



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2013

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On pose $E_0 = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}\}$. Si $f \in E_0$, on note $N_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I — Construction de la fonction arctan

On définit, sous réserve d'existence, la fonction $\arctan : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

- 1) Vérifier que la fonction $\arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser une expression de $\frac{d}{dx}(\arctan)$.
- 2) Montrer que $\arctan$ admet une limite finie, notée provisoirement L , en $+\infty$ et justifier que $\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -L, L[$.
- 3) Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, calculer $\arctan[\tan(x)]$; en déduire la valeur de L .
- 4) Justifier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.
- 5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$.

L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ .

Partie II — Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ

- 6) Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 7) Soit $f \in E_0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ est absolument convergente.

8) Soit $f \in E_0$. Montrer que $\Phi(f)$ est bornée et que $N_0[\Phi(f)] \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$.

9) Continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$.

Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.

9.a) Soient $A > 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que :

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right).$$

9.b) En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ et tout $A > 0$:

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(|h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right).$$

9.c) Soit $h \in \mathbb{R}^*$. En choisissant $A = \frac{1}{|h|}$, établir :

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq |h| \frac{N_0(f)}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi N_0(f) \arctan |h|.$$

9.d) Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

9.e) En déduire que $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0 .

Partie III — Étude d'un exemple

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt.$$

g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1.

10) Vérifier que g est impaire.

11) Dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$. Soit x un réel strictement positif.

11.a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$.

11.b) Soient a et b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b . Montrer que :

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \frac{1}{1+u^2}.$$

11.c) Soient $h \in]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}[$ et $t \geq 0$. Établir :

$$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

11.d) Montrer alors que, pour tout $h \in]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}[$:

$$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

11.e) En déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

11.f) g est-elle dérivable sur $] -\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

12) Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

12.a) Déterminer $g'(1)$.

12.b) Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de t , telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}.$$

12.c) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

12.d) g est-elle de classe C^1 sur $]0, +\infty[$?

13) Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

13.a) Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$. À $t = 1$, on interprète l'intégrande par son prolongement par continuité, dont on déterminera la valeur.

13.b) Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt.$$

14) Étude de la limite de g en $+\infty$.

14.a) Démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

14.b) Écrire, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{1/\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2} + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

et montrer alors que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

14.c) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

15) Application au calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

15.a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes. Au point $t = 1$, l'intégrande est prolongé par continuité.

15.b) Vérifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$. On pourra utiliser le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale sur $[1, +\infty[$.

15.c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt.$$

On justifiera l'existence des intégrales introduites.

15.d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^{2n} \ln t dt$.

15.e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt = 0$.

15.f) Donner alors la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire celle de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Partie IV — Retour à l'étude de Φ

16) Montrer que $\sup_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$; on pourra poser $\gamma = \frac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ^n est l'itérée de Φ : $\Phi^0 = \text{id}_{E_0}$ et $\Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$.
- $f \in E_0 \setminus \{0\}$; on posera $M = N_0(f)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$, avec $\lambda^0 = 1$, y compris si $\lambda = 0$.

17) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \lambda \Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n)$.

18) Peut-on avoir $\lambda \Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi$?

19) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ et que la série

$$\sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n)$$

converge. On convient de prendre $\gamma^0 = 1$, y compris si $\gamma = 0$.

20) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x)$$

converge.

On note alors

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x).$$

21) Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

22) Continuité de φ .

22.a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right].$$

22.b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| &\leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right] \\ &\quad + |f(x+h) - f(x)|. \end{aligned}$$

22.c) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

23) Application aux valeurs spectrales de Φ .

23.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right)$$

et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_0 \left[(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right) - f \right] = 0.$$

23.b) Montrer alors que $(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi$?

23.c) Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu \text{id}_{E_0}$ ne soit pas bijective. Montrer que $|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}$.