



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2015

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Introduction

On fixe $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Toutes les intégrales sur $[0, 1]$ utilisées ci-dessous portent sur des fonctions continues et sont donc définies. Aux extrémités du segment, les dérivées s'entendent au sens unilatéral.

1. a) Vérifions les propriétés de sous-espace.

La fonction nulle appartient à $F(q)$. Si $f, g \in F(q)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $h = \alpha f + \beta g$ appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et :

$$h'' = \alpha f'' + \beta g'' = \alpha qf + \beta qg = qh.$$

Ainsi $h \in F(q)$, et $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. b) Pour étudier la continuité sans dériver une intégrale dépendant d'un paramètre, séparons les deux termes du facteur $t - u$:

$$\Phi(f)(t) = t \int_0^t q(u)f(u) du - \int_0^t uq(u)f(u) du.$$

Comme qf et $u \mapsto uq(u)f(u)$ sont continues, leurs primitives sont de classe C^1 . Cette expression montre que $\Phi(f)$ est continue sur $[0, 1]$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, la linéarité de l'intégrale donne :

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g).$$

Par conséquent, Φ est un endomorphisme de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. c) Dérivons l'expression précédente à l'aide du théorème fondamental du calcul intégral et de la formule de dérivation d'un produit :

$$[\Phi(f)]'(t) = \int_0^t q(u)f(u) du + tq(t)f(t) - tq(t)f(t) = \int_0^t q(u)f(u) du.$$

Une nouvelle dérivation donne :

$$[\Phi(f)]''(t) = q(t)f(t).$$

Cette dernière fonction est continue. Ainsi $\Phi(f) \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$. On relève aussi $\Phi(f)(0) = [\Phi(f)]'(0) = 0$.

1. d) Montrons séparément les deux implications.

Si $\Phi(f) = f$, la question précédente assure que $f \in C^2$, que $f'' = qf$ et que $f(0) = f'(0) = 0$.

Réciproquement, supposons $f \in F(q)$ et $f(0) = f'(0) = 0$. La fonction $h = f - \Phi(f)$ est de classe C^2 et vérifie $h'' = f'' - qf = 0$. Sa dérivée est donc constante. Comme $h'(0) = 0$, elle est identiquement nulle. Puis h est constante et $h(0) = 0$ donne $h = 0$.

On obtient bien l'équivalence annoncée.

2. a) Posons $M = \|q\|_\infty$ et $L = \|f_0\|_\infty$. Démontrons la majoration par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, la majoration est simplement $|f_0(t)| \leq L$. On interprète le facteur de degré zéro comme 1, y compris lorsque $M = 0$ ou $t = 0$.

Supposons la propriété établie au rang n . Pour $0 \leq u \leq t \leq 1$, on a $0 \leq t - u \leq 1$. Ainsi :

$$|f_{n+1}(t)| \leq \int_0^t (t-u)|q(u)| |f_n(u)| du \leq \frac{M^{n+1}L}{n!} \int_0^t u^n du.$$

L'intégrale vaut $t^{n+1}/(n+1)$, donc :

$$|f_{n+1}(t)| \leq M^{n+1}L \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La récurrence prouve la majoration pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. b) Si $M = 0$, alors $q = 0$ et $f_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Sinon, la série exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} M^n / n!$$

converge, donc son terme général tend vers 0.

Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$0 \leq |f_n(t)| \leq L \frac{M^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement donne $f_n(t) \rightarrow 0$. La majoration, indépendante de t , fournit même $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$.

2. c) Sous les hypothèses de la question, $\Phi(f) = f$ d'après 1. d). La suite construite à partir de $f_0 = f$ vérifie alors $f_n = f$ pour tout n , par récurrence.

Pour chaque t , la question 2. b) impose $f(t) = \lim_n f_n(t) = 0$. Ainsi f est identiquement nulle.

2. d) Les applications $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto f'(0)$ sont linéaires, donc Δ est linéaire. Si $\Delta(f) = (0, 0)$, la question 2. c) donne $f = 0$: son noyau est réduit à $\{0\}$, donc elle est injective.

Pour justifier la dimension sans supposer d'avance $F(q)$ de dimension finie, remarquons que l'image par Δ de toute famille libre de $F(q)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$. Une telle famille possède au plus deux éléments. Il s'ensuit que $F(q)$ est de dimension finie et :

$$\dim F(q) \leq 2.$$

L'injectivité seule ne permet pas d'affirmer ici que cette dimension vaut 2.

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$

On fixe $\omega \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, strictement positive, et $a \in \mathbb{R}$.

3. a) La fonction nulle vérifie l'équation et les conditions aux bords. Si $f, g \in E_a(\omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $h = \alpha f + \beta g$ est de classe C^2 et :

$$h'' = -a\omega h, \quad h(0) = h(1) = 0.$$

Ainsi $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Il est inclus dans $F(-a\omega)$, donc il est de dimension finie, au plus égale à 2.

3. b) Pour $a = 0$, l'équation devient $f'' = 0$. La dérivée f' est constante, donc

$$f(t) = \alpha t + \beta.$$

La condition $f(0) = 0$ donne $\beta = 0$, puis $f(1) = 0$ donne $\alpha = 0$. Par conséquent :

$$E_0(\omega) = \{0\}.$$

4. a) Posons $r = \sqrt{-a} > 0$ et considérons $e_+(t) = e^{rt}$, $e_-(t) = e^{-rt}$. Ces deux fonctions vérifient $e_+'' = -ae_+$ et $e_-'' = -ae_-$: elles appartiennent à $F(-a)$.

Elles sont linéairement indépendantes. En effet, si $\alpha e_+ + \beta e_- = 0$, l'évaluation en 0, puis celle de la dérivée en 0, donnent :

$$\alpha + \beta = 0, \quad r(\alpha - \beta) = 0.$$

Comme $r > 0$, ces égalités imposent $\alpha = \beta = 0$. La question 2. d) montre alors que cette famille libre de deux éléments est une base de $F(-a)$.

Toute fonction $f \in E_a(1)$ s'écrit donc $f = \alpha e_+ + \beta e_-$. La condition $f(0) = 0$ donne $\beta = -\alpha$. Celle en 1 devient :

$$\alpha(e^r - e^{-r}) = 0.$$

Puisque $r > 0$ et que l'exponentielle est strictement croissante, $e^r - e^{-r} > 0$. Ainsi $\alpha = 0$, puis $f = 0$. On conclut :

$$E_a(1) = \{0\} \quad \text{pour } a < 0.$$

4. b) Posons $r = \sqrt{a} > 0$, $c(t) = \cos(rt)$ et $s(t) = \sin(rt)$. On a $c'' = -ac$ et $s'' = -as$, donc $c, s \in F(-a)$.

Si $\alpha c + \beta s = 0$, l'évaluation en 0 donne $\alpha = 0$, puis celle de la dérivée en 0 donne $r\beta = 0$, d'où $\beta = 0$. Ces deux fonctions forment donc une base de $F(-a)$ par 2. d).

Pour $f = \alpha c + \beta s$, la condition $f(0) = 0$ impose $\alpha = 0$. La condition $f(1) = 0$ est ensuite $\beta \sin r = 0$.

Si $r/\pi \notin \mathbb{N}^*$, alors $\sin r \neq 0$ et $\beta = 0$. Si $r/\pi = k \in \mathbb{N}^*$, la condition est satisfaite pour tout β .

Ainsi :

$$E_a(1) = \begin{cases} \text{Vect}(t \mapsto \sin(k\pi t)) & \text{si } a = k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}^*, \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le premier cas, la dimension vaut 1 ; dans le second, elle vaut 0.

5. Appliquons Δ à $F(-a\omega)$, où elle est injective par 2. d). Sa restriction à $E_a(\omega)$ reste injective et vérifie :

$$\Delta(E_a(\omega)) \subset \{0\} \times \mathbb{R},$$

puisque $f(0) = 0$ pour tout $f \in E_a(\omega)$. Ce dernier espace est de dimension 1, donc :

$$\dim E_a(\omega) \leq 1.$$

En particulier, si cet espace est non nul, toute fonction non nulle qui lui appartient en constitue une base.

6. Supposons $E_a(\omega) \neq \{0\}$ et choisissons $f \in E_a(\omega)$ non nulle. Comme f est de classe C^2 , l'intégration par parties sur $[0, 1]$ donne :

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt = [f(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)f''(t) dt = a \int_0^1 \omega(t)f(t)^2 dt.$$

Les termes aux bords sont nuls car $f(0) = f(1) = 0$.

L'intégrale de ωf^2 est strictement positive : f n'est pas nulle, et la continuité de ωf^2 , positive en au moins un point, assure une intégrale positive sur un petit intervalle.

L'intégrale de $(f')^2$ est aussi strictement positive. Sinon, la continuité et la positivité de $(f')^2$ imposeraient $f' = 0$ partout ; f serait constante, puis nulle du fait de $f(0) = 0$, ce qui contredirait le choix de f .

On peut donc diviser et obtenir :

$$a = \frac{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}{\int_0^1 \omega(t) f(t)^2 dt} > 0.$$

7. Pour f, g continues, le produit $fg\omega$ est continu, donc l'intégrale existe. La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité, et $fg = gf$ donne la symétrie.

Pour toute fonction f :

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 \omega(t) dt \geq 0.$$

Si $f \neq 0$, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $f(t_0)^2 \omega(t_0) > 0$. Par continuité, cette fonction est minorée par une constante strictement positive sur un intervalle de longueur strictement positive, éventuellement unilatéral si t_0 est une extrémité. Son intégrale est donc strictement positive.

Ainsi $\langle f | f \rangle = 0$ équivaut à $f = 0$. L'application définie dans l'énoncé est bien un produit scalaire réel. L'espace ambiant n'est pas de dimension finie ; chaque sous-espace de dimension finie que nous utiliserons, muni de la restriction de ce produit scalaire, est un espace euclidien.

8. Soient $f \in E_a(\omega)$ et $g \in E_b(\omega)$ avec $a \neq b$.

Méthode 1 — Intégrations par parties.

Les fonctions sont de classe C^2 et s'annulent en 0 et en 1. Ainsi :

$$\int_0^1 f'' g = [f' g]_0^1 - \int_0^1 f' g' = - \int_0^1 f' g',$$

$$\int_0^1 f g'' = [f g']_0^1 - \int_0^1 f' g' = - \int_0^1 f' g'.$$

Ces deux intégrales sont égales. En remplaçant f'' et g'' par les expressions données :

$$-a\langle f | g \rangle = -b\langle f | g \rangle.$$

Comme $a - b \neq 0$, on obtient $\langle f | g \rangle = 0$.

Méthode 2 — Dérivée d'un produit croisé.

Posons $W(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$. La fonction W est de classe C^1 et :

$$W'(t) = f''(t)g(t) - f(t)g''(t) = (b - a)\omega(t)f(t)g(t).$$

Les conditions aux bords imposent $W(0) = W(1) = 0$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne donc :

$$0 = W(1) - W(0) = (b - a)\langle f | g \rangle.$$

Puisque $b - a \neq 0$, le produit scalaire est nul. La première méthode exploite directement les conditions aux bords dans deux intégrations ; la seconde regroupe les deux calculs dans une seule dérivée.

On conclut dans les deux cas que les espaces $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

Partie II : l'exemple $\omega = 1$

9. a) La fonction ψ_k est de classe C^2 , et :

$$\psi_k''(t) = -k^2\pi^2\psi_k(t), \quad \psi_k(0) = \psi_k(1) = 0.$$

Ainsi $\psi_k \in E_{k^2\pi^2}(1)$; le réel $k^2\pi^2$ est strictement positif puisque $k \geq 1$.

9. b) Calculons les produits scalaires pour tous les entiers $k, l \geq 1$.

Méthode 1 — Orthogonalité et normalisation.

Si $k \neq l$, les réels $k^2\pi^2$ et $l^2\pi^2$ sont distincts. Les questions 8 et 9. a) donnent $\langle \psi_k | \psi_l \rangle = 0$.

Pour $k = l$, la formule d'addition du cosinus donne

$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2 z$. Il s'ensuit que :

$$\langle \psi_k | \psi_k \rangle = \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi t)) dt = 1 - \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 = 1.$$

Méthode 2 — Identité de produit trigonométrique.

En soustrayant les deux formules d'addition du cosinus, on obtient :

$$2 \sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v).$$

Ainsi, pour $k \neq l$:

$$\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_0^1 \cos((k - l)\pi t) dt - \int_0^1 \cos((k + l)\pi t) dt.$$

Pour tout entier non nul m , $\int_0^1 \cos(m\pi t) dt = \sin(m\pi)/(m\pi) = 0$. Les deux intégrales sont donc nulles. Lorsque $k = l$, la même identité donne l'intégrale de $1 - \cos(2k\pi t)$, égale à 1 comme ci-dessus.

Les deux méthodes conduisent à :

$$\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

La première méthode réutilise la structure des espaces E_a ; la seconde est utile pour calculer directement des intégrales de produits trigonométriques.

9. c) La question précédente montre que $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ est orthonormée. Elle est donc libre : si

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \psi_k = 0,$$

le produit scalaire avec ψ_j donne $\alpha_j = 0$ pour chaque j .

Elle engendre G par définition. Ainsi $\mathcal{C}$ est une base orthonormée de G , et $\dim G = p$.

10. a) Écrivons

$$g = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k.$$

L'orthonormalité donne $\int_0^1 g(x) \psi_p(x) dx = x_p$.

Les formules d'addition du sinus donnent, en les additionnant :

$$\sin(v+u) + \sin(v-u) = 2 \sin v \cos u.$$

Avec $v = k\pi t$ et $u = \pi t$, on obtient :

$$2 \cos(\pi t) \psi_k(t) = \psi_{k-1}(t) + \psi_{k+1}(t),$$

avec la convention $\psi_0 = 0$. Ainsi :

$$u(g) = \sum_{k=1}^p x_k (\psi_{k-1} + \psi_{k+1}) - x_p \psi_{p+1}.$$

Le terme en ψ_{p+1} s'annule et celui en ψ_0 est nul. Par conséquent $u(g) \in G$. La formule de

définition montre aussi que u est linéaire, car l'intégrale et la multiplication par une fonction fixée sont linéaires.

Ainsi u est un endomorphisme de G .

10. b) La question précédente donne :

$$u(\psi_1) = \psi_2, \quad u(\psi_k) = \psi_{k-1} + \psi_{k+1} \quad (2 \leq k \leq p-1), \quad u(\psi_p) = \psi_{p-1}.$$

Pour $p = 2$, seules les deux égalités aux extrémités interviennent. La matrice $T = (T_{jk})_{1 \leq j, k \leq p}$ de u dans $\mathcal{C}$ est donc définie exactement par :

$$T_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } |j - k| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle a une diagonale nulle, des coefficients égaux à 1 sur les deux diagonales immédiatement adjacentes, et tous ses autres coefficients sont nuls.

C'est une matrice réelle symétrique. Le théorème spectral réel assure donc qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'endomorphisme u est diagonalisable.

11. a) Prenons le produit scalaire de la définition de $u(g)$ avec g :

$$\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g(t)^2 dt - \langle g | \psi_p \rangle \langle g | \psi_{p+1} \rangle.$$

La fonction ψ_{p+1} est orthogonale à chaque vecteur de la base de G , d'après 9. b). Elle est donc orthogonale à g . Le second terme est nul, ce qui établit :

$$\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g(t)^2 dt.$$

11. b) Soit $g \neq 0$ un vecteur propre associé à λ . On a :

$$\lambda \|g\|_2^2 = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g(t)^2 dt.$$

Comme $-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1$, la positivité de l'intégrale entraîne :

$$-2\|g\|_2^2 \leq \lambda \|g\|_2^2 \leq 2\|g\|_2^2.$$

La quantité $\|g\|_2^2$ est strictement positive ; en divisant, on obtient $\lambda \in [-2, 2]$.

Si $\lambda = 2$, l'égalité précédente impose :

$$\int_0^1 (1 - \cos(\pi t)) g(t)^2 dt = 0.$$

L'intégrande est continue et positive ou nulle, donc elle est identiquement nulle. Pour $t \in]0, 1[$, le facteur $1 - \cos(\pi t)$ est strictement positif, donc $g(t) = 0$. La continuité donne également $g(0) = 0$, en contradiction avec $g \neq 0$.

Si $\lambda = -2$, on obtient de même :

$$\int_0^1 (1 + \cos(\pi t)) g(t)^2 dt = 0.$$

Le facteur $1 + \cos(\pi t)$ est strictement positif sur $[0, 1[$. Ainsi g est nulle sur cet intervalle, puis en 1 par continuité, nouvelle contradiction.

Toutes les valeurs propres appartiennent donc à $] -2, 2[$.

- 12. a)** Avec les conventions $x_0 = x_{p+1} = 0$, le coefficient de ψ_k dans $u(\psi)$ vaut $x_{k-1} + x_{k+1}$, y compris pour $k = 1$ et $k = p$.

L'égalité $u(\psi) = \lambda \psi$ donne donc :

$$x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k = 2 \cos(\theta) x_k,$$

ce qui est exactement la relation demandée.

- 12. b)** Construisons une solution réelle de la récurrence ayant les mêmes deux premiers termes, puis utilisons l'unicité obtenue par récurrence.

Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent, pour tout entier k :

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(k\theta),$$

$$\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(k\theta).$$

Ainsi les suites $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ vérifient toutes deux la relation de 12. a).

Puisque $0 < \theta < \pi$, on a $\sin \theta > 0$. On peut donc poser :

$$A = x_0, \quad B = \frac{x_1 - x_0 \cos \theta}{\sin \theta}.$$

La suite $y_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ vérifie $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$ et la même récurrence que (x_k) .

Si $x_{k-1} = y_{k-1}$ et $x_k = y_k$, les relations donnent :

$$x_{k+1} = 2 \cos \theta x_k - x_{k-1} = 2 \cos \theta y_k - y_{k-1} = y_{k+1}.$$

Par récurrence, $x_k = y_k$ pour tous les indices de 0 à $p+1$. L'existence demandée est démontrée uniquement à l'aide de récurrences et de trigonométrie réelle.

12. c) Comme $x_0 = 0$, la formule de 12. b) donne $A = 0$. Le réel B ne peut être nul : sinon tous les x_k seraient nuls, et ψ ne serait pas un vecteur propre.

La condition $x_{p+1} = 0$ devient donc $\sin((p+1)\theta) = 0$. Il existe un entier s tel que $(p+1)\theta = s\pi$.

L'encadrement $0 < \theta < \pi$ impose $0 < s < p+1$. Par conséquent :

$$\theta = \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{avec } s \in \{1, \dots, p\}.$$

12. d) Les questions précédentes montrent que toute valeur propre figure dans la liste :

$$\lambda_s = 2 \cos \left(\frac{s\pi}{p+1} \right), \quad 1 \leq s \leq p.$$

Il reste à vérifier que chaque nombre de cette liste est effectivement une valeur propre.

Pour $s \in \{1, \dots, p\}$, posons $\theta_s = s\pi/(p+1)$ et :

$$v_s = \sum_{k=1}^p \sin(k\theta_s) \psi_k.$$

Son coefficient sur ψ_1 vaut $\sin \theta_s > 0$, donc $v_s \neq 0$. La formule d'addition du sinus vérifie la récurrence pour ses coefficients. Les coefficients prolongés aux indices 0 et $p+1$ sont nuls puisque $\sin 0 = \sin(s\pi) = 0$.

La description de u en 12. a) assure donc $u(v_s) = \lambda_s v_s$.

Sur $]0, \pi[$, le cosinus est strictement décroissant, car sa dérivée $-\sin$ est strictement négative. Les λ_s sont donc deux à deux distinctes. Les vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants ; ils sont au nombre de $p = \dim G$ et forment une base.

Ainsi le spectre réel est $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et une base de vecteurs propres est $(v_1, \dots, v_p)$. Chaque espace propre est la droite $\text{Vect}(v_s)$, car ces p droites sont en somme directe dans un espace de dimension p .

Partie III : l'hypothèse (H_ω)

13. Pour $\omega = 1$, les questions 3 et 4 donnent :

$$E_a(1) \neq \{0\} \iff a = k^2 \pi^2 \text{ pour un entier } k \geq 1.$$

Supposons qu'une suite (a_n) vérifie (H_1) et soit majorée par un réel $A > 0$. Pour chaque n , il existe un entier $k_n \geq 1$ tel que $a_n = k_n^2 \pi^2$. La majoration impose $k_n \leq \sqrt{A}/\pi$.

Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs satisfaisant cette contrainte. Il ne peut donc y avoir une infinité de valeurs a_n deux à deux distinctes dans cet ensemble fini.

Par conséquent, l'hypothèse (H_1) n'est pas vérifiée.

Pour les questions suivantes, on raisonne sous l'hypothèse de contradiction de l'énoncé. En particulier, $0 < a_n \leq a$ pour tout n , donc $a > 0$. On note $M = \|\omega\|_\infty > 0$.

14. Pour chaque n , l'espace $E_{a_n}(\omega)$ est non nul, de dimension 1 par 5. Toute fonction non nulle h de cet espace vérifie $h'(0) \neq 0$: sinon $h(0) = h'(0) = 0$ et la question 2. c), appliquée à $q = -a_n \omega$, donnerait $h = 0$.

Il existe donc une unique fonction $g_n \in E_{a_n}(\omega)$ telle que $g'_n(0) = 1$, obtenue en divisant une fonction non nulle h par $h'(0)$. L'unicité résulte de l'injectivité de Δ .

La question 7 assure $\|g_n\|_2 > 0$. Posons :

$$f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2}.$$

La stabilité de $E_{a_n}(\omega)$ par multiplication scalaire donne $f_n \in E_{a_n}(\omega)$, et la définition de la norme donne $\|f_n\|_2 = 1$.

Cela construit la suite demandée. De plus, pour $n \neq m$, les paramètres a_n et a_m sont distincts ; la question 8 donne $\langle f_n | f_m \rangle = 0$. La famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc orthonormée.

15. a) Posons $V_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de cet espace de dimension $n + 1$.

La fonction $S_n(\varphi)$ appartient à V_n . Pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$\langle \varphi - S_n(\varphi) | f_j \rangle = c_j(\varphi) - \sum_{k=0}^n c_k(\varphi) \langle f_k | f_j \rangle = 0.$$

Ainsi $\varphi - S_n(\varphi)$ est orthogonale à V_n . Cela caractérise $S_n(\varphi)$ comme la projection orthogonale de φ sur V_n .

Cette caractérisation ne nécessite pas que l'espace ambiant soit de dimension finie : l'expression explicite ci-dessus établit l'existence. L'unicité découle du fait qu'un vecteur à la fois dans V_n et orthogonal à V_n est nul.

15. b) Développons le carré de la norme et utilisons l'orthonormalité :

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n c_k(\varphi) c_j(\varphi) \langle f_k | f_j \rangle = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi)^2.$$

Les vecteurs $S_n(\varphi)$ et $\varphi - S_n(\varphi)$ sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne :

$$\|\varphi\|_2^2 = \|S_n(\varphi)\|_2^2 + \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2^2 \geq \|S_n(\varphi)\|_2^2.$$

On a donc les deux relations demandées.

15. c) La série considérée est à termes positifs ou nuls. Ses sommes partielles sont croissantes et, par 15. b), majorées par $\|\varphi\|_2^2$.

Le théorème de la limite monotone montre qu'elles convergent. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\varphi)^2 \text{ converge et sa somme est au plus } \|\varphi\|_2^2.$$

15. d) Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Ainsi $c_n(\varphi)^2 \rightarrow 0$, donc $c_n(\varphi) \rightarrow 0$. C'est précisément la première limite demandée.

Par ailleurs $f_n'' = -a_n \omega f_n$, donc :

$$\int_0^1 f_n''(t) \varphi(t) dt = -a_n c_n(\varphi).$$

Comme $0 < a_n \leq a$, on a :

$$\left| \int_0^1 f_n''(t) \varphi(t) dt \right| \leq a |c_n(\varphi)| \rightarrow 0.$$

Ceci établit la seconde limite sans échanger limite et intégrale.

16. a) Pour $x \in]0, 1[$ fixé, chacune des deux expressions définissant φ_x est affine en t . Au point de raccordement, elles prennent la même valeur $x(x-1)$.

La fonction est donc continue sur tout $[0, 1]$. Pour $x = 0$ ou $x = 1$, elle est identiquement nulle, donc également continue. Ainsi $\varphi_x \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour tout $x \in [0, 1]$.

16. b) Puisque $f_n \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral est :

$$f_n(x) = f_n(0) + x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt.$$

Comme $f_n(0) = 0$, elle donne la première relation. Pour $x = 1$, on utilise $f_n(1) = 0$ et l'on obtient :

$$0 = f_n'(0) + \int_0^1 (1-t) f_n''(t) dt.$$

D'où la seconde relation :

$$f'_n(0) = - \int_0^1 (1-t) f''_n(t) dt.$$

16. c) En substituant la seconde relation dans la première :

$$f_n(x) = -x \int_0^1 (1-t) f''_n(t) dt + \int_0^x (x-t) f''_n(t) dt.$$

Séparons la première intégrale en $[0, x]$ et $[x, 1]$. Sur $[0, x]$, le coefficient de $f''_n(t)$ devient :

$$-x(1-t) + (x-t) = t(x-1).$$

Sur $[x, 1]$, il vaut $-x(1-t) = x(t-1)$. Ainsi :

$$f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f''_n(t) dt.$$

Pour chaque x fixé, φ_x est une fonction continue fixe, indépendante de n . La seconde limite de 15. d), appliquée à cette fonction, entraîne $f_n(x) \rightarrow 0$. Les cas $x = 0, 1$ sont aussi couverts et correspondent à $f_n(x) = 0$ pour tout n .

16. d) En remplaçant f''_n par $-a_n \omega f_n$ dans 16. c), on obtient :

$$f_n(x) = -a_n \int_0^1 \varphi_x(t) \omega(t) f_n(t) dt = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\|f_n\|_2 = 1$ donnent :

$$|f_n(x)| \leq a_n \|\varphi_x\|_2 \|f_n\|_2 \leq a \|\varphi_x\|_2.$$

16. e) Calculons séparément les intégrales sur les deux intervalles :

$$\int_0^1 \varphi_x(t)^2 dt = (x-1)^2 \int_0^x t^2 dt + x^2 \int_x^1 (t-1)^2 dt.$$

Les deux intégrales valent respectivement $x^3/3$ et $(1-x)^3/3$. Ainsi :

$$\int_0^1 \varphi_x(t)^2 dt = \frac{x^3(1-x)^2 + x^2(1-x)^3}{3} = \frac{x^2(1-x)^2}{3}.$$

Comme $0 < \omega(t) \leq M$:

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq M \int_0^1 \varphi_x(t)^2 dt = \frac{M}{3} x^2 (1-x)^2.$$

Sur $[0, 1]$, $x(1-x) \geq 0$, donc la prise de la racine carrée et 16. d) donnent :

$$|f_n(x)| \leq ax(1-x)\sqrt{\frac{M}{3}}.$$

La formule et la majoration restent valables aux deux extrémités.

16. f) Fixons n et démontrons la majoration par deux approches.

Méthode 1 — Quotient différentiel à l'origine.

Pour $x \in]0, 1]$, puisque $f_n(0) = 0$, la question précédente donne :

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} \right| \leq a(1-x)\sqrt{\frac{M}{3}}.$$

En faisant tendre x vers 0 par valeurs positives, la dérivabilité de f_n donne :

$$|f'_n(0)| \leq a\sqrt{\frac{M}{3}}.$$

Méthode 2 — Cauchy-Schwarz appliquée à une intégrale.

En utilisant 16. b) puis $f''_n = -a_n \omega f_n$, on obtient :

$$f'_n(0) = a_n \int_0^1 (1-t)\omega(t)f_n(t) dt = a_n \langle h | f_n \rangle,$$

avec $h(t) = 1 - t$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|f'_n(0)| \leq a_n \|h\|_2 \|f_n\|_2 \leq a \sqrt{M \int_0^1 (1-t)^2 dt} = a \sqrt{\frac{M}{3}}.$$

La première méthode transmet la majoration ponctuelle à une dérivée au bord ; la seconde exploite directement la normalisation dans le produit scalaire pondéré.

16. g) Le théorème fondamental du calcul intégral, applicable car f''_n est continue, donne :

$$f'_n(x) - f'_n(0) = \int_0^x f''_n(t) dt = -a_n \int_0^x \omega(t) f_n(t) dt.$$

Par ailleurs $t(1-t) = 1/4 - (t-1/2)^2 \leq 1/4$ sur $[0, 1]$. La question 16. e) entraîne donc :

$$|f_n(t)| \leq \frac{a}{4} \sqrt{\frac{M}{3}}.$$

Avec $\omega(t) \leq M$, $a_n \leq a$, $x \leq 1$ et la question 16. f), il vient :

$$|f'_n(x)| \leq |f'_n(0)| + a_n \int_0^x \omega(t) |f_n(t)| dt \leq a \sqrt{\frac{M}{3}} + aM \frac{a}{4} \sqrt{\frac{M}{3}} x.$$

Ainsi :

$$|f'_n(x)| \leq a \sqrt{\frac{M}{3}} \left(1 + \frac{aM}{4}\right).$$

Cette borne vaut pour tout n et tout $x \in [0, 1]$.

17. Le réel a est strictement positif, et $M > 0$ puisque ω est strictement positive. Ainsi la constante C de l'énoncé est strictement positive.

Pour $x \neq y$, la fonction f_n est continue sur le segment d'extrémités x, y et dérivable à son intérieur. L'inégalité des accroissements finis et 16. g) donnent :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f'_n(t)| |x - y| \leq C |x - y|.$$

Si $x = y$, les deux membres sont nuls. La relation demandée est donc valable pour tous x, y et tous n , avec la même constante C .

18. a) Fixons $\varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 1$ satisfaisant la condition de l'énoncé. Un tel entier existe, par exemple en prenant $N \geq 2C/\varepsilon$.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, N\}$, la convergence ponctuelle établie en 16. c) fournit un entier p_k tel que :

$$n \geq p_k \implies |f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'ensemble des indices k est fini. On peut donc poser $p = \max(p_0, \dots, p_N)$. Pour tout $n \geq p$, la majoration est simultanément vraie pour tous les points α_k .

Le caractère fini de cette grille permet de choisir ce rang commun.

18. b) Les intervalles fermés $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, pour $0 \leq k \leq N-1$, recouvrent $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, choisissons un indice k tel que x appartienne à cet intervalle. Le cas $x = 1$ correspond à $k = N-1$.

Si $n \geq p$, l'inégalité triangulaire puis 17 et 18. a) donnent :

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(\alpha_k)| + |f_n(\alpha_k)| \leq C|x - \alpha_k| + |f_n(\alpha_k)|.$$

Or $|x - \alpha_k| \leq 1/N$ et $|f_n(\alpha_k)| < \varepsilon/2$. Par conséquent :

$$|f_n(x)| < \frac{C}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Le rang p est indépendant de x .

18. c) Pour chaque n , la fonction continue $|f_n|$ atteint son maximum sur le segment $[0, 1]$, en un point x_n . Pour $n \geq p$, la majoration précédente, valable pour tout x , s'applique donc à x_n et donne :

$$\|f_n\|_\infty = |f_n(x_n)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang p tel que $n \geq p$ implique $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$. Cela prouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0.$$

Nous avons obtenu une convergence uniforme par une grille finie et une majoration des variations, sans invoquer de théorème général sur les suites de fonctions.

18. d) Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(t)^2 \omega(t) \leq M \|f_n\|_{\infty}^2$. En intégrant sur un intervalle de longueur 1 :

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t)^2 \omega(t) dt \leq M \|f_n\|_{\infty}^2 \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement donne la limite demandée. Mais la question 14 impose que cette intégrale soit égale à 1 pour chaque n . On obtient une contradiction.

L'hypothèse (H_{ω}) est donc fausse pour toute fonction ω continue et strictement positive sur $[0, 1]$. Il n'existe aucune suite bornée de paramètres strictement positifs, deux à deux distincts, dont tous les espaces $E_{a_n}(\omega)$ soient non nuls.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique nécessaire.