



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2014

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème comporte six parties.

Le but du problème est d'étudier les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$. Une matrice vérifiant cette propriété sera dite normale.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

on identifiera x et la matrice colonne $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ de ses coordonnées dans B_0 .

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x | y \rangle = {}^tXY = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

La norme euclidienne associée est notée $\| \cdot \|$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans B_0 , on note f^* l'endomorphisme représenté par tA dans B_0 .
- Un endomorphisme représenté par une matrice normale dans B_0 est dit normal ; il vérifie donc $f^* \circ f = f \circ f^*$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on dit que F est stable par f si, pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$. On note alors f_F l'endomorphisme de F défini par $f_F(x) = f(x)$.

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Partie I — Matrices normales d'ordre 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- 1) Vérifier que A est normale si et seulement si ou bien A est symétrique, ou bien il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.
- 2) On suppose que A est normale. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$; on pourra utiliser ${}^tA + A$.
- 3) Déterminer les matrices normales $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

Partie II — L'endomorphisme f^*

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme représenté par A dans B_0 .

- 4) Propriétés élémentaires de f^* .
 - a) Préciser l'endomorphisme $(f^*)^*$.

- b) Si f est inversible, préciser l'endomorphisme $(f^{-1})^*$.
- 5) Caractérisation de l'endomorphisme f^* .
- a) Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, exprimer $\langle f(e_i) | e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A .
- b) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.
- c) Montrer que f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette égalité pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- 6) Montrer que, si f est normal, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.
- 7) Réciproquement, soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|g(x)\| = \|g^*(x)\|$. En exploitant l'égalité $\|g(x + y)\| = \|g^*(x + y)\|$, montrer que g est normal.
- 8) Vérifier que, si A est normale, la matrice de f dans toute base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est normale.

Dans la suite du problème, on admet les résultats suivants.

Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E , on note encore f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.

Dans toute base orthonormale de E , la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f .

On dit encore que f est normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Partie III — Matrices normales et polynômes annulateurs

- 9) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normale telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. Soit $S = {}^tAA$. Vérifier que $S^p = 0$ et montrer que $S = 0$. Montrer alors que $A = 0$.

- 10) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normale. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^q(A) = 0$. Montrer que $P(A) = 0$.
- 11) Exemple : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4, le factoriser, puis en déduire que $(M - I_n)^3(M + I_n)^3 = 0$. Montrer alors que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est normale et non nulle.

Un polynôme réel non nul sera dit sans facteur répété si, dans sa factorisation réelle en facteurs unitaires de degré 1 et facteurs unitaires de degré 2 sans racine réelle, chacun des facteurs apparaît une seule fois. On rappelle que tout polynôme réel non constant possède une telle factorisation, éventuellement avec des facteurs répétés.

- 12) Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au moins 1, sans facteur répété. On pourra partir d'un polynôme annulateur non nul, puis utiliser la question 10.

On note I_A l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A sans facteur répété et $D_A = \{\deg Q : Q \in I_A\}$.

- 13) Justifier que D_A admet un minimum d , et soit $\pi \in I_A$ de degré d .
- a) Montrer que, pour tout facteur unitaire q de degré 1 ou 2 de π , la matrice $q(A)$ n'est pas inversible. Montrer en particulier que les racines réelles de π sont exactement les valeurs propres réelles de A .
- b) Montrer que tout polynôme annulateur non nul de A a un degré au moins égal à d . En déduire que l'unique élément unitaire de I_A de degré d est π divisé par son coefficient dominant. On note ce polynôme π_A .

Pour la matrice nulle, on pose $\pi_0 = X$.

- 14) Déterminer π_M lorsque $M^2 + M - {}^tM = I_n$ et $M \neq I_n, M \neq -I_n$.

Partie IV — Propriétés spectrales des matrices normales

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale, f est l'endomorphisme représenté par A dans B_0 , et π_A est le polynôme défini dans la partie III.

15) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$. Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifier que $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \text{Ker}(f^* - \lambda \text{id})$. En déduire que les espaces propres de f et de f^* , s'ils existent, sont identiques.

16) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \text{Ker}(Q(f))$. Montrer que F est un sous-espace stable par f et f^* . Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f et f^* . Vérifier que f_F et $f_{F^\perp}$ sont normaux, respectivement sur F et $F^\perp$, et que $(f_F)^* = (f^*)_{F^\perp}$.

17) Recherche d'un sous-espace stable.

On désire montrer qu'il existe un sous-espace F , stable par f et f^* , de dimension 1 ou 2.

a) Premier cas : on suppose que π_A admet une racine réelle λ . Montrer qu'il existe $e \neq 0$ appartenant à $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$. Montrer que $F = \text{Vect}(e)$ convient.

Deuxième cas : on suppose maintenant que π_A n'admet pas de racine réelle.

b) Justifier l'existence de réels a, b tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + b \text{id}$ ne soit pas inversible. On note $G = \text{Ker}(f^2 + af + b \text{id})$ et $g = f_G$.

c) Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. On note e un vecteur propre de h .

d) Montrer que $F = \text{Vect}(e, f(e))$ convient.

18) Montrer qu'il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$M_C(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \rho_1 R_{\theta_1}, \dots, \rho_s R_{\theta_s}),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, $\rho_1, \dots, \rho_s \geq 0$, $\theta_1, \dots, \theta_s \in [0, 2\pi[$ et $p + 2s = n$. Les blocs hors diagonale sont nuls ; p ou s peut être nul.

- 19) Quelles sont les matrices normales A pour lesquelles π_A est un produit de facteurs de degré 1 sur $\mathbb{R}$?

Partie V — Étude d'un exemple

Dans cette partie, A est normale et inversible et vérifie $(A + I_n)^7 = A^7 + I_n$. On note $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- 20) Développer puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$. Préciser les multiplicités de ses facteurs unitaires de degré 1 et de son facteur unitaire de degré 2 sans racine réelle. On pourra utiliser le polynôme $X^2 + X + 1$.

- 21) Montrer que A est orthogonale, c'est-à-dire que ${}^tAA = I_n$.

- 22) Montrer que tA est un polynôme en A .

- 23) On suppose de plus que n est impair et que $A \neq -I_n$. Déterminer π_A .

Partie VI — Généralisation

Dans cette partie, A est normale et non nulle, f est l'endomorphisme canoniquement associé et π_A le polynôme défini à la question 13.

On désire démontrer que tA est un polynôme en A . Plus précisément, on cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que ${}^tA = P(A)$.

- 24) Quel polynôme P convient lorsque π_A est un produit de facteurs de degré 1 sur $\mathbb{R}$?

Dans la suite, on suppose que la factorisation réelle de π_A possède $t \geq 1$ facteurs unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle, notés

$$q_j = X^2 - 2a_jX + b_j, \quad b_j > a_j^2, \quad 1 \leq j \leq t.$$

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres réelles distinctes de A ; r peut être nul. Ainsi

$$\pi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k) \prod_{j=1}^t q_j.$$

D'après la question 18, une base orthonormée C permet de représenter f par des blocs scalaires associés aux λ_k et des blocs d'ordre 2 de la forme

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & c_j \\ -c_j & a_j \end{pmatrix}, \quad c_j^2 = b_j - a_j^2 > 0.$$

Chaque valeur scalaire et chaque type de bloc peut être répété. On peut choisir $c_j = \sqrt{b_j - a_j^2}$ en changeant, si nécessaire, le signe d'un vecteur de chaque base de bloc. Les blocs diagonaux ainsi répétés et les blocs hors diagonale nuls définissent $M_C(f)$.

25) Préciser $M_C(f^*)$.

26) Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $f^* = P(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $P(\lambda_k) = \lambda_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$;
- pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, le reste de la division euclidienne de P par q_j est $2a_j - X$.

On note

$$S = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k),$$

$$Q = \prod_{j=1}^t q_j$$

et $d = r + 2t = \deg \pi_A$. Un produit vide vaut 1 et une somme vide vaut 0.

Pour $1 \leq j \leq r$, on définit

$$L_j = \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq j}} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) \frac{Q}{Q(\lambda_j)}.$$

Pour $1 \leq j \leq t$, on pose $W_j = \pi_A / q_j$ et on note $\alpha_j X + \beta_j$ le reste de la division euclidienne de W_j par q_j . On pose

$$D_j = \beta_j^2 + 2a_j \alpha_j \beta_j + b_j \alpha_j^2,$$

$$U_j = \frac{-\alpha_j X + \beta_j + 2a_j \alpha_j}{D_j}, \quad E_j = W_j U_j.$$

Dans la question suivante, on justifiera que $(\alpha_j, \beta_j) \neq (0, 0)$ et $D_j > 0$, de sorte que ces définitions sont valables. Dire que deux polynômes sont congrus modulo q_j signifie que leur différence est divisible par q_j .

Enfin, on note

$$V = \sum_{k=1}^r \lambda_k L_k + \sum_{j=1}^t (2a_j - X) E_j$$

et P le reste de la division euclidienne de V par π_A .

- 27)** Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$, que $\deg P \leq n - 1$ et que ${}^t A = P(A)$. Pour justifier les définitions précédentes, on pourra d'abord vérifier que, pour $q = X^2 - 2aX + b$ avec $b > a^2$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, le polynôme $\alpha X + \beta$ possède un inverse modulo q donné par la formule définissant U_j .

28) Préciser P lorsque $\pi_A = X(X + 1)(X^2 + X + 1)$.