



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2010

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I , à valeurs réelles, et $C^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I , à valeurs réelles. On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour $f \in E$, on dit qu'une fonction $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problème traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U .

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

I.1. Étude de l'équation (E_f)

I.1.a. On considère $f \in E$ et $y \in C^1(I, \mathbb{R})$. Écrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

I.1.b. Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.

I.1.c. Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente.

I.1.d. Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I .

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question I.1.d.

I.2. Linéarité de U

I.2.a. Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

I.2.b. Montrer que U est un endomorphisme de E .

I.2.c. U est-il injectif?

I.2.d. On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et, pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction

$$x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

I.3. Cas des fonctions exponentielles

I.3.a. Pour k un nombre réel positif ou nul et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

I.3.b. En déduire que, pour tout réel $\lambda \in]0, 1/a]$, $\text{Ker}(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

I.3.c. Pour tout entier naturel n , expliciter $U^n(f_k)$. Pour $x \in I$, préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x)$.

I.4. Cas des fonctions sinus et cosinus

Dans cet exemple seulement, pour l'ensemble de la question I.4, on prendra $a = 1$.

I.4.a. Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.

I.4.b. Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$ est stable par U et que $(\sin, \cos)$ en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : P \rightarrow P, f \mapsto U(f)$.

I.4.c. Calculer M^2, M^3, M^4 . Expliciter M^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

I.5. Une autre famille de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction de E , $\varphi_n : x \mapsto e^{-x} x^n$, et on note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

I.5.a. Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1} .

I.5.b. Pour p entier naturel, montrer que le sous-espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

I.5.c. On prend ici $p = 2$. Écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : F_2 \rightarrow F_2, f \mapsto U(f)$. Calculer T_2^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

I.6. Une autre expression de $U(f)$

Pour $f \in E$, montrer que

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

I.7. Positivité de U

I.7.a. Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant $\varphi \in E$ à valeurs positives ou nulles et $\psi = U(\varphi)$.

I.7.b. Montrer que ψ est à valeurs positives ou nulles.

I.7.c. On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$, puis que ψ est décroissante.

I.8. Commutation de U avec la dérivation

On note $E_1 = \{f \in E \cap C^1(I, \mathbb{R}) : f' \text{ est bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 , associe sa dérivée.

I.8.a. Pour $f \in E_1$, montrer, en utilisant la question I.6, que $aU(f) = f + U(f')$.

I.8.b. En déduire que, pour tout $f \in E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.

I.8.c. Pour $f \in E_1$ à valeurs positives ou nulles et décroissante, retrouver le résultat de la question I.7.c : $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

II.1. Résultats préliminaires

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I . On suppose que $\beta(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et que $\int_1^{+\infty} \beta(t) dt$ converge.

II.1.a. On suppose ici que $\alpha(x) = o(\beta(x))$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et on se propose de montrer que

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$,

$$\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt\right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

Conclure.

II.1.b. On suppose maintenant que $\alpha(x) \sim \beta(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

II.2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$

Si $f \in E$ admet une limite finie $b \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$, que l'on précisera. On pourra commencer par traiter le cas $b = 0$ en écrivant $f(t) = o(1)$ et en utilisant la question II.1.

II.3. Cas des fonctions puissances

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif; on note $f_\omega : t \mapsto 1/t^\omega$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

II.3.a. Montrer que $g_\omega(x) = f_\omega(x)/a - (\omega/a)g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \sim f_\omega(x)/a$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

II.3.b. Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1).$$

On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$. En déduire :

$$g_1(x) = e^{ax} \left(-\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right).$$

II.4. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω

On note toujours $f \in E$ et $g = U(f)$.

II.4.a. Prouver que, si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.

II.4.b. Prouver que, si f est équivalente à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalente à f/a au voisinage de $+\infty$.

III. Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty} |[U(f)](t)| dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

III.1. Études d'exemples

III.1.a. Pour $k > 0$ et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente.

III.1.b. Pour $\omega > 0$, on note encore $f_\omega : t \mapsto 1/t^\omega$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ est-elle convergente ?

III.2. Cas des fonctions positives

Dans cette question, $f \in E$ est à valeurs positives ou nulles et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

On note $F : x \in I \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \int_1^x g(t) dt$.

III.2.a. Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.

III.2.b. Justifier que $F \in E$ et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - g(1)/a.$$

III.2.c. Vérifier que la fonction $x \mapsto G(x)/x$ est bornée sur I .

III.2.d. En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - g(1)/a$.

III.2.e. Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

III.3. Cas général

Dans cette question, $f \in E$ et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente. Montrer que

$\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.