



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2013

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Construction de la fonction arctan

1) Définition, parité et dérivées

La fonction $q : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car son dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc intégrable sur tout segment. L'intégrale orientée $\int_0^x q(t) dt$ définit bien $\arctan x$ pour chaque réel x .

Le changement de variable affine $t = -u$ donne

$$\arctan(-x) = - \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = -\arctan x. \text{ La fonction est impaire.}$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, $\arctan$ est dérivable et

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La fonction q est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales avec un dénominateur partout non nul. Ainsi $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Limite et bijection

Pour $x \geq 1$, la positivité de l'intégrande et la comparaison $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ pour $t \geq 1$ donnent :

$$0 \leq \arctan x = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{t^2} \leq 2.$$

Comme $\arctan'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante. Sur $[0, +\infty[$, elle est croissante et majorée; elle admet donc une limite finie L . De plus $L \geq \arctan 1 > 0$.

L'imparité donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -L$. Pour tout réel x , la stricte croissance implique $\arctan x < \arctan(x+1) \leq L$, puis, par imparité, $-L < \arctan x$. Enfin, la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires assurent que chaque réel de $] -L, L[$ est atteint. La stricte croissance assure l'unicité de l'antécédent. Ainsi $\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -L, L[$.

3) Relation avec la tangente

Sur $J =] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, la fonction $F(x) = \arctan(\tan x)$ est dérivable et :

$$F'(x) = \frac{\tan'(x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1.$$

Comme $F(0) = 0$, l'égalité des accroissements finis appliquée à $F(x) - x$ donne $F(x) = x$ pour tout $x \in J$.

Lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\tan x \rightarrow +\infty$. Le membre de gauche tend vers L , et le membre de droite vers $\frac{\pi}{2}$. Ainsi $L = \frac{\pi}{2}$ et $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ pour tout réel x .

4) Majoration des accroissements

Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis

La fonction $\arctan$ est continue sur le segment d'extrémités x, y et dérivable à l'intérieur. Sa dérivée vérifie $0 < \arctan'(u) \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis donne donc $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$. Si $x = y$, les deux membres sont nuls.

Méthode 2 — Représentation intégrale

Si $x \geq y$, la relation de Chasles donne $\arctan x - \arctan y = \int_y^x \frac{dt}{1+t^2}$. L'intégrande appartient à $]0, 1]$, donc $0 \leq \arctan x - \arctan y \leq x - y$. Si $x < y$, on échange les deux réels et on obtient la même inégalité en valeur absolue.

La première méthode s'applique dès que la dérivée est bornée ; la seconde exploite directement la définition par une intégrale.

5) Identité pour les arguments réciproques

Méthode 1 — Dérivée d'une somme

Pour $x > 0$, posons $H(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$. La dérivation composée donne :

$$H'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+1/x^2} = 0.$$

La fonction H est donc constante sur $]0, +\infty[$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(1/x) \rightarrow 0$. Ainsi $H(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Angles complémentaires

Posons $\theta = \arctan x$. D'après la question 3 et la bijectivité de la tangente sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan \theta = x$. Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 1/x$. L'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ appartient lui aussi à $]0, \frac{\pi}{2}[$; la question 3 donne donc $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \theta$. On retrouve l'identité demandée.

La dérivation est utile pour établir une identité sans choisir d'angle ; l'approche trigonométrique explique sa signification géométrique.

Partie II — Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ

6) Structure de E_0

La fonction nulle est continue et bornée, donc appartient à E_0 . Si $f, g \in E_0$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $af + bg$ est continue et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|af(x) + bg(x)| \leq |a|N_0(f) + |b|N_0(g).$$

Cette borne ne dépend pas de x , donc $af + bg \in E_0$. Ainsi E_0 est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On utilisera aussi les propriétés directement issues de la définition : $N_0(af) = |a|N_0(f)$, $N_0(f+g) \leq N_0(f) + N_0(g)$, et $N_0(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$.

7) Convergence absolue

Pour $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$ et :

$$\left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{N_0(f)}{1+t^2}.$$

Or, d'après les questions 1 à 3, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. La comparaison avec cette intégrale positive convergente établit la convergence absolue de l'intégrale définissant $\Phi(f)(x)$, pour tout réel x .

8) Borne de $\Phi(f)$

La convergence absolue établie permet de majorer l'intégrale en valeur absolue :

$$|\Phi(f)(x)| \leq \frac{\pi}{2} N_0(f) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4} N_0(f).$$

Cette borne est indépendante de x . Ainsi $\Phi(f)$ est bornée et $N_0[\Phi(f)] \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$. La continuité sera établie à la question 9.

9.a) Découpage de l'intégrale

Les deux intégrales définissant $\Phi(f)(x+h)$ et $\Phi(f)(x)$ sont absolument convergentes. Leur différence vaut donc :

$$\int_0^{+\infty} [\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)] \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

On découpe en $A > 0$ par Chasles, puis on applique l'inégalité triangulaire pour les intégrales et $|f(t)| \leq N_0(f)$. Cela donne exactement :

$$\begin{aligned} & |\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \\ & \leq N_0(f) \left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right). \end{aligned}$$

Les intégrales du membre de droite existent par comparaison avec $\frac{\pi}{1+t^2}$.

9.b) Deux majorations adaptées aux deux intervalles

Sur $[0, A]$, la question 4 donne $|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leq t|h|$.

Sur $[A, +\infty[$, les deux arctangentes appartiennent à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc leur différence a une valeur absolue inférieure à π .

En remplaçant séparément dans la majoration de 9.a, on obtient :

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left(|h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right).$$

9.c) Choix de A

Les primitives usuelles donnent $\int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+A^2)$ et

$$\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan A.$$

Pour $h \neq 0$, le choix $A = 1/|h|$ et la question 5 donnent $\frac{\pi}{2} - \arctan(1/|h|) = \arctan |h|$.
Ainsi :

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right].$$

9.d) Continuité

Méthode 1 — Utiliser la borne explicite

Pour $r = |h| > 0$, on a $r \ln(1+r^{-2}) = r \ln(1+r^2) - 2r \ln r$. Lorsque $r \rightarrow 0$, le premier terme tend vers zéro par continuité du logarithme, et le second par la croissance comparée $r \ln r \rightarrow 0$. De plus $\arctan r \rightarrow 0$.

Le membre de droite de 9.c tend donc vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x+h) \rightarrow \Phi(f)(x)$; ainsi $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La majoration étant indépendante de x , elle établit même la continuité uniforme.

Méthode 2 — Choisir d'abord la queue, puis l'accroissement

Si $N_0(f) = 0$, la fonction $\Phi(f)$ est nulle et la conclusion est immédiate. Sinon, fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de l'intégrale de $\frac{1}{1+t^2}$ permet de choisir $A > 0$ tel que

$$\pi N_0(f) \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} < \varepsilon/2.$$

Pour cet A fixé, posons $C_A = N_0(f) \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt > 0$ et choisissons $\delta = \varepsilon/(2C_A)$. Si $0 < |h| < \delta$, la question 9.b donne $|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| < \varepsilon$, pour tout x . Pour $h = 0$, la différence est nulle. Cela démontre directement la continuité.

La première méthode fournit un module explicite; la seconde illustre un découpage réutilisable lorsqu'on ne peut pas optimiser A .

9.e) Endomorphisme

Les questions 8 et 9.d montrent que $\Phi(f) \in E_0$ pour tout $f \in E_0$.

Pour $f, g \in E_0$ et $a, b \in \mathbb{R}$, toutes les intégrales considérées convergent absolument par 7. Leur linéarité donne, pour chaque réel x , $\Phi(af + bg)(x) = a\Phi(f)(x) + b\Phi(g)(x)$. Ainsi Φ est une application linéaire de E_0 dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de E_0 .

Partie III — Étude d'un exemple

10) Imparité de g

Les intégrales définissant $g(x)$ et $g(-x)$ existent par la question 7 appliquée à la fonction

constante 1. L'imparité de l'arctangente donne :

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = -g(x).$$

Ainsi g est impaire et $g(0) = 0$. Les questions 8 et 9 montrent également que g est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.

11.a) Borne de la dérivée seconde

En dérivant la formule de la question 1, on obtient $\arctan''(u) = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$.

L'inégalité $(|u| - 1)^2 \geq 0$ donne $2|u| \leq 1 + u^2$. En divisant par le nombre strictement positif $(1 + u^2)^2$, on en déduit $|\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1 + u^2}$, pour tout réel u .

11.b) Reste de Taylor

La fonction $\arctan$ est de classe C^2 sur un ouvert contenant le segment I d'extrémités a, b . L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre un donne :

$$|\arctan b - \arctan a - (b - a) \arctan'(a)| \leq \frac{|b - a|^2}{2} \max_{u \in I} |\arctan''(u)|.$$

La dérivée seconde est continue, donc le maximum existe sur le segment. En utilisant 11.a et $\arctan'(a) = 1/(1 + a^2)$, on obtient l'inégalité demandée. Elle reste valable quelle que soit l'orientation du segment.

11.c) Application aux arguments tx et $t(x + h)$

Si $t = 0$ ou $h = 0$, les deux membres sont nuls. Sinon, on applique 11.b à $a = tx$ et $b = t(x + h)$.

Comme $|h| < x/2$ et $x > 0$, on a $x + h > x/2$. Chaque réel u du segment d'extrémités tx et $t(x + h)$ vérifie donc $u \geq tx/2$. Ainsi $\frac{1}{1 + u^2} \leq \frac{1}{1 + t^2 x^2 / 4}$.

Comme $b - a = th$, la conclusion de 11.b devient :

$$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2(1+t^2x^2/4)}.$$

11.d) Intégration du reste

Pour $x > 0$ fixé, introduisons :

$$J_x = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt, \text{ et } K_x = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

Les deux intégrandes sont continus et positifs sur $[0, +\infty[$. Pour $t \geq 1$, ils sont respectivement majorés par $1/(x^2t^3)$ et $1/(x^2t^2)$. Les intégrales de référence correspondantes convergent à l'infini. Ainsi J_x et K_x sont finis.

Divisons l'inégalité de 11.c par $1+t^2$ et intégrons d'abord sur $[0, R]$. Le coefficient du membre de droite se simplifie selon :

$$\frac{t^2h^2}{2(1+t^2x^2/4)(1+t^2)} = 2h^2 \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)}.$$

Toutes les intégrales du membre de gauche convergent, ainsi que celle du membre de droite. Le passage à la limite $R \rightarrow +\infty$ est donc permis et donne $|g(x+h) - g(x) - hJ_x| \leq 2h^2K_x$, soit l'inégalité demandée.

11.e) Dérivabilité sur les réels strictement positifs

Pour $0 < |h| < x/2$, l'inégalité précédente donne :

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - J_x \right| \leq 2|h|K_x.$$

Comme K_x est fini et indépendant de h , le membre de droite tend vers zéro. Le taux d'accroissement tend donc vers J_x . Ainsi g est dérivable en tout $x > 0$, avec :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

La démonstration utilise une estimation du reste et ne suppose aucun théorème de dérivation sous une intégrale impropre.

11.f) Dérivabilité sur les réels strictement négatifs

Fixons $x < 0$ et posons $y = -x > 0$. Par imparité, pour h assez petit :

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{-g(y-h) + g(y)}{h} = \frac{g(y-h) - g(y)}{-h}.$$

Le dernier quotient tend vers $g'(y)$ lorsque $h \rightarrow 0$, d'après 11.e. Ainsi g est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et $g'(x) = g'(-x)$. Puisque $(-x)^2 = x^2$, on a également :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \quad (x < 0).$$

Aucune dérivabilité à l'origine n'est affirmée ici.

12.a) Valeur en 1

La question 11.e donne $g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$. Sur tout segment, une primitive de cet intégrande est $-\frac{1}{2(1+t^2)}$. Ainsi :

$$\int_0^R \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+R^2)}.$$

En passant à la limite, $g'(1) = \frac{1}{2}$.

12.b) Décomposition de la fraction

Fixons $x > 0$ avec $x \neq 1$. Après multiplication par $(1+t^2x^2)(1+t^2)$, l'égalité recherchée équivaut, pour tout $t \neq 0$, à :

$$1 = A(x)(1+t^2) + B(x)(1+t^2x^2).$$

L'identification des coefficients donne $A(x) + B(x) = 1$ et $A(x) + x^2B(x) = 0$. Puisque $x^2 - 1 \neq 0$, ce système a pour solution :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad B(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Ces valeurs vérifient l'identité pour tout $t \neq 0$; pour $t = 0$, les deux membres de la décomposition initiale valent zéro. La décomposition est donc valable sur $\mathbb{R}$.

12.c) Calcul de l'intégrale

Il faut garder une même borne supérieure finie pour les deux termes de la décomposition : leurs intégrales séparées sur $[0, +\infty[$ divergent.

Pour $R > 0$, l'identité de 12.b et les primitives logarithmiques donnent :

$$\int_0^R \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2(x^2-1)} [\ln(1+x^2R^2) - \ln(1+R^2)].$$

En regroupant les logarithmes, on obtient $\frac{1}{2(x^2-1)} \ln \left(\frac{1+x^2R^2}{1+R^2} \right)$. Lorsque $R \rightarrow +\infty$, le quotient tend vers $x^2 > 0$, donc le logarithme tend vers $\ln(x^2) = 2 \ln x$. Ainsi :

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \quad \text{pour } x > 0, x \neq 1.$$

12.d) Continuité de la dérivée

Sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, la formule précédente est un quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul. Il reste à vérifier la continuité en 1.

Pour $x > 0, x \neq 1$, le théorème des accroissements finis appliqué à $\ln$ entre 1 et x fournit un réel c_x compris entre ces deux nombres tel que $\frac{\ln x}{x-1} = 1/c_x$. Lorsque $x \rightarrow 1$, l'encadrement de c_x donne $c_x \rightarrow 1$. Ainsi :

$$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2} = g'(1).$$

La dérivée est donc continue en 1, et g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

13.a) Convergence et prolongement

Question adaptée au programme actuel : la convention de prolongement de l'intégrande en 1 est explicitée.

Posons $q(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}$ pour $t > 0, t \neq 1$. La limite établie en 12.d donne $q(t) \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $t \rightarrow 1$. En posant $q(1) = \frac{1}{2}$, on obtient une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

Pour $0 < t \leq 1/2$, on a $0 \leq q(t) = \frac{-\ln t}{1-t^2} \leq \frac{4}{3}(-\ln t)$. Or, pour $0 < a < 1$:

$$\int_{\varepsilon}^a -\ln t \, dt = a(1 - \ln a) - \varepsilon(1 - \ln \varepsilon) \rightarrow a(1 - \ln a).$$

La limite existe car $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$. L'intégrale de $-\ln t$ converge à l'origine. Par comparaison, celle de q converge absolument à l'origine. Sur le reste de $[0, x]$, le prolongement est continu. Ainsi $\int_0^x q(t) \, dt$ existe pour tout $x > 0$.

13.b) Identification des deux expressions

Définissons $G(x) = \int_0^x q(t) \, dt$ pour $x > 0$. Pour un point $a > 0$ fixé, on peut écrire

$G(x) = G(a) + \int_a^x q(t) \, dt$. Comme q est continue sur $]0, +\infty[$, le théorème fondamental donne $G'(x) = q(x)$, y compris à $x = 1$.

Les questions 12 montrent que $g'(x) = q(x)$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi $g - G$ a une dérivée nulle sur cet intervalle et y est constante.

Par convergence de l'intégrale à l'origine, $G(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par continuité de g sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$, on a aussi $g(x) \rightarrow 0$. La constante vaut donc zéro. Pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} \, dt,$$

avec la convention de prolongement précisée en 13.a.

14.a) Expression du complément

Pour $x > 0$ et $t > 0$, la question 5 appliquée à tx donne $\arctan(tx) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/(tx))$.

La fonction $t \mapsto \arctan(1/(tx))$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ en 0^+ ; elle peut être prolongée en zéro. Son produit par $1/(1+t^2)$ est positif et majoré par $\frac{\pi}{2(1+t^2)}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrale complémentaire converge donc.

En intégrant l'identité sur des segments puis en passant aux limites justifiées par ces

convergences :

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

14.b) Majoration du complément

Posons $a = 1/\sqrt{x}$ et $I_x = \int_0^{+\infty} \arctan(1/(tx)) \frac{dt}{1+t^2}$. L'intégrale existe d'après 14.a et se découpe en

$$I_x = \int_0^a \arctan(1/(tx)) \frac{dt}{1+t^2} + \int_a^{+\infty} \arctan(1/(tx)) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Sur $]0, a]$, $\arctan(1/(tx)) \leq \pi/2$ et $1/(1+t^2) \leq 1$. La première intégrale est donc majorée par $\pi a/2 = \pi/(2\sqrt{x})$.

Pour $u \geq 0$, la question 4 avec $y = 0$ donne $\arctan u \leq u$. Sur $[a, +\infty[$, on obtient donc :

$$0 \leq I_x \leq \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Pour $t \geq a$, on a $1/t \leq 1/a = \sqrt{x}$. Par conséquent :

$$\frac{1}{x} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Comme $I_x \geq 0$, sa valeur absolue est égale à lui-même. Les deux majorations donnent bien $|I_x| \leq \pi/\sqrt{x}$, avec la borne intermédiaire demandée.

14.c) Limite de g

La question 14.a donne $\frac{\pi^2}{4} - g(x) = I_x$ et 14.b donne $0 \leq I_x \leq \pi/\sqrt{x}$. Le théorème d'encadrement entraîne $I_x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

15.a) Convergence et valeur de l'intégrale

Question adaptée au programme actuel : le prolongement de l'intégrande en 1 est précisé, avec la même convention qu'en 13.a.

Posons $p(t) = \frac{\ln t}{1-t^2} = -q(t)$ pour $t > 0, t \neq 1$, et $p(1) = -1/2$. La question 13.a assure la convergence absolue à l'origine et la continuité du prolongement en 1.

Pour $t \geq \sqrt{2}$, $|p(t)| = \frac{\ln t}{t^2-1} \leq \frac{2 \ln t}{t^2}$. L'intégration par parties sur $[R, B]$, puis le passage à la limite $B \rightarrow +\infty$, donnent, pour $R > 1$:

$$\int_R^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \frac{\ln R + 1}{R},$$

car $\ln B/B \rightarrow 0$. La comparaison établit donc la convergence absolue à l'infini. Pour chaque $R > 0$, la question 13.b donne $\int_0^R p(t) dt = -g(R)$. En utilisant 14.c :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{4}.$$

15.b) Changement de variable réciproque

Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine $u = 1/t$ est indiqué dans le sujet.

Pour $B > 1$, on effectue ce changement de variable sur $[1, B]$. On a $t = 1/u$, $dt = -du/u^2$, $\ln t = -\ln u$ et $1-t^2 = (u^2-1)/u^2$. Le prolongement en 1 assure la validité au bord.

Ainsi :

$$\int_1^B \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \int_{1/B}^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du.$$

Les intégrales convergent aux deux extrémités impropres concernées d'après 15.a. En faisant tendre B vers $+\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} p(t) dt = \int_0^1 p(u) du$. Par Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

$$\text{En particulier, } \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{8}.$$

15.c) Décomposition finie

Pour $0 < t < 1$, la somme géométrique finie donne

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

En multipliant par $\ln t$, on obtient l'identité des intégrandes demandée.

Pour chaque k , $|t^{2k} \ln t| \leq -\ln t$ sur $]0, 1[$. L'intégrale de $-\ln t$ converge à l'origine, et $t^{2k} \ln t$ est continu en 1. Toutes les intégrales de la somme finie existent absolument.

Le terme de reste vérifie $|t^{2n+2} p(t)| \leq |p(t)|$ sur $]0, 1[$. L'intégrale de $|p|$ converge d'après 15.a. Le reste est donc lui aussi absolument intégrable.

On intègre l'identité sur un segment intérieur à $]0, 1[$, puis on passe aux limites aux bords. La somme étant finie, la linéarité donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt.$$

Aucun échange entre une série infinie et une intégrale n'a été utilisé.

15.d) Calcul des coefficients

L'existence de l'intégrale a été justifiée en 15.c. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t^{2n}$ donne :

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n} \ln t dt = \left[\frac{t^{2n+1} \ln t}{2n+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2n+1} \int_{\varepsilon}^1 t^{2n} dt.$$

Le terme de bord en 1 vaut zéro, et celui en ε tend vers zéro car $\varepsilon^{2n+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$. De plus

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n} dt \rightarrow 1/(2n+1). \text{ Ainsi :}$$

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

15.e) Annulation du reste

Notons $R_n = \int_0^1 p(t) t^{2n+2} dt$. Son existence est établie en 15.c et il est négatif.

Méthode 1 — Majoration par une puissance

Pour $0 < t < 1$, $-\ln t = \int_t^1 \frac{du}{u} \leq \frac{1-t}{t}$. Il s'ensuit :

$$0 \leq -\frac{\ln t}{1-t^2} \leq \frac{1}{t(1+t)}.$$

En multipliant par t^{2n+2} puis en intégrant :

$$|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{2n+1} dt = \frac{1}{2n+2}.$$

Le théorème d'encadrement donne donc $R_n \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Découpage près de l'extrémité 1

Fixons $\varepsilon > 0$. Le prolongement de p est continu sur $[1/2, 1]$, donc borné en valeur absolue par un réel $C > 0$. On peut choisir $a \in]1/2, 1[$ tel que $C(1-a) < \varepsilon/2$.

Sur $]0, a]$, $t^{2n+2} \leq a^{2n+2}$; sur $[a, 1]$, $t^{2n+2} \leq 1$. Par conséquent :

$$|R_n| \leq a^{2n+2} \int_0^a |p(t)| dt + \int_a^1 |p(t)| dt \leq a^{2n+2} \int_0^a |p(t)| dt + C(1-a).$$

La première intégrale est finie, et $a^{2n+2} \rightarrow 0$ car $0 < a < 1$. Pour n assez grand, le premier terme est inférieur à $\varepsilon/2$. On obtient alors $|R_n| < \varepsilon$, ce qui établit la limite.

La première méthode donne une vitesse de décroissance ; la seconde s'applique à de nombreux restes sans qu'une majoration explicite soit disponible.

15.f) Sommes des séries

En combinant 15.b, 15.c et 15.d, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} + R_n.$$

Comme $R_n \rightarrow 0$, les sommes partielles convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$$

converge comme série de Riemann d'exposant $2 > 1$. Notons sa somme S . Pour chaque $N \geq 1$, la séparation finie des indices pairs et impairs donne :

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

En passant à la limite dans ces trois suites de sommes partielles convergentes,

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}. \text{ Ainsi } \frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie IV — Retour à l'étude de Φ

16) Meilleure constante de majoration

Pour $f \neq 0$, on a $N_0(f) > 0$ et la question 8 donne $N_0[\Phi(f)]/N_0(f) \leq \pi^2/4$. L'ensemble des quotients est donc majoré par $\pi^2/4$.

Prenons la fonction constante $\mathbf{1} : x \mapsto 1$. Elle appartient à $E_0 \setminus \{0\}$, $N_0(\mathbf{1}) = 1$ et $\Phi(\mathbf{1}) = g$. La question 8 donne $N_0(g) \leq \pi^2/4$; la limite de 14.c implique la borne inverse. En effet, pour chaque $x > 0$, $|g(x)| \leq N_0(g)$, et le passage à la limite donne $\pi^2/4 \leq N_0(g)$.

Ainsi $N_0(g) = \pi^2/4$. Le quotient associé à $\mathbf{1}$ vaut exactement $\pi^2/4$, et :

$$\sup_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Cette valeur est atteinte comme quotient de deux bornes supérieures, même si $|g(x)|$ n'atteint pas nécessairement sa borne en un réel fini.

Pour la suite, on fixe λ tel que $|\lambda| < 4/\pi^2$, $\gamma = (\pi^2/4)|\lambda| \in [0, 1[$ et $f \in E_0 \setminus \{0\}$. On note $M = N_0(f) > 0$ et $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$.

17) Relation de récurrence

Question adaptée au programme actuel : la convention $\lambda^0 = 1$ est explicitée dans le préambule, y compris pour $\lambda = 0$.

Comme Φ est un endomorphisme de E_0 , chaque itérée $\Phi^n(f)$ et chaque φ_n appartiennent à E_0 . La linéarité donne :

$$\lambda \Phi(\varphi_n) = \lambda \Phi(\lambda^n \Phi^n(f)) = \lambda^{n+1} \Phi^{n+1}(f) = \varphi_{n+1}.$$

Par homogénéité de N_0 et par la question 8 :

$$N_0(\varphi_{n+1}) = |\lambda| N_0[\Phi(\varphi_n)] \leq |\lambda| \frac{\pi^2}{4} N_0(\varphi_n) = \gamma N_0(\varphi_n).$$

Si $\lambda = 0$, les conventions du sujet donnent $\varphi_0 = f$ et $\varphi_n = 0$ pour $n \geq 1$; les deux relations restent valables.

18) Injectivité de $\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$

Si $\lambda\Phi(f) = f$, la question 8 donne $M = N_0(f) \leq \gamma M$. Comme $M > 0$, on peut diviser par M et obtenir $1 \leq \gamma$, ce qui contredit $\gamma < 1$. L'égalité est donc impossible pour un f non nul.

Plus généralement, si $u \in E_0$ vérifie $(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(u) = 0$, on a $N_0(u) \leq \gamma N_0(u)$, donc $(1 - \gamma)N_0(u) \leq 0$. Puisque $1 - \gamma > 0$ et $N_0(u) \geq 0$, on obtient $N_0(u) = 0$, donc $u = 0$.

Le noyau de cette application linéaire est réduit à la fonction nulle : $\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$ est injective. La surjectivité sera établie en 23.b ; elle ne découle pas ici de l'injectivité, car E_0 n'est pas de dimension finie.

19) Majoration des itérées et série de bornes

Question adaptée au programme actuel : la convention $\gamma^0 = 1$ lorsque $\gamma = 0$ est explicitée dans le sujet.

Si $\gamma = 0$, on a $\lambda = 0$, $\varphi_0 = f$ et $\varphi_n = 0$ pour $n \geq 1$. La majoration demandée est vraie et la série des bornes vaut M .

Supposons désormais $0 < \gamma < 1$. Au rang 0, $N_0(\varphi_0) = M = \gamma^0 M$. Si $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$, la question 17 donne $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n) \leq \gamma^{n+1} M$. Par récurrence, la majoration est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

La série

$$\sum_{n \geq 0} M\gamma^n$$

converge, de somme $M/(1 - \gamma)$, car $0 \leq \gamma < 1$. La comparaison des termes positifs entraîne donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \leq \frac{M}{1 - \gamma} < +\infty.$$

20) Convergence ponctuelle de la série

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout n , $|\varphi_n(x)| \leq N_0(\varphi_n)$. La série de droite converge d'après 19. Par comparaison,

$$\sum_{n \geq 0} |\varphi_n(x)|$$

converge, donc

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x)$$

converge absolument.

Ainsi

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$$

est bien définie pour chaque réel x . Aucune continuité de cette somme n'est encore utilisée.

21) Borne de la somme

Pour tout réel x , l'inégalité triangulaire appliquée aux sommes partielles, puis le passage à la limite, donnent :

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \leq \frac{M}{1-\gamma}.$$

Le dernier membre est indépendant de x . Ainsi φ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq M/(1-\gamma)$.

22.a) Majoration des accroissements des itérées

Chaque φ_n appartient à E_0 . On peut donc appliquer 9.c à cette fonction. Comme $\varphi_{n+1} = \lambda \Phi(\varphi_n)$, il vient, pour $h \neq 0$:

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| = |\lambda| |\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)|,$$

puis :

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right].$$

22.b) Majoration des accroissements de la somme

Pour $h \neq 0$, notons $B(h) = \frac{|h|}{2} \ln(1 + 1/h^2) + \pi \arctan |h| \geq 0$.

Pour un entier $p \geq 1$, l'inégalité triangulaire et 22.a donnent :

$$\left| \sum_{k=0}^p [\varphi_k(x+h) - \varphi_k(x)] \right| \leq |f(x+h) - f(x)| + |\lambda| B(h) \sum_{k=0}^{p-1} N_0(\varphi_k),$$

car $\varphi_0 = f$. Lorsque $p \rightarrow +\infty$, les sommes de fonctions aux deux points convergent par 20 et la série des bornes converge par 19. Le passage à la limite dans l'inégalité finie donne :

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) B(h).$$

On n'a utilisé ni permutation de séries ni passage automatique d'une propriété de continuité à une somme infinie.

22.c) Continuité de la somme

Méthode 1 — Utiliser le module obtenu

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \in E_0$, $|f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. La question 9.d a établi $B(h) \rightarrow 0$. Enfin

$$\sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n)$$

est un nombre fini indépendant de h . La majoration de 22.b donne donc $\varphi(x+h) \rightarrow \varphi(x)$.

Cela vaut pour tout réel x , donc φ est continue sur $\mathbb{R}$. Avec 21, on obtient $\varphi \in E_0$.

Méthode 2 — Séparer une somme finie et une queue

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La convergence de

$$\sum N_0(\varphi_n)$$

permet de choisir p tel que

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} N_0(\varphi_n) < \varepsilon/4.$$

Posons

$$S_p = \sum_{n=0}^p \varphi_n.$$

Chaque φ_n est continue; la somme finie S_p est donc continue en x . Il existe $\delta > 0$ tel que $|h| < \delta$ implique $|S_p(x+h) - S_p(x)| < \varepsilon/2$.

Pour tout réel y , la convergence absolue donne

$$|\varphi(y) - S_p(y)| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} N_0(\varphi_n) < \varepsilon/4.$$

Ainsi, si $|h| < \delta$:

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\varphi(x+h) - S_p(x+h)| + |S_p(x+h) - S_p(x)| + |S_p(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

On retrouve la continuité de φ , donc son appartenance à E_0 . La première méthode exploite les estimations particulières de Φ ; la seconde donne une preuve élémentaire réutilisable pour une série de fonctions avec des queues uniformément petites.

23.a) Télescopage

Par linéarité et par 17, pour $n \geq 0$:

$$(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right) = \sum_{k=0}^{n+1} (\varphi_k - \varphi_{k+1}) = \varphi_0 - \varphi_{n+2} = f - \varphi_{n+2}.$$

Toutes les fonctions de cette égalité appartiennent à E_0 . Par conséquent :

$$N_0 \left[(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right) - f \right] = N_0(\varphi_{n+2}) \leq M\gamma^{n+2} \longrightarrow 0.$$

La limite vaut aussi zéro si $\gamma = 0$, puisque tous ces restes sont alors nuls.

23.b) Passage à la somme et bijectivité

Posons $T = \text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$ et

$$S_p = \sum_{k=0}^p \varphi_k.$$

La question 22.c donne $\varphi \in E_0$, donc $\varphi - S_p \in E_0$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la convergence absolue de la série donne

$$|\varphi(y) - S_p(y)| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} N_0(\varphi_k).$$

En prenant la borne supérieure :

$$N_0(\varphi - S_p) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} N_0(\varphi_k) \longrightarrow 0.$$

La linéarité de Φ et 8 donnent, pour tout $u \in E_0$:

$$N_0(Tu) = N_0(u - \lambda\Phi(u)) \leq N_0(u) + |\lambda|N_0[\Phi(u)] \leq (1 + \gamma)N_0(u).$$

Pour $p \geq 1$, 23.a donne $TS_p = f - \varphi_{p+1}$. Ainsi :

$$N_0(T\varphi - f) \leq N_0[T(\varphi - S_p)] + N_0(TS_p - f) \leq (1 + \gamma)N_0(\varphi - S_p) + N_0(\varphi_{p+1}).$$

Les deux termes de droite tendent vers zéro. Le membre de gauche, indépendant de p et positif, est donc nul. Il s'ensuit $T\varphi = f$, soit :

$$(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f.$$

La construction a été effectuée pour un f non nul arbitraire de E_0 . Si $f = 0$, la fonction nulle est un antécédent. Ainsi T est surjective. Comme elle est injective d'après 18,

$\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$ est bijective pour tout réel λ tel que $|\lambda| < 4/\pi^2$.

L'unique solution de $u - \lambda\Phi(u) = f$ est donc la fonction

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \Phi^n(f)(x).$$

Pour $\lambda = 0$, elle se réduit à $u = f$.

Le passage à la somme a été justifié par des bornes explicites sur les restes ; aucun échange entre une intégrale et une série infinie n'a été supposé.

23.c) Borne des valeurs rendant l'opérateur non bijectif

On raisonne par contraposée. Soit $\mu \neq 0$ tel que $|\mu| > \pi^2/4$. Posons $\lambda = 1/\mu$. Alors $|\lambda| < 4/\pi^2$, donc $\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$ est bijective par 23.b.

Or $\Phi - \mu \text{id}_{E_0} = -\mu(\text{id}_{E_0} - \frac{1}{\mu}\Phi)$. La multiplication par le scalaire non nul $-\mu$ est bijective sur E_0 . La composition des deux applications bijectives est donc bijective.

Ainsi, si $\Phi - \mu \text{id}_{E_0}$ n'est pas bijective, on ne peut pas avoir $|\mu| > \pi^2/4$. On conclut :

$$|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Ce raisonnement traite exactement la non-bijektivité demandée, sans la confondre avec la seule existence d'un vecteur propre.

Relevé des adaptations

- 13.a : la convention de prolongement par continuité de $\ln t/(t^2 - 1)$ en $t = 1$ est explicitée, et sa valeur $1/2$ est à établir. La question 13.b utilise cette convention.
- 15.a : la même convention est précisée pour $\ln t/(1 - t^2)$, dont la valeur prolongée en 1 est $-1/2$. Elle s'applique aux intégrales des questions 15.b à 15.e.

- 15.b : le changement de variable non affine $u = 1/t$ est fourni pour respecter le référentiel imposé.
- 17 et 19 : les conventions $\lambda^0 = 1$ et $\gamma^0 = 1$ sont explicitées lorsque ces paramètres valent zéro. Ce cas autorisé est traité dans toutes les conclusions qui suivent.

Aucun résultat n'a été admis en remplacement d'une démonstration. Les 23 questions et toutes leurs sous-questions sont conservées et corrigées. Aucun passage ne reste à vérifier.