leq 2^{-n}$, la suite de ces points tend vers 0. La continuité de f en 0 donne $f(x_0/2^n) \rightarrow f(0)$. Les termes valent tous m , donc $m = f(0)$.

7.e. Propagation du maximum

En $x = x_1$, on a

$$f(x_1/2) + f((x_1 + 1)/2) = 2M.$$

Chaque terme est inférieur ou égal à M ; la somme des deux écarts à M est nulle. Ainsi $f(x_1/2) = M$. En répétant le raisonnement par récurrence, $f(x_1/2^n) = M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_1/2^n \rightarrow 0$ et f est continue en 0, on obtient $M = f(0)$.

7.f. Caractérisation du noyau

Méthode 1 — Utilisation des extrema

Les questions 7.d et 7.e donnent $m = M = f(0)$. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(0) = m \leq f(x) \leq M = f(0),$$

donc $f(x) = f(0)$. La fonction est constante. Réciproquement, toute fonction constante $f : x \mapsto c$ vérifie $T(f) = 2f$. On a donc

$$\text{Ker}(T - 2\text{id}_E) = \text{Vect}(e_0).$$

Méthode 2 — Sommes de Riemann

Partant de $f(x) = \frac{1}{2}(f(x/2) + f((x+1)/2))$, une récurrence donne, pour tout entier $r \geq 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{2^r-1} f\left(\frac{x+k}{2^r}\right).$$

L'identité est vraie pour $r = 1$. Pour passer du rang r à $r + 1$, on applique la première identité à chaque argument $(x + k)/2^r$; les nouveaux indices sont k et $k + 2^r$, qui parcourent ensemble les entiers de 0 à $2^{r+1} - 1$.

Pour $x \in [0, 1]$, le point $(x + k)/2^r$ appartient au segment $[k/2^r, (k + 1)/2^r]$. Le membre de droite est donc une somme de Riemann de la fonction continue f sur $[0, 1]$, pour une subdivision de pas 2^{-r} . Il tend vers $\int_0^1 f(t) dt$. Le membre de gauche ne dépendant pas de r , on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Ainsi f est constante et on retrouve le même noyau. La première méthode suit les questions du sujet; la seconde montre comment une équation de moyenne peut imposer une valeur commune grâce aux sommes de Riemann.

8.a. Domaine, continuité, imparité et périodicité

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$. Le quotient qui définit $\cot$ est donc bien défini sur D et y est continu, puisque son dénominateur n'y est jamais nul.

Le sinus est impair et le cosinus pair, d'où $\cot(-x) = -\cot(x)$.

Les formules d'addition donnent $\sin(\pi(x + 1)) = -\sin(\pi x)$ et $\cos(\pi(x + 1)) = -\cos(\pi x)$. Ces deux changements de signe se compensent dans le quotient; $\cot(x + 1) = \cot(x)$.

8.b. Développements en zéro

Posons $t = \pi x$. Les développements limités usuels en zéro donnent

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Comme $\sin t \sim t$ et $\cos t \rightarrow 1$, on obtient $\cot(x) \sim \pi/t = 1/x$.

Pour calculer la différence sans additionner des équivalents, écrivons exactement

$$\cot(x) - \frac{1}{x} = \pi \left(\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) = \pi \frac{t \cos t - \sin t}{t \sin t}.$$

Le numérateur vaut

$$t \cos t - \sin t = t - \frac{t^3}{2} + o(t^3) - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) = -\frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

et le dénominateur est équivalent à t^2 . Par quotient puis multiplication,

$$\cot(x) - \frac{1}{x} \sim -\frac{\pi}{3}t = -\frac{\pi^2}{3}x.$$

En particulier, cette différence tend vers zéro. Le changement de variable $t = \pi x$ est une simple mise à l'échelle des développements en zéro.

8.c. Développements en un

Avec $y = x - 1$, la périodicité donne $\cot(x) = \cot(y)$. La question 8.b entraîne

$$\cot(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1},$$

$$\cot(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}(x-1).$$

La dernière différence tend donc vers zéro, à droite comme à gauche.

8.d. Identité de duplication

Si $x/2$ était un entier, x serait un entier pair ; si $(x+1)/2$ était un entier, x serait un entier impair. Comme $x \in D$, ces deux nombres appartiennent à D .

Posons $a = \pi x/2$. Les formules d'addition donnent

$$\sin(a + \pi/2) = \cos a, \quad \cos(a + \pi/2) = -\sin a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Comme $\sin(2a) = \sin(\pi x) \neq 0$, les nombres $\sin a$ et $\cos a$ sont non nuls. On peut donc écrire

$$\cot(x/2) + \cot((x+1)/2) = \pi \left(\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} \right) = \pi \frac{\cos(2a)}{\sin a \cos a} = 2 \cot(x).$$

9.a. Identité de duplication pour φ

Réutilisons les sommes finies S_N de 2.c. Pour $x \in D$, les arguments $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à D d'après 8.d. On a

$$S_N(x/2) = 2 \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+2k},$$

$$S_N((x+1)/2) = 2 \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+2k+1}.$$

Les indices pairs de la première somme et impairs de la seconde forment exactement tous les entiers de $-2N$ à $2N+1$. Ainsi

$$S_N(x/2) + S_N((x+1)/2) = 2S_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, toutes les sommes S_N convergent et le dernier terme tend vers zéro. On obtient

$$\varphi(x/2) + \varphi((x+1)/2) = 2\varphi(x).$$

Cette preuve reste au niveau de sommes finies avant le passage à la limite ; elle ne suppose aucune règle générale de réarrangement.

9.b. Prolongement de la différence

La fonction $q = \varphi - \cot$ est continue sur $]0, 1[$ par 3.d et 8.a. Lorsque $x \rightarrow 0$,

$$q(x) = \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) - \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0,$$

par 4.a et 8.b. De même, en soustrayant $1/(x-1)$ aux deux fonctions, 4.b et 8.c donnent $q(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1$.

On définit donc $q(0) = q(1) = 0$. La fonction ainsi prolongée est continue sur $[0, 1]$ et appartient à E .

9.c. Identification des fonctions

Pour $x \in]0, 1[$, la différence des identités 9.a et 8.d donne

$$q(x/2) + q((x+1)/2) = 2q(x).$$

Les deux membres sont continus sur $[0, 1]$. En faisant tendre x vers 0 puis vers 1, l'identité s'étend aux deux extrémités. Ainsi $q \in \text{Ker}(T - 2\text{id}_E)$.

Par 7.f, q est constante sur $[0, 1]$. Comme $q(0) = 0$, elle est identiquement nulle. Les fonctions φ et $\cot$ coïncident donc sur $]0, 1[$. Leurs périodicités de période 1 étendent cette égalité à tout D .

On a finalement

$$\forall x \in D, \quad \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

10.a. Calcul de la limite

D'après 8.b, $\cot(x) - 1/x = -\pi^2 x/3 + o(x)$. Ainsi

$$\frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = -\frac{\cot(x) - 1/x}{2x} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

La limite demandée vaut $\pi^2/6$.

10.b. Majoration de δ

Fixons $x \in]0, 1[$. Les séries

$$\sum 1/n^2$$

et

$$\sum 1/(n^2 - x^2)$$

convergent, la seconde par équivalence à $1/n^2$. La linéarité permet donc de soustraire terme à terme :

$$\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2(n^2 - x^2)}.$$

Le terme d'indice 1 vaut $x^2/(1 - x^2)$. Pour $n \geq 2$, $n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 > 0$, donc

$$0 \leq \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

La série de droite converge, puisque son terme est équivalent à $1/n^4$. Le membre central étant positif ou nul, on peut le remplacer par sa valeur absolue, ce qui donne l'inégalité demandée.

10.c. Limite de la somme

Notons

$$K = \sum_{n=2}^{+\infty} 1/(n^2(n^2 - 1)),$$

qui est fini. Pour $0 < x < 1$, 10.b donne

$$0 \leq \delta(x) \leq \frac{x^2}{1 - x^2} + Kx^2.$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $x \rightarrow 0^+$; par encadrement, $\delta(x) \rightarrow 0$. Par définition de δ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

L'expression sommée ne dépend que de x^2 ; elle est définie également pour $-1 < x < 0$ et a la même valeur en x et en $-x$. La même limite vaut donc des deux côtés de zéro. Le

passage à la limite a été justifié par une majoration du défaut total, sans échange automatique entre limite et somme.

10.d. Somme de la série de Riemann d'exposant deux

Pour $x \in]0, 1[$, l'identité 9.c donne

$$1 - x \cot(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

En divisant par $2x^2 > 0$ et en utilisant 10.a et 10.c, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus

11. Convergence de la série logarithmique

Pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq 1$, $1 - x^2/n^2 > 0$, donc $\alpha_n(x)$ est définie. Si $x = 0$, tous les termes sont nuls et $\beta(0) = 0$.

Méthode 1 — Équivalence

Si $0 < x < 1$, $x^2/n^2 \rightarrow 0$ et le développement usuel $\ln(1 - u) = -u + o(u)$ en zéro entraîne

$$|\alpha_n(x)| = -\ln(1 - x^2/n^2) \sim \frac{x^2}{n^2}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |\alpha_n(x)|$$

converge. La série qui définit $\beta(x)$ est donc absolument convergente.

Méthode 2 — Encadrement par une intégrale

Pour $0 \leq u < 1$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$-\ln(1-u) = \int_0^u \frac{ds}{1-s}.$$

Sur $[0, u]$, $1 \leq 1/(1-s) \leq 1/(1-u)$; ainsi $u \leq -\ln(1-u) \leq u/(1-u)$. Appliquons cette majoration à $u = x^2/n^2$. Comme $u \leq x^2 < 1$,

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1-x^2)n^2}.$$

La comparaison à la série de Riemann donne la convergence absolue, également pour $x = 0$. L'équivalence décrit le terme général; la seconde méthode fournit une borne valable pour tous les indices à x fixé.

12.a. Intégration d'une somme finie

Pour $1 \leq n \leq N$, la fonction $t \mapsto \ln(1 - t^2/n^2)$ est de classe C^1 sur $[0, x]$ et sa dérivée est $-2t/(n^2 - t^2)$. La somme étant finie, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt = \sum_{n=1}^N \left[\ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right) \right]_0^x = \beta_N(x).$$

12.b. Existence de l'intégrale

La fonction $t \mapsto \varphi(t) - 1/t$ est continue sur $]0, x]$ et tend vers zéro lorsque $t \rightarrow 0^+$ par 4.a. Elle se prolonge donc par la valeur 0 en une fonction continue sur $[0, x]$.

Son intégrale sur ce segment existe; elle est aussi la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, des intégrales sur $[\varepsilon, x]$. L'intégrale demandée est donc convergente.

12.c. Contrôle du reste intégré

Notons

$$R_N(t) = \varphi(t) - 1/t - \sum_{n=1}^N (-2t)/(n^2 - t^2)$$

pour $0 < t \leq x$, et prolongeons-le par $R_N(0) = 0$. C'est une fonction continue sur $[0, x]$ par 12.b.

Pour $0 < t \leq x < 1$, la définition de φ donne

$$R_N(t) = - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}.$$

Tous les indices de ce reste sont au moins 2. Pour $n \geq N + 1$, $n^2 - t^2 \geq n^2 - 1 > 0$. En majorant d'abord les sommes partielles puis en passant à leur limite,

$$|R_N(t)| \leq 2t \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Cette inégalité vaut aussi en $t = 0$. Par l'inégalité sur l'intégrale de la valeur absolue,

$$\left| \int_0^x R_N(t) dt \right| \leq \int_0^x |R_N(t)| dt \leq x^2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

En développant l'intégrale de R_N par linéarité, on retrouve l'inégalité du sujet. On n'a pas intégré une série terme à terme : seule une majoration ponctuelle de son reste a été intégrée.

12.d. Passage à la limite

La série

$$\sum_{n \geq 2} 1/(n^2 - 1)$$

converge, car son terme est équivalent à $1/n^2$. Son reste à partir de $N + 1$ tend donc vers zéro. Les questions 12.a et 12.c entraînent

$$\beta_N(x) \longrightarrow \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Par 11, $\beta_N(x) \rightarrow \beta(x)$. L'unicité de la limite donne

$$\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt.$$

12.e. Expression de β

Sur $]0, 1[$, $\sin(\pi t) > 0$ et $t > 0$. La fonction

$$H(t) = \ln \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)$$

est donc définie et dérivable. Par dérivation du logarithme d'un quotient positif et par 9.c,

$$H'(t) = \pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{t} = \varphi(t) - \frac{1}{t}.$$

Pour $0 < \varepsilon < x$, l'intégration sur un segment donne

$$\int_{\varepsilon}^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt = H(x) - H(\varepsilon).$$

Comme $\sin(\pi \varepsilon)/(\pi \varepsilon) \rightarrow 1$, $H(\varepsilon) \rightarrow 0$. L'intégrale converge par 12.b; faire tendre ε vers zéro donne

$$\beta(x) = H(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right).$$

13.a. Convergence sur $[0, 1[$

Méthode 1 — Logarithme du produit fini

Pour $x \in [0, 1[$, tous les facteurs du produit sont strictement positifs. Les propriétés du logarithme appliquées à un produit fini donnent

$$P_n(x) = \pi x \exp(\beta_n(x)).$$

Par 11, $\beta_n(x) \rightarrow \beta(x)$; la continuité de l'exponentielle entraîne $P_n(x) \rightarrow \pi x \exp(\beta(x))$. Cette conclusion inclut $x = 0$, où les produits $P_n(0)$ sont tous nuls.

Méthode 2 — Monotonie du produit

Pour $0 < x < 1$, $P_n(x) > 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) \left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2} \right) \leq P_n(x).$$

La suite est décroissante et minorée par zéro; le théorème de la limite monotone garantit sa convergence. Pour $x = 0$, elle est constante nulle. La monotonie prouve simplement l'existence de la limite; les logarithmes permettent en plus de l'exprimer et, pour $x > 0$, de montrer qu'elle est strictement positive.

13.b. Identification sur $[0, 1[$

Pour $0 < x < 1$, 13.a et 12.e donnent

$$P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \pi x \exp \left(\ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \right) = \sin(\pi x).$$

Pour $x = 0$, $P(0) = 0$, $\beta(0) = 0$ et $\sin 0 = 0$. Les trois expressions coïncident donc sur tout $[0, 1[$.

13.c. Convergence pour tout réel

Si $x = 0$, $P_n(x) = 0$ pour tout n . Si x est un entier non nul, le facteur d'indice $|x|$ est nul ; donc $P_n(x) = 0$ pour tout $n \geq |x|$. La convergence est acquise pour les entiers.

Fixons désormais $x \in D$. Choisissons un entier $q > |x|$. Pour $k \geq q$, les facteurs $1 - x^2/k^2$ sont strictement positifs. De plus,

$$\left| \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \right| \sim \frac{x^2}{k^2},$$

si bien que la série logarithmique portant sur ces indices converge absolument. Pour $n \geq q$,

$$P_n(x) = \pi x \left(\prod_{k=1}^{q-1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \right) \exp \left(\sum_{k=q}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \right).$$

Le premier produit est fini, réel et non nul ; il peut avoir un signe quelconque. Seule la partie où les facteurs sont positifs est placée dans un logarithme. La somme dans l'exponentielle tend vers une limite finie ; par continuité, $P_n(x)$ converge. Ainsi P est définie sur tout $\mathbb{R}$.

13.d. Identité pour les produits finis

On évite de diviser par $P_n(x)$, qui pourrait être nul. Écrivons directement

$$P_n(x) = \frac{\pi}{(n!)^2} x \prod_{k=1}^n (k - x) \prod_{k=1}^n (k + x).$$

Pour $P_n(x + 1)$, les indices de ces deux produits se décalent :

$$P_n(x + 1) = \frac{\pi}{(n!)^2} (x + 1) \prod_{j=0}^{n-1} (j - x) \prod_{j=2}^{n+1} (j + x).$$

En isolant le facteur $j = 0$ dans le premier produit et le facteur $j = n + 1$ dans le second,

puis en remplaçant

$$(x+1) \prod_{j=2}^n (j+x)$$

par

$$\prod_{j=1}^n (j+x),$$

on obtient

$$P_n(x+1) = -\frac{\pi}{(n!)^2} x(n+1+x) \prod_{j=1}^{n-1} (j-x) \prod_{j=1}^n (j+x).$$

Les produits vides valent 1, ce qui couvre $n = 1$. En comparant avec $P_n(x)$, on obtient l'identité polynomiale

$$(n-x)P_n(x+1) = -(n+1+x)P_n(x).$$

Comme $x \in]-n, n[$ implique $n-x > 0$, on peut diviser par $n-x$:

$$P_n(x+1) = -\frac{n+1+x}{n-x} P_n(x).$$

Le raisonnement reste valable lorsque $x = 0$ ou lorsqu'un facteur de $P_n(x)$ est nul.

13.e. Relation de translation et périodicité

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n suffisamment grand, $|x| < n$, et 13.d s'applique. Par 13.c, $P_n(x)$ et $P_n(x+1)$ convergent. De plus,

$$\frac{n+1+x}{n-x} = \frac{1+(1+x)/n}{1-x/n} \rightarrow 1.$$

Le passage à la limite dans l'identité donne $P(x+1) = -P(x)$. En l'appliquant une deuxième fois,

$$P(x+2) = -P(x+1) = P(x).$$

La fonction P est donc 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

13.f. Identification sur tout $\mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $p = \lfloor x \rfloor$ et $r = x - p \in [0, 1[$. La relation de 13.e, itérée pour les translations positives et négatives, donne

$$P(x) = (-1)^p P(r) = (-1)^p \sin(\pi r).$$

La relation $\sin(\pi(y+1)) = -\sin(\pi y)$, issue des formules d'addition, donne de même $\sin(\pi x) = (-1)^p \sin(\pi r)$. Par conséquent $P(x) = \sin(\pi x)$ pour tout réel x .

En particulier, aux entiers, les deux membres sont nuls. On a établi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

le produit infini étant, par définition, la limite des produits finis $P_n(x)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

14. Convergence de la série qui définit ψ

Pour $x = 0$, tous les $v_n(0)$ sont nuls. Pour $x \in D$, les dénominateurs sont non nuls et

$$|v_n(x)| = \frac{|x|}{|n^2 - x^2|} \sim \frac{|x|}{n^2}.$$

La comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2 donne la convergence absolue.

Ainsi ψ est définie sur $D \cup \{0\}$ et $\psi(0) = 0$. L'alternance des signes n'est pas nécessaire à la preuve.

15. Calcul de $\lambda_n(x)$

Fixons $n \geq 1$ et $x \in D \cup \{0\}$. La fonction intégrée est continue sur $[0, \pi]$, donc $\lambda_n(x)$ existe. On a $x + n \neq 0$ et $x - n \neq 0$.

Méthode 1 — Formule produit-somme

La formule donnée dans l'énoncé donne

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((x+n)t) + \cos((x-n)t)) dt,$$

donc

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi(x+n))}{x+n} + \frac{\sin(\pi(x-n))}{x-n} \right).$$

Par les formules d'addition, $\sin(\pi(x+n)) = \sin(\pi(x-n)) = (-1)^n \sin(\pi x)$. En réunissant les fractions,

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^n \sin(\pi x)}{2} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) v_n(x).$$

Cette formule vaut aussi pour $x = 0$ et donne $\lambda_n(0) = 0$.

Méthode 2 — Deux intégrations par parties

Les fonctions sont de classe C^1 sur le segment. Posons $J = \int_0^\pi \sin(xt) \sin(nt) dt$. Une première intégration par parties donne

$$\lambda_n(x) = \left[\frac{\cos(xt) \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{x}{n} J = \frac{x}{n} J.$$

Une seconde intégration par parties, cette fois dans J , donne

$$J = \left[-\frac{\sin(xt) \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{x}{n} \lambda_n(x) = -\frac{(-1)^n \sin(\pi x)}{n} + \frac{x}{n} \lambda_n(x).$$

En reportant dans la première relation,

$$\lambda_n(x) = -\frac{(-1)^n x \sin(\pi x)}{n^2} + \frac{x^2}{n^2} \lambda_n(x).$$

Ainsi $(n^2 - x^2)\lambda_n(x) = (-1)^{n-1} x \sin(\pi x)$. Le coefficient $n^2 - x^2$ étant non nul, on retrouve le résultat. La première méthode exploite l'identité trigonométrique donnée ; la seconde montre comment des intégrations par parties répétées produisent une relation algébrique sur l'intégrale.

16.a. Somme finie des cosinus

Supposons $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\sin(t/2) \neq 0$. Les formules d'addition du sinus donnent, pour tout $k \geq 1$,

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right) = 2 \cos(kt) \sin(t/2).$$

En sommant pour $k = 1, \dots, n$, tous les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin(t/2) C_n(t) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin(t/2).$$

La division par $2 \sin(t/2) \neq 0$ donne

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

La formule est entièrement réelle et résulte d'une somme télescopique finie.

16.b. Valeur aux multiples de 2π

Si $t = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, chaque terme $\cos(kt) = \cos(2kp\pi)$ vaut 1. Par conséquent $C_n(2p\pi) = n$. Cette valeur se calcule directement sans utiliser le quotient indéfini de 16.a.

16.c. Intégrale de C_n

La somme définissant C_n est finie ; par linéarité,

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi = 0.$$

Ainsi $I_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

17. Limite d'une intégrale oscillante

On suit la méthode imposée. Posons $a_n = (2n + 1)/2 > 0$. Comme F est de classe C^1 sur le segment, l'intégration par parties est licite :

$$\int_0^\pi F(t) \sin(a_n t) dt = \left[-\frac{F(t) \cos(a_n t)}{a_n} \right]_0^\pi + \frac{1}{a_n} \int_0^\pi F'(t) \cos(a_n t) dt.$$

On a $\cos(a_n \pi) = 0$ et $\cos 0 = 1$; le terme de bord vaut $F(0)/a_n$. Puisque $|\cos| \leq 1$,

$$\left| \int_0^\pi F(t) \sin(a_n t) dt \right| \leq \frac{1}{a_n} \left(|F(0)| + \int_0^\pi |F'(t)| dt \right).$$

L'intégrale de $|F'|$ est finie, car F' est continue sur le segment. Le facteur entre parenthèses ne dépend pas de n , tandis que $a_n \rightarrow +\infty$. La limite demandée vaut donc zéro. La preuve fournit une majoration explicite et ne fait appel à aucun théorème général sur les intégrales oscillantes.

18.a. Régularité de Φ_x

Fixons $x \in D$. Pour $0 < t \leq \pi$, $\sin(t/2) > 0$, donc Φ_x est de classe C^1 sur $]0, \pi]$. Il reste à examiner $t = 0$.

Les développements usuels, avec x fixé, donnent

$$\cos(xt) - 1 = -\frac{x^2 t^2}{2} + o(t^2), \quad \sin(t/2) = \frac{t}{2} + o(t).$$

Par quotient, $\Phi_x(t) = -x^2 t + o(t)$. Ainsi $\Phi_x(t) \rightarrow 0 = \Phi_x(0)$; la fonction est continue en 0 et sa dérivée à droite existe, avec

$$\Phi'_x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi_x(t) - \Phi_x(0)}{t} = -x^2.$$

Pour $t > 0$, la dérivation du quotient donne

$$\Phi'_x(t) = \frac{-x \sin(xt) \sin(t/2) - \frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) \cos(t/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

Pour vérifier la continuité de cette dérivée, utilisons

$$\sin(xt) = xt + o(t), \quad \sin(t/2) = t/2 + o(t), \quad \cos(t/2) = 1 + o(1).$$

Le premier terme du numérateur vaut $-x^2t^2/2 + o(t^2)$; le second vaut $x^2t^2/4 + o(t^2)$. Leur somme vaut $-x^2t^2/4 + o(t^2)$. Le dénominateur vaut $t^2/4 + o(t^2)$. Il en résulte $\Phi'_x(t) \rightarrow -x^2 = \Phi'_x(0)$.

La fonction et sa dérivée se prolongent donc continûment en zéro. À l'autre extrémité, le dénominateur vaut 1 et le quotient est régulier dans un voisinage de π . Ainsi Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$, avec les dérivées unilatérales aux extrémités.

18.b. Identité ponctuelle

Pour $t \in]0, \pi]$, on a $\sin(t/2) \neq 0$; on peut multiplier l'identité 16.a par $\cos(xt) - 1$. En utilisant la définition de Φ_x , on obtient

$$C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin((2n+1)t/2).$$

Pour $t = 0$, le membre de gauche vaut $n(1-1) = 0$; les deux termes de droite sont également nuls, car $\Phi_x(0) = 0$ et $\cos 0 - 1 = 0$. L'identité vaut donc sur tout $[0, \pi]$.

18.c. Intégration de l'identité

Par linéarité des sommes finies et des intégrales,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = \int_0^\pi \cos(xt) C_n(t) dt.$$

Or $\cos(xt)C_n(t) = C_n(t)(\cos(xt) - 1) + C_n(t)$. En intégrant l'identité 18.b, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(xt) - 1) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin((2n+1)t/2) dt + I_n.$$

Comme $x \in D$ implique $x \neq 0$,

$$\int_0^\pi (\cos(xt) - 1) dt = \frac{\sin(\pi x)}{x} - \pi.$$

On en déduit exactement

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin((2n+1)t/2) dt + I_n.$$

Tous les intégrandes sont continus sur le segment ; les opérations effectuées portent uniquement sur des sommes finies.

19.a. Passage à la limite

Fixons $x \in D$. Par 15,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = \sin(\pi x) \sum_{k=1}^n v_k(x).$$

La série

$$\sum v_k(x)$$

converge absolument par 14 ; ce membre tend donc vers $\sin(\pi x)\psi(x)$.

Dans le membre de droite de 18.c, $I_n = 0$ par 16.c. La fonction Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ par 18.a ; la question 17, appliquée à $F = \Phi_x$, implique que l'intégrale oscillante tend vers zéro. On obtient

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

Il s'agit d'un passage à la limite dans une identité de sommes partielles, et non d'un échange entre une série infinie et une intégrale.

19.b. Développement de l'inverse du sinus

Pour $x \in D$, $\sin(\pi x) \neq 0$ et $x \neq 0$. En multipliant l'égalité de 19.a par 2, puis en divisant par $\sin(\pi x)$, on obtient

$$2\psi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Enfin, la définition de ψ et la convergence absolue établie en 14 permettent de sortir le facteur constant x de la somme :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2\psi(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$

C'est le développement demandé, valable pour tout réel non entier.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité de modification mathématique. Les énoncés ont été conservés et les démonstrations utilisent les outils du référentiel fourni. Les identités trigonométriques nécessaires sont données dans le sujet ou établies à partir des formules d'addition. Aucun résultat n'a été ajouté comme résultat admis.