



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2012

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

On pose $T = {}^tAA$ et on identifie les matrices colonnes aux vecteurs des espaces euclidiens correspondants. Le produit scalaire est $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

1) Question préliminaire

La projection orthogonale sur un sous-espace muni d'une base orthonormée s'exprime par ses coordonnées dans cette base. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$PX = \sum_{i=1}^k \langle X, U_i \rangle U_i = \sum_{i=1}^k U_i ({}^tU_i X) = \left(\sum_{i=1}^k U_i {}^tU_i \right) X.$$

Deux matrices qui ont la même action sur tous les vecteurs, en particulier sur les vecteurs de la base canonique, sont égales. Ainsi,

$$P = \sum_{i=1}^k U_i {}^tU_i.$$

Pour chaque indice i , la règle de transposition d'un produit donne ${}^t(U_i {}^tU_i) = U_i {}^tU_i$. En transposant la somme, on obtient ${}^tP = P$: la matrice P est symétrique.

Partie I — Décomposition spectrale

2) (a)

La matrice tA a n lignes et m colonnes. Le produit $T = {}^tAA$ est donc une matrice carrée de taille n .

Si $X \in \text{Ker } A$, alors $AX = 0$ et $TX = {}^tA(AX) = 0$. Par conséquent,

$$\text{Ker } A \subset \text{Ker } T.$$

2) (b)

On utilise le lien entre le produit T et la norme de AX . Si $TX = 0$, alors

$$\|AX\|_m^2 = {}^t(AX)AX = {}^tXTX = 0.$$

Une norme n'est nulle que pour le vecteur nul. Ainsi $AX = 0$, donc $\text{Ker } T \subset \text{Ker } A$. Avec 2) (a), cela donne

$$\text{Ker } A = \text{Ker } T.$$

Si $A = 0$, alors $T = 0$. Réciproquement, si $T = 0$, son noyau est tout l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; l'égalité des noyaux montre que $AX = 0$ pour tout X . Toutes les colonnes de A sont alors nulles. Donc

$$A = 0 \iff T = 0.$$

2) (c)

Méthode 1 — Inclusion et dimensions

Tout vecteur de l'image de T est de la forme ${}^tA(AX)$; il appartient donc à l'image de tA .

Les matrices T et A ont toutes deux un domaine de dimension n et le même noyau. Le théorème du rang donne

$$\text{rg } T = n - \dim \text{Ker } T = n - \dim \text{Ker } A = \text{rg } A.$$

Or une matrice et sa transposée ont le même rang. L'inclusion $\text{Im } T \subset \text{Im}({}^t A)$ concerne donc deux sous-espaces de même dimension, d'où

$$\text{Im } T = \text{Im}({}^t A).$$

Méthode 2 — Orthogonalité

Établissons directement le lien image-noyau utile dans la suite. Pour $X \in \text{Ker } A$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, {}^t AY \rangle = {}^t (AX) Y = 0.$$

Donc $\text{Im}({}^t A) \subset (\text{Ker } A)^\perp$. Ces espaces ont même dimension, car

$$\dim(\text{Ker } A)^\perp = n - \dim \text{Ker } A = \text{rg } A = \text{rg}({}^t A).$$

Ainsi $\text{Im}({}^t A) = (\text{Ker } A)^\perp$. De même, puisque T est symétrique, pour $X \in \text{Ker } T$ et tout Z ,

$$\langle X, TZ \rangle = \langle TX, Z \rangle = 0.$$

L'inclusion obtenue, puis le théorème du rang, donnent $\text{Im } T = (\text{Ker } T)^\perp$. L'égalité des noyaux conclut à nouveau.

La première méthode convient à une égalité d'images par inclusion ; la seconde explique la géométrie de cette image. On retiendra l'identité démontrée

$$\text{Im } T = \text{Im}({}^t A) = (\text{Ker } A)^\perp = (\text{Ker } T)^\perp.$$

3) (a)

La matrice T est réelle et

$${}^tT = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = T.$$

Le théorème spectral s'applique à cette matrice symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée, et toutes ses valeurs propres sont réelles.

Soit $X \neq 0$ tel que $TX = \lambda X$. Alors

$$\|AX\|_m^2 = {}^tXTX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|_n^2.$$

Comme $\|X\|_n^2 > 0$, on a $\lambda = \|AX\|_m^2 / \|X\|_n^2 \geq 0$.

Les valeurs propres sont donc positives au sens large. La valeur 0 est possible, et appartient au spectre exactement lorsque $\text{Ker } A \neq \{0\}$.

3) (b)

Le théorème spectral donne une décomposition de l'espace en somme directe orthogonale des espaces propres. Chaque X s'écrit de façon unique

$$X = \sum_{i=1}^p X_i, \quad X_i \in E_{\lambda_i}(T).$$

La projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(T)$ est donc $P_iX = X_i$. Si $i \neq j$, P_jX appartient à $E_{\lambda_j}(T)$, qui est orthogonal à $E_{\lambda_i}(T)$; par conséquent $P_iP_jX = 0$ pour tout X . Ainsi $P_iP_j = 0$.

En outre,

$$\sum_i P_i X = X,$$

d'où

$$\sum_i P_i = I_n.$$

Enfin,

$$TX = \sum_{i=1}^p TX_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i \right) X.$$

Cela établit la décomposition spectrale

$$T = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i.$$

Chaque P_i est symétrique d'après 1), et vérifie $P_i^2 = P_i$ puisqu'il s'agit d'un projecteur.

4) (a)

On calcule T à l'aide des produits scalaires des colonnes de A . Ces colonnes sont $(1, 1, -1)^t$, $(-1, -1, 1)^t$ et $(1, 1, 2)^t$; les deux premières sont opposées et la troisième leur est orthogonale. Leurs normes au carré sont respectivement 3, 3 et 6. Ainsi

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pour $X = (u, v, w)^t$, l'équation $TX = 0$ impose $u = v$ et $w = 0$, tandis que $TX = 6X$ impose $v = -u$, sans restriction sur w . On obtient

$$E_0(T) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)^t\}, \quad E_6(T) = \text{Vect}\{(1, -1, 0)^t, (0, 0, 1)^t\}.$$

Les dimensions sont 1 et 2 ; leur somme vaut 3. Ces espaces fournissent donc tout le spectre : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$.

Une base orthonormée est donnée par

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^t, \quad U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^t, \quad U_2 = (0, 0, 1)^t.$$

D'après 1), les projecteurs sont

$$P_1 = U_0 {}^tU_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = U_1 {}^tU_1 + U_2 {}^tU_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition spectrale est $T = 0P_1 + 6P_2 = 6P_2$, avec $P_1 + P_2 = I_3$.

4) (b)

Posons

$$c = A^t A = \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

Puisque les coefficients de A ne sont pas tous nuls, $c > 0$. Par associativité des produits,

$$T^2 = ({}^t A A)({}^t A A) = {}^t A (A {}^t A) A = cT.$$

Ainsi $X^2 - cX$ est bien un polynôme annulateur de T . Si $TX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, l'identité précédente donne $\lambda^2 X = c\lambda X$, donc $\lambda \in \{0, c\}$.

Le vecteur ${}^t A$ est non nul et $T {}^t A = c {}^t A$. Ainsi c est une valeur propre. De plus, pour $TX = cX$, on a $X = c^{-1} {}^t A (AX)$; donc

$$E_c(T) = \text{Vect}\{{}^t A\}.$$

La matrice ligne A non nulle est de rang 1. Par 2) (b) et le théorème du rang,

$$E_0(T) = \text{Ker } A = \{X \mid AX = 0\}, \quad \dim E_0(T) = n - 1.$$

Si $n \geq 2$, la liste croissante des valeurs propres est $(0, c)$. Le vecteur ${}^t A / \sqrt{c}$ est unitaire; le projecteur associé à c est

$$P_c = \frac{{}^t A A}{c} = \frac{T}{c}.$$

Le projecteur associé à 0 est $P_0 = I_n - P_c$, et la décomposition spectrale est $T = 0P_0 + cP_c$.

Si $n = 1$, T est la matrice $1, 1$ de coefficient c : sa seule valeur propre est c , le projecteur associé est I_1 et $T = cI_1$. Dans ce cas, 0 n'est pas une valeur propre et $I_1 - T/c = 0$ n'est pas un projecteur spectral associé à une valeur propre.

Partie II — Pseudo-solutions

5)

Soit X_0 une solution de $AX = B$, dont l'existence est supposée. Si X est pseudo-solution, la définition appliquée à $Z = X_0$ donne

$$0 \leq \|AX - B\|_m \leq \|AX_0 - B\|_m = 0.$$

Donc $AX = B$. Réciproquement, toute solution X vérifie $\|AX - B\|_m = 0 \leq \|AZ - B\|_m$ pour tout Z . Ainsi, lorsque l'équation est compatible, ses solutions et ses pseudo-solutions coïncident.

6)

Fixons Y et $\lambda \in \mathbb{R}$. La pseudo-solution X minimise la norme du résidu ; en prenant $Z = X + \lambda Y$ et en élevant au carré les deux normes, qui sont positives, on obtient

$$0 \leq \|AX - B + \lambda AY\|_m^2 - \|AX - B\|_m^2.$$

Le développement du carré donne

$$0 \leq \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda \langle AY, AX - B \rangle = \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda {}^t Y {}^t A (AX - B).$$

Méthode 1 — Signe d'un polynôme

Pour Y fixé, notons $a = \|AY\|_m^2 \geq 0$ et $b = {}^tY {}^tA(AX - B)$. L'inégalité est $a\lambda^2 + 2b\lambda \geq 0$ pour tout réel λ .

Si $a = 0$, les choix $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ imposent $b = 0$. Si $a > 0$ et $b \neq 0$, le choix $\lambda = -b/a$ donne $a\lambda^2 + 2b\lambda = -b^2/a < 0$, une contradiction. Dans tous les cas, $b = 0$.

Posons $V = {}^tA(AX - B)$. Puisque ${}^tYV = 0$ pour tout Y , le choix $Y = V$ donne $\|V\|_n^2 = 0$. Donc $V = 0$, soit

$$TX = {}^tAB.$$

Méthode 2 — Dérivation sur une droite

Pour chaque Y fixé, la fonction réelle $g_Y(\lambda) = \|A(X + \lambda Y) - B\|_m^2$ est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle a un minimum global en 0, puisque X est pseudo-solution. La condition nécessaire de minimum à l'intérieur du domaine donne

$$g'_Y(0) = 2 {}^tY {}^tA(AX - B) = 0.$$

Comme précédemment, en choisissant $Y = {}^tA(AX - B)$, on obtient $TX = {}^tAB$.

La première méthode traite directement l'inégalité demandée; la seconde met en évidence l'annulation de la dérivée dans chaque direction, sans faire appel à un critère d'extremum de plusieurs variables.

7)

Méthode 1 — Développement du résidu et égalité d'images

Supposons $TX = {}^tAB$. Pour un vecteur arbitraire Z , posons $Y = Z - X$. Alors ${}^tA(AX - B) = 0$, et

$$\|AZ - B\|_m^2 = \|AX - B\|_m^2 + 2 {}^tY {}^tA(AX - B) + \|AY\|_m^2 = \|AX - B\|_m^2 + \|A(Z - X)\|_m^2.$$

Le dernier terme est positif ou nul. Les normes étant positives, on en déduit

$\|AX - B\|_m \leq \|AZ - B\|_m$ pour tout Z . Donc X est pseudo-solution.

Pour l'existence, le second membre tAB appartient à $\text{Im}({}^tA)$, qui est égal à $\text{Im } T$ d'après 2) (c). Il existe donc X tel que $TX = {}^tAB$, et ce vecteur est une pseudo-solution.

Méthode 2 — Projection orthogonale sur l'image de A

Notons C la projection orthogonale de B sur $\text{Im } A$. Ce sous-espace d'un espace euclidien est de dimension finie, donc la projection existe. Comme $C \in \text{Im } A$, il existe X_0 tel que $AX_0 = C$.

Pour tout Z , les vecteurs $AZ - C \in \text{Im } A$ et $C - B \in (\text{Im } A)^\perp$ sont orthogonaux.

Pythagore donne

$$\|AZ - B\|_m^2 = \|AZ - C\|_m^2 + \|C - B\|_m^2 \geq \|AX_0 - B\|_m^2.$$

Ainsi X_0 est pseudo-solution, ce qui prouve directement l'existence.

Si $TX = {}^tAB$, alors pour tout Y ,

$$\langle AY, AX - B \rangle = {}^tY {}^tA(AX - B) = 0.$$

Donc $AX - B \perp \text{Im } A$. Comme $AX \in \text{Im } A$, AX est précisément la projection C de B , et le même calcul de Pythagore montre que X est pseudo-solution.

La première méthode fournit les équations normales ; la seconde interprète leur solution comme la meilleure approximation de B dans l'image de A . Au total,

$$X \text{ pseudo-solution} \iff TX = {}^tAB.$$

8)

On utilise les équations normales, établies sans supposer que l'équation initiale est compatible. D'après 4) (a),

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 2+2-1 \\ -2-2+1 \\ 2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Pour $X = (u, v, w)^t$, les équations normales se réduisent à $u - v = 1$ et $w = 1$. Toutes les pseudo-solutions sont donc

$$X_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + t \\ -\frac{1}{2} + t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Leur norme au carré vaut

$$\|X_t\|_3^2 = \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + t\right)^2 + 1 = \frac{3}{2} + 2t^2.$$

Le minimum est atteint uniquement pour $t = 0$. La pseudo-solution de norme minimale est

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|S\|_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

On peut vérifier que $AX_t = (2, 2, 1)^t = B$ pour tout t ; dans cet exemple toutes les pseudo-solutions sont des solutions exactes, conformément à 5).

9)

Il existe au moins une solution X_0 des équations normales d'après 7). Toutes leurs solutions sont exactement les vecteurs $X_0 + K$, où $K \in \text{Ker } T$, car

$$TX = {}^tAB = TX_0 \iff T(X - X_0) = 0.$$

L'unicité équivaut donc à $\text{Ker } T = \{0\}$. Avec 2) (b) et le théorème du rang,

$$\text{unique pseudo-solution} \iff \text{Ker } A = \{0\} \iff \text{rg } A = n.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante, indépendamment du choix de B . Elle ne peut être satisfaite que si $m \geq n$.

Partie III — Pseudo-inverse

10)

Méthode 1 — Décomposition orthogonale d'une pseudo-solution

Posons $K = \text{Ker } T$ et choisissons une pseudo-solution X_0 , dont l'existence est établie en 7). L'espace est la somme directe orthogonale $K^\perp \oplus K$; écrivons

$$X_0 = S + K_0, \quad S \in K^\perp, \quad K_0 \in K.$$

Puisque $TK_0 = 0$, on a $TS = TX_0 = {}^tAB$: S est pseudo-solution. D'après 9), toutes les pseudo-solutions s'écrivent $S + K_1$, avec $K_1 \in K$. Par orthogonalité et Pythagore,

$$\|S + K_1\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|K_1\|_n^2.$$

Cette quantité atteint son minimum seulement pour $K_1 = 0$. Donc S est l'unique pseudo-solution de norme minimale.

Elle vérifie $TS = {}^tAB$ et $S \perp K$. Réciproquement, si S' vérifie ces deux conditions, $S' - S$ appartient à K par l'égalité des images par T , et à $K^\perp$ par orthogonalité. L'intersection vaut $\{0\}$, donc $S' = S$. Les deux conditions caractérisent bien S .

Méthode 2 — Inversion sur le supplémentaire orthogonal du noyau

La matrice T est symétrique. D'après la preuve de 2) (c), $\text{Im } T = K^\perp$. La restriction de l'application $X \mapsto TX$ à $K^\perp$ est donc un endomorphisme de cet espace. Son noyau est $K \cap K^\perp = \{0\}$: elle est injective, puis bijective puisque l'espace est de dimension finie.

Comme ${}^tAB \in \text{Im } T = K^\perp$, il existe un unique $S \in K^\perp$ tel que $TS = {}^tAB$. Tout autre vecteur vérifiant les équations normales est $S + K_1$, avec $K_1 \in K$, et Pythagore donne de nouveau $\|S + K_1\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|K_1\|_n^2$.

Ainsi S est l'unique pseudo-solution de norme minimale. Cette seconde méthode

explique pourquoi l'inversion reste possible sur $K^\perp$, même lorsque T n'est pas inversible sur tout l'espace. Elle couvre aussi $A = 0$: alors $K^\perp = \{0\}$ et $S = 0$.

11) (a)

Si $\text{rg } A = n$, alors $\text{Ker } T = \text{Ker } A = \{0\}$. La matrice carrée T est donc inversible. Les équations normales ont l'unique solution

$$S = T^{-1} {}^t AB = ({}^t AA)^{-1} {}^t AB.$$

L'orthogonalité à son noyau nul n'impose aucune condition supplémentaire. Cette solution est celle de norme minimale.

11) (b)

Si $A = 0$, le résidu vaut $-B$ pour chaque X . Tout vecteur est donc pseudo-solution, et le seul de norme minimale est $S = 0$. Les conditions de 10) donnent la même conclusion : $T = 0$ et S doit être orthogonal à l'espace entier.

12)

On utilise la caractérisation de 10), dont l'unicité permettra d'identifier une combinaison linéaire de solutions. Pour $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, notons S_1, S_2 les pseudo-solutions de norme minimale associées. Elles vérifient

$$TS_1 = {}^t AB_1, \quad TS_2 = {}^t AB_2, \quad S_1, S_2 \in (\text{Ker } T)^\perp.$$

Pour tous réels a, b ,

$$T(aS_1 + bS_2) = {}^t A(aB_1 + bB_2).$$

De plus, le sous-espace $(\text{Ker } T)^\perp$ est stable par combinaison linéaire. Le vecteur

$aS_1 + bS_2$ satisfait donc les deux conditions de 10) pour le second membre $aB_1 + bB_2$.
Par unicité,

$$S(aB_1 + bB_2) = aS(B_1) + bS(B_2).$$

L'application $B \mapsto S(B)$ est linéaire. Sa matrice dans les bases canoniques est une matrice n, m , notée A^+ ; pour tout B , on a désormais $S(B) = A^+ B$.

13) (a)

Puisque $A \neq 0, 2$) (b) donne $T \neq 0$. Si $\Gamma(A)$ était vide, toutes les valeurs propres seraient nulles, et la décomposition de 3) (b) donnerait

$$T = \sum_i 0P_i = 0,$$

contradiction. Donc $\Gamma(A) \neq \emptyset$.

Toutes les valeurs propres indexées par $\Gamma(A)$ sont strictement positives d'après 3) (a) ; les divisions qui suivent sont ainsi justifiées.

13) (b)

Définissons la matrice symétrique n, n

$$R = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i$$

et le projecteur

$$Q = \sum_{i \in \Gamma(A)} P_i.$$

Par 3) (b) et les relations $P_i P_j = 0$ pour $i \neq j$, $P_i^2 = P_i$, on a

$$TR = RT = Q.$$

La somme des espaces propres de valeurs propres non nulles est $(\text{Ker } T)^\perp = \text{Im } T$. Pour le vérifier sans résultat supplémentaire, le noyau de T est l'espace propre associé à 0, si cette valeur propre existe ; les autres espaces propres lui sont orthogonaux et leur somme complète l'espace entier. Si 0 n'est pas valeur propre, cette somme est tout l'espace. Ainsi Q est la projection orthogonale sur $\text{Im } T$.

Fixons B et posons $S = R^t AB$. Puisque ${}^t AB \in \text{Im } T$ par 2) (c),

$$TS = TR^t AB = Q^t AB = {}^t AB.$$

De plus, chaque terme de S appartient à un espace propre de valeur propre non nulle : $S \in (\text{Ker } T)^\perp$. Par la caractérisation de 10), S est la pseudo-solution de norme minimale. L'égalité avec $A^+ B$ pour tout B donne

$$A^+ = R^t A = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^t A.$$

14)

D'après 4) (a), l'unique valeur propre non nulle de T est 6, avec projecteur P_2 . La formule de 13) (b) donne $A^+ = \frac{1}{6} P_2 {}^t A$.

Les colonnes de ${}^t A$ sont $(1, -1, 1)^t$, $(1, -1, 1)^t$ et $(-1, 1, 2)^t$. Elles appartiennent toutes au plan $E_6(T) = \{(u, -u, w)^t\}$; donc $P_2 {}^t A = {}^t A$. On obtient

$$A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le second membre de 8),

$$A^+B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+2-1 \\ -2-2+1 \\ 2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve exactement la pseudo-solution de norme minimale calculée en 8).

15)

Si $A = 0$, 11) (b) montre que $A^+B = 0$ pour tout B , donc $A^+ = 0$. Supposons désormais que $A \neq 0$ et posons $c = A^t A > 0$.

Méthode 1 — Décomposition spectrale

D'après 4) (b), la seule valeur propre non nulle de T est c et son projecteur est $P_c = T/c$. La formule de 13) (b) donne

$$A^+ = \frac{1}{c} P_c^t A.$$

Or $^t A \in E_c(T)$, donc $P_c^t A = ^t A$. Par conséquent $A^+ = ^t A/c$. Cette preuve vaut aussi pour $n = 1$.

Méthode 2 — Cauchy-Schwarz et minimum de norme

Le second membre B est ici un scalaire b . La matrice ligne A non nulle est surjective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$: le vecteur $X_b = (b/c)^t A$ satisfait $AX_b = b$. D'après 5), les pseudo-solutions sont donc les solutions de $AX = b$.

Pour toute solution X , Cauchy-Schwarz donne

$$b^2 = \langle {}^t A, X \rangle^2 \leq \| {}^t A \|_n^2 \| X \|_n^2 = c \| X \|_n^2.$$

Ainsi $\| X \|_n^2 \geq b^2/c$, et X_b atteint cette borne, car $\| X_b \|_n^2 = b^2/c$. Si $b \neq 0$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz impose que X soit colinéaire à ${}^t A$; la contrainte $AX = b$ fixe alors le coefficient à b/c . Si $b = 0$, le minimum de norme est 0 et impose $X = 0 = X_b$. Dans tous les cas, l'unique solution de norme minimale est X_b , donc $A^+ = {}^t A/c$.

La première méthode utilise les projecteurs construits auparavant ; la seconde donne une interprétation directe de la norme minimale. Finalement,

$$A^+ = \begin{cases} \frac{{}^t A}{A {}^t A} & \text{si } A \neq 0, \\ 0 & \text{si } A = 0. \end{cases}$$

Partie IV — Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

16)

Si $A = 0$, alors $A^+ = 0$ et les quatre relations demandées se vérifient directement. Supposons donc $A \neq 0$ et reprenons les matrices R et Q définies en 13) (b). Elles sont symétriques, vérifient $RT = TR = Q$, et $A^+ = R {}^t A$. La matrice Q est le projecteur orthogonal sur $(\text{Ker } A)^\perp$.

On a d'abord

$$A^+A = RT = Q.$$

Pour tout X , $X - QX \in \text{Ker } A$, donc $A(X - QX) = 0$. Ainsi $AQ = A$ et

$$AA^+A = AQ = A.$$

L'image de R est incluse dans l'image de Q , puisque R est une combinaison des mêmes projecteurs spectraux; on a d'ailleurs $QR = R$ par multiplication des sommes finies. Par conséquent

$$A^+AA^+ = QA^+ = QR^tA = R^tA = A^+.$$

La symétrie de Q donne ${}^t(A^+A) = A^+A$. Enfin,

$$AA^+ = AR^tA, \quad {}^t(AR^tA) = A^tR^tA = AR^tA,$$

car R est symétrique. Donc ${}^t(AA^+) = AA^+$. Les quatre relations sont établies pour toute matrice A .

17) (a)

On part exclusivement des quatre relations (*). Les deux conditions de symétrie donnent

$$MA = {}^tA^tM, \quad AM = {}^tM^tA.$$

Dans $M = MAM$, on peut regrouper les facteurs de deux manières :

$$M = M(AM) = M^tM^tA,$$

$$M = (MA)M = {}^tA {}^tMM.$$

De même, à partir de $A = AMA$,

$$A = A(MA) = A {}^tA {}^tM,$$

$$A = (AM)A = {}^tM {}^tAA.$$

En transposant cette dernière égalité, on obtient ${}^tA = {}^tAAM$. En transposant la précédente, on obtient ${}^tA = M {}^tA$. Ainsi toutes les relations demandées sont démontrées :

$$M = M {}^tM {}^tA = {}^tA {}^tMM,$$

$$A = A {}^tA {}^tM = {}^tM {}^tAA,$$

$${}^tA = {}^tAAM = M {}^tA.$$

17) (b)

Fixons un second membre B . D'après 17) (a), ${}^tAAM = {}^tA$, donc

$$T(MB) = {}^tAB.$$

Le vecteur MB vérifie les équations normales. Par ailleurs, l'identité $M = {}^t A {}^t M M$ montre que

$$MB = {}^t A ({}^t M M B) \in \text{Im}({}^t A).$$

D'après 2) (c) et sa preuve par orthogonalité, cette image est $(\text{Ker } T)^\perp$. Ainsi MB satisfait aussi l'orthogonalité exigée en 10). Il est donc l'unique pseudo-solution de norme minimale associée à B , c'est-à-dire $MB = A^+ B$.

Cette égalité vaut pour tout B , notamment pour les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$; par conséquent $M = A^+$.

La question 16) prouve que A^+ satisfait effectivement les quatre relations (*); la présente question en prouve l'unicité. Cette caractérisation est établie ici, et n'est pas utilisée comme un théorème préalable.

18) (a)

On applique la caractérisation de 17) à la matrice $C = A^+$ de taille n, m , avec pour candidate pseudo-inverse $N = A$ de taille m, n .

Les deux premières relations de 16) donnent respectivement

$$CNC = A^+ AA^+ = A^+ = C, \quad NCN = AA^+ A = A = N.$$

Les deux autres donnent ${}^t(NC) = {}^t(AA^+) = AA^+ = NC$ et ${}^t(CN) = {}^t(A^+ A) = A^+ A = CN$.

La matrice N vérifie donc les quatre relations caractérisant la pseudo-inverse de C . Par unicité,

$$(A^+)^+ = A.$$

18) (b)

On applique de nouveau 17), cette fois à $C = {}^tA$, avec $N = {}^t(A^+)$. En transposant les identités de 16), on obtient

$$CNC = {}^t(AA^+A) = {}^tA = C,$$

$$NCN = {}^t(A^+AA^+) = {}^t(A^+) = N.$$

De plus, $NC = {}^t(AA^+)$ et $CN = {}^t(A^+A)$ sont symétriques, puisque les matrices AA^+ et A^+A le sont. Les quatre conditions de 17) sont donc vérifiées, d'où

$$({}^tA)^+ = {}^t(A^+).$$

19)

On établit d'abord l'existence de l'inverse pour chaque $x > 0$, puis on traite la limite coefficient par coefficient, conformément à la convention de l'énoncé.

Si $A = 0$, alors $T + xI_n = xI_n$ est inversible et $(T + xI_n)^{-1}{}^tA = 0$. La limite vaut bien $A^+ = 0$.

Supposons $A \neq 0$. Avec les notations de 3) (b),

$$T + xI_n = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + x) P_i.$$

Toutes les valeurs propres λ_i sont positives ou nulles; comme $x > 0$, chaque $\lambda_i + x$ est strictement positif. Le produit des deux sommes, en utilisant $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$ et $P_i^2 = P_i$, donne

$$\left(\sum_{i=1}^p (\lambda_i + x) P_i \right) \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + x} P_i \right) = \sum_{i=1}^p P_i = I_n.$$

Le produit dans l'autre ordre est aussi I_n . L'inverse existe donc et

$$(T + xI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + x} P_i.$$

Si 0 est valeur propre, son projecteur, noté P_0 dans ce paragraphe, vérifie $P_0 {}^t A = 0$. En effet, chaque colonne de ${}^t A$ appartient à $\text{Im}({}^t A) = (\text{Ker } T)^\perp$, qui est orthogonal à l'espace propre associé à 0. Ainsi la multiplication par ${}^t A$ supprime exactement le terme dont le coefficient serait $1/x$:

$$(T + xI_n)^{-1} {}^t A = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i {}^t A.$$

Pour chaque $i \in \Gamma(A)$, $\lambda_i > 0$ et $1/(\lambda_i + x) \rightarrow 1/\lambda_i$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La somme comporte un nombre fini de matrices fixes : chaque coefficient admet donc la limite obtenue en passant à la limite dans cette somme finie. D'après 13) (b),

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (T + xI_n)^{-1} {}^t A = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^t A = A^+.$$

Application à la matrice de 8)

On calcule explicitement la matrice régularisée, afin d'appliquer le procédé sans utiliser la valeur finale de A^+ .

$$T + xI_3 = \begin{pmatrix} x+3 & -3 & 0 \\ -3 & x+3 & 0 \\ 0 & 0 & x+6 \end{pmatrix}.$$

Pour $x > 0$, $x(x+6) > 0$. Une multiplication directe vérifie que

$$(T + xI_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x+3}{x(x+6)} & \frac{3}{x(x+6)} & 0 \\ \frac{3}{x(x+6)} & \frac{x+3}{x(x+6)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+6} \end{pmatrix}.$$

Dans le bloc supérieur gauche, les coefficients diagonaux du produit valent $((x+3)^2 - 9)/(x(x+6)) = 1$, et les coefficients hors diagonale valent 0; le dernier coefficient diagonal vaut aussi 1. Cette vérification ne recourt pas à un déterminant.

Multiplions cette inverse par tA . Sa première ligne produit

$((x+3) - 3, (x+3) - 3, -(x+3) + 3)/(x(x+6)) = (1, 1, -1)/(x+6)$. La deuxième produit $(-1, -1, 1)/(x+6)$, et la troisième $(1, 1, 2)/(x+6)$. Par conséquent,

$$(T + xI_3)^{-1} {}^tA = \frac{1}{x+6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le passage à la limite donne

$$A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

en accord avec 14). Même si certains coefficients de $(T + xI_3)^{-1}$ divergent, ceux du produit avec tA ont tous une limite finie : la multiplication annule la composante sur le noyau.

20)

Fixons $\alpha \neq 0$ et posons $C = \alpha A$, $N = \alpha^{-1}A^+$. Les divisions par α sont permises. Vérifions les quatre relations de 17) :

$$CNC = \alpha AA^+A = \alpha A = C,$$

$$NCN = \alpha^{-1}A^+AA^+ = \alpha^{-1}A^+ = N.$$

En outre, $NC = A^+A$ et $CN = AA^+$ sont symétriques d'après 16). Par unicité de la pseudo-inverse,

$$(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha}A^+ \quad (\alpha \neq 0).$$

Si $A = 0$, cette matrice est toujours nulle et sa limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$ est la matrice nulle.

Si $A \neq 0$, alors $A^+ \neq 0$: sinon l'identité $A = AA^+A$ de 16) donnerait $A = 0$. Il existe donc au moins un coefficient c non nul de A^+ . Le coefficient correspondant de $(\alpha A)^+$ est c/α ; il n'a pas de limite réelle finie lorsque $\alpha \rightarrow 0$, et ses divergences à droite et à gauche sont de signes opposés.

Donc, au sens coefficient par coefficient de 19), $(\alpha A)^+$ n'admet pas de limite matricielle finie quand $\alpha \rightarrow 0$ si $A \neq 0$. La limite existe exactement dans le cas $A = 0$.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique n'est nécessaire : toutes les questions sont conservées et résolues avec les outils du référentiel. Les propriétés particulières de la pseudo-inverse sont démontrées dans les questions qui les introduisent. Le terme « positifs » de 3) (a) est compris au sens large ; le cas $n = 1$ de 4) (b) est traité explicitement sans modifier la question.