



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2014

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Matrices normales d'ordre 2

1) On calcule les deux produits, puis on identifie leurs coefficients.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}, \quad A^tA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est normale si et seulement si $c^2 = b^2$ et $(a - d)(b - c) = 0$.

Si $c = b$, la matrice est symétrique. Réciproquement, une matrice symétrique est normale, puisque les deux produits sont alors A^2 .

Si $c \neq b$, l'égalité $c^2 = b^2$ donne $c = -b$ avec $b \neq 0$, puis la seconde égalité donne $d = a$. Posons $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Le point $(a/\rho, b/\rho)$ appartient au cercle unité : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = a/\rho$ et $\sin \theta = b/\rho$. Par conséquent $A = \rho R_\theta$.

Réciproquement, les coefficients de ρR_θ vérifient $c = -b$ et $d = a$, donc les deux égalités caractérisant la normalité. On a bien l'équivalence demandée. La matrice nulle appartient au cas symétrique.

2) On distingue les deux formes obtenues à la question 1.

Si A est symétrique, ${}^tA = A$ et $P = X$ convient.

Sinon, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $A + {}^tA = 2aI_2$. Donc ${}^tA = 2aI_2 - A$: le polynôme $P = 2a - X$ convient.

Dans tous les cas, la transposée est un polynôme réel en A .

3) On commence par exclure le cas symétrique, puis on traite l'autre forme normale.

Si A est symétrique, le théorème spectral s'applique : elle possède une base de vecteurs propres et des valeurs propres réelles. Pour toute valeur propre λ , le polynôme

annulateur imposerait $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Or $\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. Ce cas est impossible.

Dans l'autre cas, écrivons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Alors

$$A^2 - A + I_2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - a + 1 & b(2a - 1) \\ -b(2a - 1) & a^2 - b^2 - a + 1 \end{pmatrix}.$$

L'annulation des coefficients donne $a = \frac{1}{2}$, puis $b^2 = \frac{3}{4}$. Les deux matrices sont donc

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Elles sont normales par la question 1 et vérifient l'équation par substitution. Ce sont $R_{\pi/3}$ et $R_{-\pi/3}$.

Partie II — L'endomorphisme f^*

4) Propriétés élémentaires.

a) La matrice de $(f^*)^*$ dans B_0 est ${}^t({}^tA) = A$. Ainsi $(f^*)^* = f$.

b) L'inversibilité de f équivaut à celle de A . On sait que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$. Par conséquent f^* est inversible et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

5) Caractérisation.

a) La colonne d'indice i de A est celle des coordonnées de $f(e_i)$. Ainsi

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k.$$

Comme B_0 est orthonormale, $\langle f(e_i) | e_j \rangle = a_{j,i}$.

b) Méthode 1 — Écriture matricielle.

Pour les colonnes X, Y de x, y , on a

$$\langle f(x) | y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = \langle x | f^*(y) \rangle.$$

Cette méthode utilise directement la définition matricielle de f^* .

Méthode 2 — Bilinearité dans la base canonique.

Écrivons

$$x = \sum_i x_i e_i$$

et

$$y = \sum_j y_j e_j.$$

Par la question a),

$$\langle f(x) | y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{j,i}.$$

Le coefficient d'indice i de $f^*(y)$ vaut

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} y_j.$$

Donc $\langle x | f^*(y) \rangle$ est la même somme finie. L'égalité est établie. Cette approche permet de retrouver la transposition à partir des coefficients.

c) L'existence est donnée par b). Pour l'unicité, supposons qu'un endomorphisme u vérifie aussi $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$ pour tous x, y . Alors

$$\langle x | u(y) - f^*(y) \rangle = 0.$$

Pour y fixé, choisissons $x = u(y) - f^*(y)$. On obtient $\|u(y) - f^*(y)\|^2 = 0$, donc $u(y) = f^*(y)$. L'égalité vaut pour tout y , ce qui prouve l'unicité.

6) Par la caractérisation de l'adjoint et la question 4 a),

$$\|f(x)\|^2 = \langle x | f^* f(x) \rangle, \quad \|f^*(x)\|^2 = \langle x | f f^*(x) \rangle.$$

La normalité donne $f^* f = f f^*$. Les carrés des normes sont donc égaux et, les normes étant positives ou nulles, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

7) On suit l'indication et on développe les carrés des normes.

Pour tous x, y , la linéarité et la bilinéarité donnent

$$\|g(x+y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + 2\langle g(x) | g(y) \rangle + \|g(y)\|^2.$$

L'identité correspondante pour g^* , ainsi que les égalités de normes en x, y et $x+y$, entraînent $\langle g(x) | g(y) \rangle = \langle g^*(x) | g^*(y) \rangle$.

Par la question 5 b), cela s'écrit $\langle x | (g^* g - g g^*)(y) \rangle = 0$. En prenant $x = (g^* g - g g^*)(y)$, on obtient $(g^* g - g g^*)(y) = 0$ pour tout y . Ainsi $g^* g = g g^*$: g est normal.

8) Soit C une base orthonormale et O la matrice dont les colonnes sont ses vecteurs exprimés dans B_0 . Le changement entre deux bases orthonormales donne $O^{-1} = {}^t O$.

La matrice de f dans C est $B = {}^tOAO$, et ${}^tB = {}^tO{}^tAO$.

Ainsi ${}^tBB = {}^tO{}^tAAO$ et $B{}^tB = {}^tOA{}^tAO$. Ces produits sont égaux puisque A est normale. Donc B est normale.

Les résultats admis après cette question permettent d'employer la même caractérisation de l'adjoint sur chaque sous-espace euclidien du problème. En particulier, les calculs de la question 6 restent valables dans un tel espace.

Partie III — Matrices normales et polynômes annulateurs

9) Méthode 1 — Réduction de la matrice symétrique S .

Puisque A commute avec tA , on a $S^p = ({}^tA)^p A^p = 0$. De plus, ${}^tS = S$. Le théorème spectral s'applique donc à S : elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Toute valeur propre σ satisfait $\sigma^p = 0$, donc $\sigma = 0$. Sa matrice diagonale est nulle, d'où $S = 0$.

Pour toute colonne réelle X , $\|AX\|^2 = {}^tX S X = 0$. Par conséquent $AX = 0$ pour tout X et $A = 0$.

Méthode 2 — Stabilisation des noyaux, sans réduction.

La question 6 donne $AX = 0$ si et seulement si ${}^tAX = 0$. Supposons $A^2X = 0$ et posons $Y = AX$. Alors $AY = 0$, donc ${}^tAY = 0$. Il vient

$$\|AX\|^2 = \langle X | {}^tAAX \rangle = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker } A$. Si $A^pX = 0$ avec $p \geq 2$, on applique cette égalité à $A^{p-2}X$ pour obtenir $A^{p-1}X = 0$, puis on descend jusqu'à $AX = 0$. Puisque $A^p = 0$, tous les vecteurs appartiennent à $\text{Ker } A$: $A = 0$, puis $S = 0$. L'identité $S^p = 0$ se vérifie comme dans la première méthode.

La première approche exploite une matrice symétrique ; la seconde montre directement pourquoi une matrice normale ne peut être non nulle et nilpotente.

10) Posons $B = P(A)$. Si

$$P = \sum_{k=0}^m p_k X^k,$$

avec tous les p_k réels, alors

$${}^tB = \sum_{k=0}^m p_k ({}^tA)^k = P({}^tA).$$

Comme A et tA commutent, toutes leurs puissances commutent entre elles, donc $P(A)$ et $P({}^tA)$ commutent. Ainsi B est normale.

L'hypothèse $P^q(A) = 0$ signifie $B^q = 0$. La question 9, appliquée à B , entraîne $B = 0$.
Donc $P(A) = 0$.

11) Il faut d'abord établir la normalité de M , puis produire l'annulateur.

L'hypothèse donne ${}^tM = M^2 + M - I_n$. La transposée étant un polynôme en M , elle commute avec M : M est normale.

En transposant l'égalité, on obtient $M = ({}^tM)^2 + {}^tM - I_n$. En remplaçant tM , il vient

$$0 = (M^2 + M - I_n)^2 + (M^2 + M - I_n) - I_n - M.$$

Le développement donne le polynôme annulateur

$$H = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X - 1)(X + 1)^3.$$

La factorisation se vérifie en développant $(X - 1)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$. En multipliant $H(M) = 0$ par $(M - I_n)^2$, on obtient $(M - I_n)^3(M + I_n)^3 = 0$.

Posons $T = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. La dernière relation est $T^3(M) = 0$. Comme M est normale, la question 10 donne $T(M) = 0$, donc $M^2 = I_n$.

Enfin, ${}^tM = M^2 + M - I_n = M$: M est symétrique.

12) Question adaptée au programme actuel.

On remplace la condition sur les racines par une condition sur la factorisation réelle ; aucune extension du domaine des scalaires n'est nécessaire.

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 . Les $n^2 + 1$ matrices $I_n, A, \dots, A^{n^2}$ sont donc liées. Il existe un polynôme réel non nul H tel que $H(A) = 0$. Ce polynôme n'est pas constant, car une constante non nulle évaluée en A donne un multiple non nul de I_n .

Factorisons

$$H = c \prod_{j=1}^m q_j^{\nu_j},$$

où $c \neq 0$, les q_j sont des facteurs unitaires distincts de degré 1 ou de degré 2 sans racine réelle, et les ν_j sont des entiers strictement positifs. Posons

$$P = \prod_{j=1}^m q_j$$

et $N = \max_j \nu_j$.

Le polynôme P^N est divisible par H , puisque chaque exposant N est au moins ν_j . Ainsi $P^N(A) = 0$. Par la question 10, $P(A) = 0$.

Le polynôme P est non constant et sans facteur répété. Cela établit l'existence demandée. Cette construction montre aussi que, de tout annulateur non nul H , on peut extraire un annulateur sans facteur répété de degré inférieur ou égal à $\deg H$.

13) Question adaptée au programme actuel.

Par la question 12, D_A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ; on peut donc définir $d = \min D_A$ et choisir $\pi \in I_A$ de degré d .

- a) Soit q un facteur unitaire de π et écrivons $\pi = qH$. Si $q(A)$ était inversible, l'égalité $q(A)H(A) = 0$ donnerait $H(A) = 0$.

Or H est non nul et sans facteur répété. Il ne peut pas être constant et annulateur. S'il est non constant, il appartient à I_A et son degré est strictement inférieur à d . Les deux cas sont impossibles. Donc $q(A)$ n'est pas inversible.

En particulier, si λ est une racine réelle de π , le facteur $q = X - \lambda$ apparaît dans π . La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ; son noyau contient donc un vecteur non nul. Ainsi λ est valeur propre réelle de A .

Réciproquement, si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, l'action d'un polynôme sur un vecteur propre donne $0 = \pi(A)X = \pi(\lambda)X$, donc $\pi(\lambda) = 0$. Les deux ensembles sont identiques.

b) Soit H un annulateur non nul quelconque. Par la construction de la question 12, il possède un annulateur sans facteur répété de degré au plus $\deg H$. La définition de d impose donc $\deg H \geq d$.

Divisons π par son coefficient dominant ; cela donne un annulateur unitaire $\hat{\pi} \in I_A$ de degré d . Si $\tilde{\pi} \in I_A$ est un autre annulateur unitaire de ce degré, alors $(\hat{\pi} - \tilde{\pi})(A) = 0$. Leur différence a un degré strictement inférieur à d si elle est non nulle, puisque leurs termes dominants s'annulent. Le résultat précédent l'interdit. Donc $\hat{\pi} = \tilde{\pi}$. On note cet unique polynôme π_A .

Une conséquence utile se démontre directement par division euclidienne. Pour tout annulateur H , écrivons $H = \pi_A T + R$, avec $R = 0$ ou $\deg R < d$. Alors $R(A) = 0$, donc $R = 0$. Ainsi π_A divise tout annulateur de A . Cette propriété vient d'être établie dans cet exercice ; elle n'est pas invoquée comme un théorème extérieur.

Pour $A = 0$, le choix $\pi_0 = X$ est cohérent : aucun polynôme constant non nul n'annule la matrice nulle, et un polynôme l'annule exactement lorsque son terme constant est nul.

14) Méthode 1 — Degré des annulateurs.

La question 11 donne $M^2 = I_n$, donc $X^2 - 1$ est un annulateur unitaire sans facteur répété de degré 2. Si un annulateur de degré 1 existait, on aurait $M = \lambda I_n$ pour un réel λ . L'égalité $M^2 = I_n$ imposerait $\lambda \in \{-1, 1\}$, contraire aux hypothèses. Le degré d vaut donc 2, et l'unicité de la question 13 donne $\pi_M = X^2 - 1$.

Méthode 2 — Espaces propres d'une matrice symétrique.

Par la question 11, M est symétrique, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Toutes ses valeurs propres valent 1 ou -1 , puisque $M^2 = I_n$. Si une seule de ces valeurs apparaissait, sa matrice diagonale serait I_n ou $-I_n$, et M aussi. Les deux valeurs apparaissent donc.

Tout annulateur doit s'annuler en 1 et en -1 ; il est donc divisible par $(X - 1)(X + 1)$. Comme ce dernier annule M , on retrouve $\pi_M = X^2 - 1$. La première méthode évite la réduction ; la seconde relie l'annulateur aux deux espaces propres.

Partie IV — Propriétés spectrales des matrices normales

15) La question 6 entraîne $f(x) = 0$ si et seulement si $f^*(x) = 0$, donc $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$.

Fixons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $u = f - \lambda \text{id}$. La caractérisation de l'adjoint donne $u^* = f^* - \lambda \text{id}$: pour tous x, y , les deux membres de l'identité définissant l'adjoint se déduisent de celle de f en retranchant $\lambda \langle x | y \rangle$.

Les compositions sont

$$u^*u = f^*f - \lambda(f^* + f) + \lambda^2 \text{id}, \quad uu^* = ff^* - \lambda(f^* + f) + \lambda^2 \text{id}.$$

La normalité de f entraîne celle de u . En lui appliquant la première étape, on obtient $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \text{Ker}(f^* - \lambda \text{id})$.

Ces noyaux étant précisément les espaces propres associés à λ lorsqu'ils sont non nuls, f et f^* ont les mêmes valeurs propres réelles et les mêmes espaces propres.

16) Le polynôme d'endomorphisme $Q(f)$ est linéaire, donc son noyau F est un sous-espace. Il commute avec f . Comme f^* commute avec f , il commute aussi avec chacune de ses puissances, donc avec $Q(f)$.

Si $x \in F$, alors $Q(f)f(x) = fQ(f)(x) = 0$ et $Q(f)f^*(x) = f^*Q(f)(x) = 0$. Ainsi F est stable par f et f^* .

Pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$, on a $\langle f(y) | x \rangle = \langle y | f^*(x) \rangle = 0$, puisque $f^*(x) \in F$. De même, $\langle f^*(y) | x \rangle = \langle y | f(x) \rangle = 0$. Donc $F^\perp$ est stable par les deux endomorphismes.

Pour tous $x, y \in F$, l'identité $\langle f_F(x) | y \rangle = \langle x | (f^*)_F(y) \rangle$ montre, par l'unicité admise de l'adjoint sur F , que $(f_F)^* = (f^*)_F$.

Toutes les compositions se restreignent alors à F , et

$f_F(f_F)^* = (ff^*)_F = (f^*f)_F = (f_F)^*f_F$. Donc f_F est normal. Le même argument sur $F^\perp$ prouve la normalité de $f_{F^\perp}$ et l'identité correspondante pour son adjoint.

17) Construction d'un sous-espace de dimension 1 ou 2.

a) Par la question 13 a), une racine réelle λ de π_A est valeur propre de f . Pour $A = 0$, cela est aussi vrai directement avec $\lambda = 0$. Il existe donc $e \neq 0$ tel que $f(e) = \lambda e$.

La question 15 donne également $f^*(e) = \lambda e$. La droite $F = \text{Vect}(e)$ est donc stable par f et f^* , et de dimension 1.

b) Si π_A n'a pas de racine réelle, sa factorisation réelle ne contient que des facteurs de degré 2 sans racine réelle. Il en existe au moins un puisque π_A est non constant. Choisissons $X^2 + aX + b$ parmi ces facteurs. Son absence de racine réelle équivaut à $a^2 - 4b < 0$.

La question 13 a) donne la non-inversibilité de $A^2 + aA + bI_n$, donc celle de $f^2 + af + b \text{id}$. Son noyau G est non nul. Par la question 16, G est stable par f et f^* , et $g = f_G$ est normal. On a sur G l'égalité $g^2 + ag + b \text{id}_G = 0$.

c) On a $h^* = (g + g^*)^* = g^* + g = h$. Cette identité se vérifie directement dans la relation définissant l'adjoint, par linéarité du produit scalaire.

Ainsi h est symétrique sur l'espace euclidien non nul G . Le théorème spectral assure sa diagonalisation dans une base orthonormée. Il possède en particulier un vecteur propre $e \neq 0$; notons $\mu \in \mathbb{R}$ sa valeur propre. Alors $g(e) + g^*(e) = \mu e$.

d) Puisque $e \in G$ et G est stable, $f(e) = g(e)$ et $f^*(e) = g^*(e)$. Les égalités précédentes donnent

$$f^2(e) = -af(e) - be, \quad f^*(e) = \mu e - f(e).$$

Les vecteurs e et $f(e)$ sont indépendants. Sinon, on aurait $f(e) = \eta e$ pour un réel η , puisque $e \neq 0$. La première égalité entraînerait $(\eta^2 + a\eta + b)e = 0$, donc $\eta^2 + a\eta + b = 0$, impossible lorsque $a^2 - 4b < 0$.

Ainsi $F = \text{Vect}(e, f(e))$ a dimension 2. Il est stable par f , puisque $f(e) \in F$ et $f^2(e) \in F$.

Pour la stabilité par f^* , on a déjà $f^*(e) \in F$. La normalité donne

$$f^*f(e) = ff^*(e) = \mu f(e) - f^2(e) = be + (\mu + a)f(e) \in F.$$

Les images des deux vecteurs d'une base de F appartiennent à F ; le sous-espace est donc stable par f^* . La construction demandée est achevée.

18) On procède par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien. Le résultat vaut en dimension 1, où tout endomorphisme a une matrice scalaire réelle dans une base orthonormée.

Supposons le résultat établi en toute dimension strictement inférieure à n . La question 17 fournit un sous-espace F de dimension 1 ou 2, stable par f et f^* . Cette construction s'applique dans tout espace euclidien en choisissant une base orthonormée; si l'endomorphisme est nul, n'importe quelle droite convient.

Le sous-espace $F^\perp$ est stable par les deux endomorphismes : pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, les égalités $\langle f(y) | x \rangle = \langle y | f^*(x) \rangle = 0$ et $\langle f^*(y) | x \rangle = \langle y | f(x) \rangle = 0$ le prouvent. Les restrictions à F et à $F^\perp$ sont normales, comme dans la question 16.

Si $\dim F = 1$, la restriction fournit un bloc scalaire λ . Si $\dim F = 2$, choisissons une base orthonormée de F : la matrice de la restriction est normale par le résultat sur l'adjoint. Par la question 1, elle est symétrique ou de la forme ρR_θ avec $\rho > 0$. Dans le cas symétrique, le théorème spectral permet de remplacer cette base par une base orthonormée de vecteurs propres, donnant deux blocs scalaires.

L'hypothèse de récurrence s'applique à $F^\perp$ lorsqu'il est non nul; s'il est nul, il n'y a aucun bloc à ajouter. La réunion des bases orthonormées de F et $F^\perp$ est une base

orthonormée de l'espace entier. La stabilité de ces sous-espaces rend les blocs hors diagonale nuls. En permutant les vecteurs, on regroupe les blocs scalaires, puis les blocs d'ordre 2.

Enfin, chaque angle peut être choisi dans $[0, 2\pi[$ par périodicité. On obtient bien

$$M_C(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \rho_1 R_{\theta_1}, \dots, \rho_s R_{\theta_s}), \quad p + 2s = n.$$

Précision utile pour la suite : identification réelle de π_A .

On peut incorporer aux blocs scalaires tous les blocs d'ordre 2 qui sont eux-mêmes

scalaires. Chaque bloc restant s'écrit $B = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$. On vérifie directement

$$B^2 - 2aB + (a^2 + c^2)I_2 = 0.$$

Le polynôme $q = X^2 - 2aX + a^2 + c^2 = (X - a)^2 + c^2$ n'a pas de racine réelle. Si un polynôme H annule ce bloc, effectuons sa division par q : $H = qT + uX + v$. Alors $0 = H(B) = uB + vI_2$. Le coefficient hors diagonale vaut uc ; comme $c \neq 0$, $u = 0$, puis $v = 0$. Ainsi q divise H .

Sur un bloc scalaire λ , l'annulation de H équivaut à $H(\lambda) = 0$, donc à la divisibilité par $X - \lambda$. Par conséquent le produit H_0 des facteurs distincts provenant de tous les blocs annule A , et tout annulateur est divisible par chacun de ces facteurs. La factorisation réelle impose donc sa divisibilité par leur produit H_0 .

Ainsi H_0 est l'annulateur unitaire sans facteur répété de plus petit degré : c'est π_A . Le degré de ce produit ne dépasse pas la somme des dimensions des blocs, donc $\deg \pi_A \leq n$. Cette identification justifie les notations de la partie VI sans résultat spectral extérieur au raisonnement précédent.

19) Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Décomposition explicite en vecteurs propres.

Supposons

$$\pi_A = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)$$

avec des réels distincts λ_j et $r \geq 1$. Définissons

$$\ell_j = \prod_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq j}} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}.$$

Les dénominateurs sont non nuls. On a $\ell_j(\lambda_k) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon. Le polynôme

$$\sum_j \ell_j - 1,$$

de degré au plus $r - 1$, a r racines distinctes ; il est donc nul.

Pour tout x , on obtient

$$x = \sum_{j=1}^r \ell_j(f)(x).$$

De plus, $(X - \lambda_j)\ell_j$ est un multiple de π_A , donc $(f - \lambda_j \text{id})\ell_j(f) = 0$. Chaque terme appartient à l'espace propre associé à λ_j .

La question 15 montre que f et f^* agissent tous deux par multiplication par λ_j sur cet espace. Comme les termes engendrent l'espace entier, $f = f^*$, donc A est symétrique.

Réciproquement, si A est symétrique, le théorème spectral donne une base orthonormée de vecteurs propres réels. Le produit des facteurs $X - \lambda$ pour ses valeurs propres distinctes l'annule. Par la divisibilité établie à la question 13 b), π_A divise ce produit, donc ne possède que des facteurs de degré 1.

Méthode 2 — Lecture des blocs de la question 18.

Un bloc d'ordre 2 non scalaire impose à tout annulateur le facteur $(X - a)^2 + c^2$, sans racine réelle, comme démontré à la question 18. Si π_A est un produit de facteurs de degré 1, aucun tel bloc ne peut apparaître. La matrice de f dans une base orthonormée est donc diagonale réelle.

Si O est la matrice du changement de base, $A = OD^tO$ avec D diagonale réelle ; en transposant, ${}^tA = O^tD^tO = A$. Ainsi A est symétrique.

Inversement, pour une matrice symétrique, le théorème spectral ne donne que des blocs scalaires ; l'identification de π_A à la question 18 donne un produit de facteurs de degré 1.

La réponse est donc exactement l'ensemble des matrices symétriques réelles, y compris la matrice nulle. La première méthode construit la décomposition à partir du polynôme ; la seconde utilise la forme des blocs déjà obtenue.

Partie V — Étude d'un exemple

20) Question adaptée au programme actuel.

La formule du binôme donne

$$P = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X.$$

Posons $q = X^2 + X + 1$. Son carré vaut $q^2 = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. En multipliant par $X(X + 1) = X^2 + X$, on obtient

$$X(X + 1)q^2 = X^6 + 3X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X.$$

Par conséquent

$$P = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2.$$

Le facteur $q = (X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ n'a pas de racine réelle. Les trois facteurs unitaires X , $X + 1$ et q sont distincts, avec $q(0) = q(-1) = 1$. Les facteurs de degré 1 ont chacun multiplicité 1 ; le facteur de degré 2 a multiplicité 2.

21) La relation imposée à A signifie $P(A) = 0$. Posons $T = X(X + 1)(X^2 + X + 1)$.

D'après la factorisation précédente, $T^2 = P X(X + 1)/7$, donc $T^2(A) = 0$.

La matrice A étant normale, la question 10 donne $T(A) = 0$. Comme A est inversible, on peut multiplier par A^{-1} , et il reste

$$(A + I_n)(A^2 + A + I_n) = 0.$$

Utilisons la base orthonormée de la question 18. Chaque bloc scalaire λ est non nul par l'inversibilité et vérifie $(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$. Le second facteur étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, $\lambda = -1$.

Sur un bloc non scalaire $B = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$, avec $c \neq 0$, la matrice $B + I_2$ est inversible. En

effet, si $(B + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, les équations sont $(a + 1)x + cy = 0$ et $-cx + (a + 1)y = 0$. Leur combinaison donne $((a + 1)^2 + c^2)x = 0$ puis $y = 0$; le coefficient est strictement positif.

L'équation du bloc entraîne donc $B^2 + B + I_2 = 0$. Ses coefficients donnent $c(2a + 1) = 0$, donc $a = -\frac{1}{2}$, puis $a^2 - c^2 + a + 1 = 0$, donc $c^2 = \frac{3}{4}$.

Ainsi ${}^tBB = (a^2 + c^2)I_2 = I_2$. Le bloc scalaire -1 vérifie lui aussi cette identité. Tous les blocs de $M_C(f)$ sont donc orthogonaux. Si $A = OD^tO$, alors

$${}^tAA = O^tDD^tO = O^tO = I_n.$$

La matrice A est orthogonale, comme demandé.

22) L'équation obtenue à la question 21 se développe en $A^3 + 2A^2 + 2A + I_n = 0$.

Comme A est inversible, on multiplie par A^{-1} :

$$A^{-1} = -A^2 - 2A - 2I_n.$$

Par la question 21, ${}^tAA = I_n$, donc ${}^tA = A^{-1}$. Finalement

$${}^tA = -A^2 - 2A - 2I_n.$$

Le polynôme $-X^2 - 2X - 2$ convient.

- 23) La question 21 montre que seuls les blocs scalaires -1 et les blocs non scalaires annulés par $q = X^2 + X + 1$ peuvent apparaître.

Si n est impair, le nombre de dimensions occupées par les blocs d'ordre 2 est pair ; il existe donc au moins un bloc scalaire, nécessairement -1 . Le facteur $X + 1$ figure dans π_A .

Si aucun bloc d'ordre 2 non scalaire n'apparaissait, tous les blocs seraient -1 , donc $A = -I_n$. L'hypothèse $A \neq -I_n$ impose donc au moins un bloc non scalaire, et le facteur q figure aussi dans π_A .

L'identification établie à la question 18 donne donc

$$\pi_A = (X + 1)(X^2 + X + 1).$$

En dimension 1, les deux hypothèses supplémentaires sont incompatibles avec la relation de départ ; lorsqu'une telle matrice existe, sa dimension impaire est au moins 3.

Partie VI — Généralisation

- 24) Question adaptée au programme actuel.

Par la question 19, la condition sur la factorisation de π_A équivaut à la symétrie de A . On a donc ${}^tA = A$; le polynôme $P = X$ convient lorsque $n \geq 2$, car son degré 1 est alors inférieur ou égal à $n - 1$.

Si $n = 1$, écrivons $A = (\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$, puisque cette partie suppose A non nulle. Le polynôme constant $P = \lambda$, de degré $0 = n - 1$, donne $P(A) = A = {}^tA$.

On peut aussi faire un choix uniforme : prendre le reste de la division de X par π_A . Ce reste a degré strictement inférieur à $\deg \pi_A \leq n$ et donne la même matrice que X , puisque $\pi_A(A) = 0$.

Dans la suite, les données réelles de la partie VI proviennent des blocs établis à la

question 18. Pour $B_j = \begin{pmatrix} a_j & c_j \\ -c_j & a_j \end{pmatrix}$, on a $b_j = a_j^2 + c_j^2$ et $q_j(B_j) = 0$. Le remplacement

éventuel d'un vecteur par son opposé conjugue ce bloc par $\text{diag}(1, -1)$ et change le signe de c_j . Ainsi on peut choisir $c_j > 0$ sans changer a_j, b_j ou q_j .

25) Question adaptée au programme actuel.

Dans toute base orthonormée, la matrice de l'adjoint est la transposée. Par conséquent $M_C(f^*)$ possède les mêmes emplacements et les mêmes répétitions de blocs que $M_C(f)$:

- un bloc scalaire λ_k reste λ_k ;
- un bloc B_j est remplacé par

$${}^t(B_j) = \begin{pmatrix} a_j & -c_j \\ c_j & a_j \end{pmatrix} = 2a_j I_2 - B_j.$$

Tous les blocs hors diagonale restent nuls. Cette description précise intégralement $M_C(f^*)$.

26) Question adaptée au programme actuel.

Les puissances d'une matrice diagonale par blocs s'obtiennent en prenant les puissances de chaque bloc ; il en va de même pour tout polynôme. L'égalité $f^* = P(f)$ équivaut donc à l'égalité sur chaque type de bloc.

Sur un bloc scalaire λ_k , cette égalité est $P(\lambda_k) = \lambda_k$.

Fixons un bloc B_j . Effectuons la division euclidienne $P = q_j T_j + u_j X + v_j$. Comme $q_j(B_j) = 0$, on a $P(B_j) = u_j B_j + v_j I_2$. L'égalité avec ${}^t(B_j) = 2a_j I_2 - B_j$ est donc

$$(u_j + 1)B_j + (v_j - 2a_j)I_2 = 0.$$

Le coefficient hors diagonale donne $(u_j + 1)c_j = 0$. Comme $c_j \neq 0$, $u_j = -1$. Les coefficients diagonaux donnent ensuite $v_j = 2a_j$.

Réciproquement, si le reste est $2a_j - X$, son évaluation en B_j vaut ${}^t(B_j)$. En ajoutant les conditions sur les blocs scalaires, on obtient l'égalité sur toute la matrice. Les répétitions de blocs n'ajoutent aucune condition.

Ainsi $f^* = P(f)$ si et seulement si $P(\lambda_k) = \lambda_k$ pour chaque valeur propre réelle et $P \equiv 2a_j - X$ modulo chaque q_j .

27) Question adaptée au programme actuel.

On construit le polynôme réel demandé à l'aide de divisions euclidiennes et d'inverses explicitement vérifiés. Toutes les congruences ci-dessous sont des congruences entre polynômes réels.

Étape 1 — Inverse d'un reste linéaire modulo un facteur de degré 2.

Soient $q = X^2 - 2aX + b$ avec $b > a^2$ et $H = \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Posons

$$D = \beta^2 + 2a\alpha\beta + b\alpha^2 = (\beta + a\alpha)^2 + (b - a^2)\alpha^2.$$

Si $\alpha \neq 0$, le second terme est strictement positif. Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et $D = \beta^2 > 0$. Dans tous les cas $D > 0$.

Le développement donne

$$(\alpha X + \beta)(-\alpha X + \beta + 2a\alpha) = -\alpha^2 X^2 + 2a\alpha^2 X + \beta^2 + 2a\alpha\beta.$$

Or $X^2 \equiv 2aX - b$ modulo q . Le membre de droite est donc congru à $b\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha\beta = D$. Par conséquent

$$(\alpha X + \beta) \frac{-\alpha X + \beta + 2a\alpha}{D} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Cette formule établit l'inverse annoncé par un calcul explicite.

Étape 2 — Validité des définitions de U_j et E_j .

Fixons j . Le polynôme $W_j = \pi_A/q_j$ est le produit des facteurs linéaires $X - \lambda_k$ et des facteurs q_ℓ avec $\ell \neq j$.

Le reste de $X - \lambda_k$ modulo q_j est ce même polynôme linéaire non nul. Il possède donc un inverse modulo q_j par l'étape 1.

Le reste de q_ℓ modulo q_j vaut

$$2(a_j - a_\ell)X + (b_\ell - b_j).$$

Ce reste est non nul, car un reste nul imposerait $a_j = a_\ell$ et $b_j = b_\ell$, donc $q_j = q_\ell$, contrairement à la distinction des facteurs. Il possède lui aussi un inverse modulo q_j .

En multipliant les inverses ainsi construits, on obtient un polynôme Z tel que $W_j Z \equiv 1$ modulo q_j . Les congruences sont compatibles avec la multiplication, puisque la différence de deux produits congrus est encore divisible par q_j . Si le reste de W_j était nul, on aurait $W_j Z \equiv 0$, ce qui imposerait que q_j divise la constante 1, impossible. Donc $(\alpha_j, \beta_j) \neq (0, 0)$.

L'étape 1 donne alors $D_j > 0$, et U_j est bien défini à coefficients réels. Elle donne aussi $W_j U_j \equiv 1$ modulo q_j , donc $E_j \equiv 1$ modulo q_j .

Si $\ell \neq j$, le polynôme W_j contient le facteur q_ℓ , donc $E_j \equiv 0$ modulo q_ℓ . De même, $E_j(\lambda_k) = 0$ pour chaque k , puisque W_j contient $X - \lambda_k$.

Ces conclusions restent valables lorsque certains produits sont vides : le produit vide vaut 1, qui possède son propre inverse.

Étape 3 — Propriétés des L_k .

Les valeurs propres réelles sont distinctes, donc $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$ pour $j \neq k$. Chaque facteur q_ℓ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, car

$$q_\ell(x) = (x - a_\ell)^2 + b_\ell - a_\ell^2 > 0.$$

Ainsi $Q(\lambda_j) > 0$ et les L_j sont bien définis à coefficients réels. Leur expression donne $L_j(\lambda_k) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon. De plus, L_j contient le facteur Q , donc son reste modulo chaque q_ℓ est nul.

Étape 4 — Vérification des conditions pour V .

Le polynôme

$$V = \sum_k \lambda_k L_k + \sum_j (2a_j - X) E_j$$

est réel. Pour toute valeur propre réelle λ_k , les identités des étapes 2 et 3 donnent $V(\lambda_k) = \lambda_k$.

Modulo q_j , tous les L_k et tous les E_ℓ avec $\ell \neq j$ ont un reste nul, tandis que $E_j \equiv 1$. Donc

$$V \equiv 2a_j - X \pmod{q_j}.$$

Étape 5 — Réduction du degré et conclusion matricielle.

Écrivons $V = \pi_A T + P$, où P est le reste. La division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ donne $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P = 0$ ou $\deg P < d$.

Puisque chaque $X - \lambda_k$ et chaque q_j divise π_A , les différences $V - P$ s'annulent en chaque λ_k et sont divisibles par chaque q_j . Ainsi P satisfait les mêmes conditions que V à la question 26. Il en résulte $f^* = P(f)$, donc ${}^t A = P(A)$ dans la base canonique.

La question 18 a montré que $d = \deg \pi_A \leq n$. De plus, P ne peut pas être nul, puisque A est non nulle et ${}^t A = P(A)$. On a donc $\deg P \leq d - 1 \leq n - 1$.

Le résultat annoncé dans le préambule de la partie VI est entièrement démontré avec des opérations sur des polynômes réels.

28) Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Résolution des conditions sur les restes.

On a $\pi_A = X(X+1)q$, avec $q = X^2 + X + 1 = X^2 - 2aX + b$, donc $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$. Le polynôme construit à la question 27 est de degré au plus 3 et satisfait

$$P(0) = 0, \quad P(-1) = -1, \quad P \equiv -1 - X \pmod{q}.$$

Écrivons $P = uX^3 + vX^2 + wX$; le terme constant est nul par $P(0) = 0$. Modulo q , on a $X^2 \equiv -X - 1$ et

$$X^3 \equiv -X^2 - X \equiv 1.$$

Le reste de P est donc $(w - v)X + (u - v)$. En l'identifiant à $-X - 1$, on obtient $w - v = -1$ et $u - v = -1$. Par ailleurs, $P(-1) = -u + v - w = -1$.

Les deux premières égalités donnent $v = u + 1$ et $w = u$. La troisième devient $1 - u = -1$, donc $u = 2$, $v = 3$ et $w = 2$. Ainsi

$$P = 2X^3 + 3X^2 + 2X.$$

La vérification est immédiate à partir des calculs établis : $P(0) = 0$, $P(-1) = -2 + 3 - 2 = -1$ et son reste modulo q est $-X - 1$. La question 26 entraîne ${}^tA = 2A^3 + 3A^2 + 2A$.

Méthode 2 — Application directe de la construction de la question 27.

On prend les valeurs réelles 0 et -1 ; $Q = q$ et $q(0) = q(-1) = 1$. Les polynômes correspondants sont

$$L_0 = (X + 1)q, \quad L_{-1} = -Xq.$$

La contribution des valeurs propres réelles à V est $0L_0 + (-1)L_{-1} = Xq$.

Pour le seul facteur de degré 2, on a $W = X(X + 1) = X^2 + X \equiv -1$ modulo q . Ainsi $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $D = 1$, $U = -1$ et $E = -X(X + 1)$.

La contribution de ce facteur vaut $(2a - X)E = (-1 - X)(-X(X + 1)) = X(X + 1)^2$. On en déduit

$$V = Xq + X(X + 1)^2 = X((X^2 + X + 1) + (X^2 + 2X + 1)) = 2X^3 + 3X^2 + 2X.$$

Comme $\deg V = 3 < \deg \pi_A = 4$, le reste P est exactement V . On retrouve donc le

même polynôme et la même égalité matricielle.

La première méthode est efficace pour calculer les coefficients d'un petit degré ; la seconde montre concrètement le rôle des polynômes interpolateurs réels.

Relevé des adaptations

- 12 : remplacement de la condition originale sur les racines par l'absence de facteur répété dans la factorisation réelle en degrés 1 et 2. Le résultat est démontré par la question 10.
- 13 a) : remplacement de l'identification des valeurs propres hors du domaine réel par la non-inversibilité de $q(A)$ pour chaque facteur réel de degré 1 ou 2 ; identification des valeurs propres réelles conservée.
- 13 b) et préambule suivant : remplacement de la formule faisant intervenir des scalaires hors du domaine réel par une preuve d'unicité utilisant les degrés des annulateurs. La convention $\pi_0 = X$ précise le cas de la matrice nulle, autorisé dans la partie IV.
- 19 : remplacement de la condition sur toutes les racines par la factorisation en facteurs réels de degré 1, avec la même caractérisation finale des matrices symétriques.
- 20 : remplacement de la recherche de racines communes et de la factorisation hors du domaine réel par le développement, la factorisation réelle et l'identification des multiplicités. Les informations utiles aux questions 21 à 23 sont préservées.
- 24 : reformulation réelle de la condition sur π_A ; prise en compte explicite de la borne de degré en dimension 1 dans le corrigé.
- 25 et préambule de la partie VI : description des blocs par des matrices réelles B_j et des facteurs q_j distincts, avec leurs répétitions précisées.

- 26 : remplacement des conditions d'interpolation hors du domaine réel par des conditions sur les valeurs propres réelles et les restes modulo les facteurs q_j .
- 27 et préambule associé : remplacement des polynômes interpolateurs hors du domaine réel par les polynômes réels L_j , U_j et E_j . Les inverses employés sont explicitement vérifiés et le polynôme est réduit modulo π_A pour respecter la borne de degré.
- 28 : calcul du polynôme à partir des conditions réelles adaptées ; la donnée $\pi_A = X(X + 1)(X^2 + X + 1)$ et l'objectif de la question sont conservés.