



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $C^k([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur le segment $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées successives jusqu'à la k -ième sont continues.

Si f est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty$ le nombre réel $\max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

Si q est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par :

$$F(q) = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0, 1], f''(t) = q(t)f(t)\}.$$

Introduction

1. a) Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. b) Pour toute fonction f de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :

$$\Phi(f) : t \in [0, 1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u) du.$$

Vérifier que l'application Φ , qui à f associe $\Phi(f)$, est un endomorphisme de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. c) Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.

1. d) En déduire, pour toute fonction f de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$:

$$(f \text{ appartient à } F(q) \text{ et vérifie } f(0) = f'(0) = 0) \iff (\Phi(f) = f).$$

2. Soit f dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et, pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.
 2. a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |f_n(t)| \leq \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}.$$
 2. b) En déduire que, pour tout t de $[0, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 2. c) Montrer alors que, si f appartient à $F(q)$ et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$, alors f est nulle.
 2. d) Montrer que l'application $\Delta : F(q) \longrightarrow \mathbb{R}^2, f \longmapsto (f(0), f'(0))$, est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$?

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$

Soient ω une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles strictement positives, et a un nombre réel. On note :

$$E_a(\omega) = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0, 1], f''(t) = -a\omega(t)f(t), \text{ et } f(0) = f(1) = 0\}.$$

3. a) Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
3. b) Un exemple élémentaire : le cas $a = 0$. Décrire $E_0(\omega)$.
4. Un exemple constructif : le cas où ω est la fonction constante 1.
 4. a) Pour a strictement négatif, remarquer que $t \longmapsto \exp(\sqrt{-a}t)$ et $t \longmapsto \exp(-\sqrt{-a}t)$ sont dans $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour a strictement négatif.

4. b) Pour a strictement positif, remarquer que $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$ et $t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)$ sont dans $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour a strictement positif en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a}/\pi$.
5. On revient au cas général. Montrer que $\dim(E_a(\omega)) \leq 1$. On pourra faire intervenir encore l'application Δ .
6. Montrer que, si $E_a(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors a est strictement positif. On pourra introduire $\int_0^1 (f'(t))^2 dt$.
7. Lorsque f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t) dt.$$

Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, l'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

Pour f dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on note :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \omega(t) dt}.$$

8. Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

Partie II : l'exemple $\omega = 1$

Dans cette partie, ω est la fonction constante 1 et p est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel k non nul, on note ψ_k la fonction définie par :

$$\psi_k : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi t).$$

9. a) Vérifier qu'il existe un nombre réel a strictement positif tel que ψ_k appartienne à $E_a(1)$.

9. b) Pour tout couple (k, l) dans $(\mathbb{N}^*)^2$, calculer :

$$\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_0^1 \psi_k(t) \psi_l(t) dt.$$

9. c) On note G le sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ engendré par $(\psi_1, \dots, \psi_p)$.
Vérifier que $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ est une base orthonormée de G .

10. Pour g élément de G , on définit la fonction $u(g)$ par, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$(u(g))(t) = 2 \cos(\pi t) g(t) - \left(\int_0^1 g(x) \psi_p(x) dx \right) \psi_{p+1}(t).$$

10. a) Montrer que $u : g \mapsto u(g)$ est un endomorphisme de G .

10. b) Décrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$. Justifier que u est diagonalisable.

11. a) Vérifier que, pour g élément de G :

$$\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt.$$

11. b) Soit λ une valeur propre de u . Montrer d'abord que λ appartient au segment $[-2, 2]$. Vérifier ensuite que λ ne vaut ni 2 ni -2 ; on pourra raisonner par l'absurde.

12. Soient λ une valeur propre de u et θ un nombre réel de $]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$. On note ψ un vecteur propre associé. Il existe un p -uplet de nombres réels $(x_1, \dots, x_p)$ tel

que :

$$\psi = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k.$$

On pose $x_0 = x_{p+1} = 0$.

12. a) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$:

$$x_{k+1} - 2 \cos(\theta) x_k + x_{k-1} = 0.$$

12. b) En déduire l'existence d'un couple (A, B) de nombres réels tel que, pour tout $k \in \{0, \dots, p+1\}$:

$$x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta).$$

12. c) Justifier que A est nul et qu'il existe $s \in \{1, \dots, p\}$ tel que :

$$\theta = \frac{s\pi}{p+1}.$$

12. d) En déduire les valeurs propres de u et une base de vecteurs propres de u .

Partie III : l'hypothèse (H_ω)

On revient au cas général : ω est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles strictement positives. On note (H_ω) l'hypothèse : il existe une suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n , $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse (H_ω) est-elle vérifiée si ω est la fonction constante 1 ? Justifier la réponse.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée.

Ainsi, on suppose qu'il existe ω une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse (H_ω) soit réalisée ; on note a un

nombre réel positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts tels que, pour tout entier n :

$$E_{a_n}(\omega) \neq \{0\} \quad \text{et} \quad 0 < a_n \leq a.$$

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in E_{a_n}(\omega) \quad \text{et} \quad \int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 1.$$

Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit φ dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout entier naturel n , on note :

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt \quad \text{et} \quad S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi) f_k.$$

15. a) Que représente $S_n(\varphi)$?

15. b) Vérifier que, pour tout entier naturel :

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2 \leq \|\varphi\|_2^2.$$

15. c) Que peut-on en déduire de la série

$$\sum_{n \geq 0} (c_n(\varphi))^2$$

?

15. d) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n''(t) \varphi(t) dt = 0.$$

16. a) Soit x un nombre réel fixé dans le segment $[0, 1]$. On définit la fonction φ_x par :

$$\varphi_x : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t \in [0, x], \\ x(t-1) & \text{si } t \in]x, 1]. \end{cases}$$

Vérifier que φ_x est un élément de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

16. b) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f_n à l'ordre 1 entre 0 et x . Vérifier que :

$$f_n(x) = x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt,$$

puis :

$$f_n'(0) = - \int_0^1 (1-t) f_n''(t) dt.$$

16. c) En déduire :

$$f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f_n''(t) dt,$$

et conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

16. d) Remarquer que $f_n(x) = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle$; en déduire :

$$|f_n(x)| \leq a \| \varphi_x \|_2.$$

16. e) Calculer $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2 dt$; en déduire :

$$|f_n(x)| \leq ax(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

16. f) Justifier :

$$|f'_n(0)| \leq a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

16. g) Rappeler pourquoi on a :

$$f'_n(x) = f'_n(0) - a_n \int_0^x \omega(t)f_n(t) dt,$$

et en déduire alors :

$$|f'_n(x)| \leq a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right).$$

17. On note :

$$C = a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right).$$

On remarque que C est un nombre réel strictement positif.

Déduire des questions précédentes :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|.$$

18. Soit ε un nombre réel strictement positif. On choisit N un entier naturel non nul tel que :

$$\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2C},$$

et on pose, pour $k \in \{0, \dots, N\}$, $\alpha_k = k/N$.

18. a) Justifier qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geq p, \quad \forall k \in \{0, \dots, N\}, \quad |f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

18. b) Soit alors x un nombre réel fixé dans le segment $[0, 1]$. En introduisant un entier $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, montrer que :

$$\forall n \geq p, \quad |f_n(x)| < \varepsilon.$$

18. c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

18. d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 0$, et conclure.