



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

On fixe $a > 0$ et $I = [1, +\infty[$. Pour $f \in E$, on choisira une constante $M_f \geq 0$ telle que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in I$. Les dérivées au point 1, extrémité du domaine, sont prises à droite.

I.1. Étude de l'équation (E_f)

I.1.a. Par dérivation d'un produit,

$$(e^{-ax}y(x))' = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)).$$

Si y est solution de (E_f) , cette dérivée vaut $-e^{-ax}f(x)$. L'intégration sur $[1, x]$, justifiée par la continuité, donne

$$e^{-ax}y(x) - e^{-a}y(1) = - \int_1^x e^{-at}f(t) dt.$$

En posant $K = e^{-a}y(1)$, on obtient

$$y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at}f(t) dt \right).$$

Réciproquement, la fonction ainsi définie est de classe C^1 car f est continue. Sa dérivée vérifie $y' = ay - f$ par le théorème fondamental du calcul intégral et la dérivation d'un produit. Elle est donc solution de (E_f) .

Cette équivalence est obtenue par un calcul de dérivée et de primitive, sans utiliser de théorie générale des équations différentielles.

I.1.b. Soient y_1, y_2 deux solutions bornées. D'après I.1.a, il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_1(x) - y_2(x) = (K_1 - K_2)e^{ax}.$$

Si $K_1 \neq K_2$, le module de cette différence tend vers $+\infty$ puisque $a > 0$, ce qui contredit le caractère borné de $y_1 - y_2$. Ainsi $K_1 = K_2$, donc $y_1 = y_2$. Il existe au plus une solution bornée.

I.1.c. La fonction $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I et

$$|e^{-at}f(t)| \leq M_f e^{-at}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt = e^{-a}/a$ converge car $a > 0$. Par comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ converge absolument, donc converge.

I.1.d. Posons $C = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$. Par la relation de Chasles pour les intégrales convergentes,

$$g(x) = e^{ax} \left(C - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

La question I.1.a montre donc que g est de classe C^1 et solution de (E_f) . De plus,

$$|g(x)| \leq e^{ax} M_f \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = M_f/a.$$

La fonction g est bornée sur I . Son unicité découle de I.1.b. On retiendra à la fois la formule intégrale et l'identité

$$[U(f)]' = aU(f) - f, \quad |U(f)(x)| \leq M_f/a.$$

I.2. Linéarité de U

I.2.a. Pour la fonction constante $f = 1$,

$$U(1)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = e^{ax} \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{1}{a}.$$

Ainsi $U(1)$ est la fonction constante égale à $1/a$.

I.2.b. La question I.1.d assure que $U(f)$ est continue et bornée pour tout $f \in E$, donc U prend ses valeurs dans E . Pour $f, h \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les intégrales sont absolument convergentes et leur linéarité donne

$$U(\lambda f + \mu h)(x) = \lambda U(f)(x) + \mu U(h)(x).$$

Ainsi U est une application linéaire de E dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme.

I.2.c. Si $U(f) = 0$, l'identité $[U(f)]' = aU(f) - f$ donne $0 = -f$. Donc $\text{Ker}(U) = \{0\}$, ce qui prouve que U est injectif.

L'argument porte sur des fonctions de signe quelconque; la seule positivité du noyau intégral ne suffirait pas à démontrer cette injectivité.

I.2.d. Nous vérifions les intégrales et utilisons l'unicité des solutions bornées pour éviter tout échange d'intégrales.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$V_n(x) = \frac{e^{ax}}{n!} \int_x^{+\infty} (t-x)^n e^{-at} f(t) dt.$$

Établissons d'abord l'intégrale de référence $J_n = \int_0^{+\infty} s^n e^{-as} ds$. Pour $n = 0$, $J_0 = 1/a$.

Pour $n \geq 1$, une intégration par parties sur $[0, T]$ donne

$$\int_0^T s^n e^{-as} ds = -\frac{T^n e^{-aT}}{a} + \frac{n}{a} \int_0^T s^{n-1} e^{-as} ds.$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissances comparées. Une récurrence donne la convergence et $J_n = n!/a^{n+1}$.

Le changement de variable affine $s = t - x$, effectué d'abord sur un segment, fournit alors

$$|V_n(x)| \leq \frac{M_f}{n!} \int_0^{+\infty} s^n e^{-as} ds = \frac{M_f}{a^{n+1}}.$$

Les intégrales définissant V_n convergent donc absolument et ces fonctions sont bornées.

Pour justifier leur dérivation sans dériver sous une intégrale impropre, définissons, pour $0 \leq j \leq n$,

$$H_j(x) = \int_x^{+\infty} t^j e^{-at} f(t) dt.$$

Ces intégrales convergent absolument : $|t^j e^{-at} f(t)| \leq M_f t^j e^{-at}$, intégrable par le calcul de J_j . On écrit $H_j(x) = H_j(1) - \int_1^x t^j e^{-at} f(t) dt$, donc H_j est de classe C^1 et

$$H_j'(x) = -x^j e^{-ax} f(x).$$

Par le binôme, on a une somme finie

$$V_n(x) = \frac{e^{ax}}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-x)^{n-j} H_j(x).$$

Pour $n \geq 1$, la contribution des dérivées H'_j à la dérivée de cette expression est nulle, car elle contient le facteur

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-x)^{n-j} x^j = (x - x)^n = 0.$$

La dérivation de la somme polynomiale restante s'appuie sur l'identité, elle-même finie,

$$\frac{\partial}{\partial x} (t - x)^n = -n(t - x)^{n-1}.$$

Elle donne donc $V'_n = aV_n - V_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Il ne s'agit ici que de dériver les coefficients de la somme finie utilisant les H_j , pas d'une dérivation sous une intégrale.

Ainsi V_n est une solution bornée de $(E_{V_{n-1}})$, avec $V_{n-1} \in E$. Par I.1.d, $V_n = U(V_{n-1})$.

Comme $V_0 = U(f)$, une récurrence donne $V_n = U^{n+1}(f)$.

On obtient la formule demandée :

$$[U^{n+1}(f)](x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

I.3. Cas des fonctions exponentielles

I.3.a. Pour $k \geq 0$, $f_k(x) = e^{-kx}$ est continue et bornée sur I , donc appartient à E . Comme $a + k > 0$,

$$U(f_k)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t} dt = \frac{e^{-kx}}{a+k}.$$

Ainsi $U(f_k) = f_k/(a+k)$, y compris pour $k = 0$.

I.3.b. Soit $\lambda \in]0, 1/a]$. Posons $k = 1/\lambda - a$. Alors $k \geq 0$ et $1/(a+k) = \lambda$. Par I.3.a,

$$(U - \lambda Id_E)(f_k) = 0.$$

La fonction f_k est non nulle. Elle appartient donc au noyau considéré et prouve que $\text{Ker}(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

I.3.c. Par linéarité et récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U^n(f_k) = \frac{f_k}{(a+k)^n}.$$

Pour $n = 0$, cette formule exprime bien $U^0(f_k) = f_k$. Pour chaque $x \in I$, $e^{-kx} > 0$; on peut donc classer les limites en comparant $a+k$ à 1 :

- Si $a+k > 1$, $[U^n(f_k)](x) \rightarrow 0$.
- Si $a+k = 1$, $[U^n(f_k)](x) = e^{-kx}$ pour tout n , donc la limite est e^{-kx} .
- Si $0 < a+k < 1$, $[U^n(f_k)](x) \rightarrow +\infty$.

Ces trois cas incluent les cas limites $k = 0$ et $a = 1$.

I.4. Cas des fonctions sinus et cosinus

Dans cette question seulement, $a = 1$.

I.4.a. Méthode 1 — Vérification des solutions bornées.

Posons $y_s = (\sin + \cos)/2$ et $y_c = (\cos - \sin)/2$. Ces fonctions sont de classe C^1 et bornées. Leurs dérivées donnent

$$y'_s - y_s = -\sin, \quad y'_c - y_c = -\cos.$$

Elles sont donc respectivement solutions de $(E_{\sin})$ et $(E_{\cos})$. Par unicité,

$$U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2}, \quad U(\cos) = \frac{\cos - \sin}{2}.$$

Méthode 2 — Primitives explicites.

La dérivation directe vérifie

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\right)' = e^{-t} \sin t$$

et

$$\left(\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t)\right)' = e^{-t} \cos t.$$

Les primitives tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, car les fonctions trigonométriques sont bornées. En les évaluant entre x et $+\infty$, puis en multipliant par e^x , on retrouve les deux expressions précédentes. Cette approche calcule directement les intégrales définissant U .

I.4.b. Les deux images de I.4.a appartiennent à $P = \text{Vect}(\sin, \cos)$; par linéarité, P est stable par U .

Supposons $\alpha \sin x + \beta \cos x = 0$ pour tout $x \in I$. L'évaluation en $x = \pi$ donne $\beta = 0$, puis en $x = \pi/2$ donne $\alpha = 0$. Ces deux points appartiennent à I . La famille $(\sin, \cos)$ est libre et, par définition, génératrice de P : c'est une base.

Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images dans cet ordre. Ainsi

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.4.c. Les produits matriciels donnent

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^4 = -\frac{1}{4}I_2.$$

Méthode 1 — Formules trigonométriques réelles.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent, en multipliant les matrices, $R(\theta)R(\eta) = R(\theta + \eta)$. Or $M = 2^{-1/2}R(\pi/4)$. Une récurrence donne donc

$$M^n = 2^{-n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) & -\sin(n\pi/4) \\ \sin(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient a un module au plus $2^{-n/2}$, qui tend vers 0. Tous les coefficients de M^n tendent donc vers 0. La formule vaut aussi pour $n = 0$.

Méthode 2 — Division de l'exposant par 4.

Écrivons $n = 4q + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque $M^4 = -I_2/4$,

$$M^n = (-1/4)^q M^r.$$

Les quatre matrices M^r sont I_2 , M , M^2 et M^3 , déjà explicitées. Cette formule donne donc également toutes les puissances. Le module de chaque coefficient de ces quatre matrices est au plus 1, d'où une majoration par 4^{-q} pour les coefficients de M^n . Comme $q \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, tous tendent vers 0. Cette méthode utilise seulement les premières puissances calculées.

I.5. Une autre famille de fonctions

On revient à $a > 0$ quelconque. Pour alléger les formules, posons $A = a + 1 > 1$. Les fonctions $\varphi_n(x) = e^{-x}x^n$ sont continues sur I et tendent vers 0 à l'infini par croissances comparées. Elles sont bornées, donc appartiennent à E .

I.5.a. Pour $n \geq 1$, la formule intégrale donne

$$\psi_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} t^n e^{-At} dt.$$

Effectuons une intégration par parties sur $[x, T]$:

$$\int_x^T t^n e^{-At} dt = \left[-\frac{t^n e^{-At}}{A} \right]_x^T + \frac{n}{A} \int_x^T t^{n-1} e^{-At} dt.$$

Les intégrales convergent par le calcul des intégrales exponentielles à poids polynomial réalisé en I.2.d. Le terme en T tend vers 0. Après passage à la limite et multiplication par e^{ax} ,

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{A} + \frac{n}{A} \psi_{n-1}.$$

La valeur initiale est $\psi_0 = \varphi_0/A$, d'après I.3.a avec $k = 1$.

I.5.b. Montrons d'abord la liberté. Si

$$\sum_{j=0}^p c_j \varphi_j = 0$$

sur I , on peut multiplier par e^x , qui ne s'annule pas, pour obtenir

$$\sum_{j=0}^p c_j x^j = 0$$

pour tout $x \in I$. Un polynôme non nul possède au plus autant de racines que son degré ; il ne peut donc s'annuler sur cet intervalle infini. Tous les coefficients sont nuls. La famille est libre et, par définition de F_p , génératrice : c'est une base.

La relation de I.5.a et la valeur de ψ_0 montrent par récurrence que $\psi_j \in \text{Vect}(\varphi_0, \dots, \varphi_j)$ pour chaque j . Donc $U(\varphi_j) \in F_p$ pour $j \leq p$. Par linéarité, $U(F_p) \subset F_p$, ce qui établit la stabilité.

I.5.c. Rectification locale de l'énoncé : la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de F_2 , et non de F_1 .

La récurrence de I.5.a donne

$$\psi_0 = \frac{\varphi_0}{A}, \quad \psi_1 = \frac{\varphi_1}{A} + \frac{\varphi_0}{A^2}, \quad \psi_2 = \frac{\varphi_2}{A} + \frac{2\varphi_1}{A^2} + \frac{2\varphi_0}{A^3}.$$

Dans la base indiquée,

$$T_2 = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-2} & 2A^{-3} \\ 0 & A^{-1} & 2A^{-2} \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les puissances, écrivons $T_2 = A^{-1}(I_3 + N)$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} & 2A^{-2} \\ 0 & 0 & 2A^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2A^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Le binôme est applicable puisque I_3 et N commutent. Pour $n \geq 2$,

$$(I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

Cette identité reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, comme le montre une vérification directe.

Ainsi

$$T_2^n = \begin{pmatrix} A^{-n} & nA^{-(n+1)} & n(n+1)A^{-(n+2)} \\ 0 & A^{-n} & 2nA^{-(n+1)} \\ 0 & 0 & A^{-n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour $n = 0$, les termes hors diagonale sont nuls et la matrice vaut I_3 . Puisque $A > 1$, les croissances comparées entre puissances de n et exponentielles donnent la limite 0 de tous les coefficients.

I.6. Une autre expression de $U(f)$

Dans l'intégrale définissant $U(f)(x)$, effectuons sur $[x, T]$ le changement de variable affine $s = t - x$:

$$e^{ax} \int_x^T e^{-at} f(t) dt = \int_0^{T-x} e^{-as} f(x+s) ds.$$

Le module de l'intégrande de droite est au plus $M_f e^{-as}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut donc passer à la limite lorsque $T \rightarrow +\infty$ et obtenir

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-as} f(x+s) ds.$$

La variable d'intégration est muette ; on peut la noter t comme dans le sujet.

I.7. Positivité de U

I.7.a. La fonction $|f|$ appartient à E . Les intégrales sont absolument convergentes ; l'inégalité triangulaire pour une intégrale donne, pour tout $x \in I$,

$$|U(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t)| dt = U(|f|)(x).$$

C'est l'inégalité entre fonctions demandée.

I.7.b. Si $\varphi \geq 0$, alors $e^{-at}\varphi(x+t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Donc ψ est à valeurs positives ou nulles.

I.7.c. Méthode 1 — Majoration puis identité différentielle.

Pour $t \geq 0$, la décroissance donne $\varphi(x+t) \leq \varphi(x)$. Ainsi

$$0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{\varphi(x)}{a}.$$

Donc $a\psi \leq \varphi$. Comme $\psi' = a\psi - \varphi$ par I.1.d, on a $\psi' \leq 0$, ce qui prouve que ψ est décroissante.

Méthode 2 — Comparaison directe des valeurs.

Pour $x \leq y$ et $t \geq 0$, $\varphi(y+t) \leq \varphi(x+t)$. La croissance de l'intégrale, appliquée à la représentation de I.6, donne $\psi(y) \leq \psi(x)$. La décroissance de ψ est ainsi prouvée sans dériver. Pour obtenir aussi $a\psi \leq \varphi$, on compare de même $\varphi(x+t)$ à la constante $\varphi(x)$ et on intègre : $\psi(x) \leq \varphi(x)/a$. Cette approche utilise directement la conservation de l'ordre par l'intégrale.

I.8. Commutation de U avec la dérivation

I.8.a. Si $f \in E_1$, alors f' est continue et bornée, donc appartient à E . Pour $x \in I$ fixé, intégrons par parties sur $[0, T]$:

$$\int_0^T e^{-at} f'(x+t) dt = [e^{-at} f(x+t)]_0^T + a \int_0^T e^{-at} f(x+t) dt.$$

La borne sur f entraîne $e^{-aT} f(x+T) \rightarrow 0$. Les deux intégrales impropres convergent absolument, puisque f et f' sont bornées. Après passage à la limite et utilisation de I.6,

$$U(f')(x) = -f(x) + aU(f)(x).$$

$$\text{Donc } aU(f) = f + U(f').$$

I.8.b. Par I.1.d, $[U(f)]' = aU(f) - f$. La question précédente donne donc

$$[U(f)]' = U(f').$$

De plus, $U(f)$ est de classe C^1 et bornée, et sa dérivée $U(f')$ est bornée par I.1.d. Ainsi $U(f) \in E_1$, ce qui justifie que $D(U(f))$ est bien défini sur le domaine de D . Comme $D(f) = f'$,

$$D(U(f)) = U(D(f)).$$

I.8.c. Une fonction dérivable et décroissante vérifie $f' \leq 0$ sur I , avec la dérivée à droite en 1. Par positivité, $U(-f') \geq 0$, et par linéarité $U(f') \leq 0$. La question I.8.b donne alors $[U(f)]' = U(f') \leq 0$. Donc $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

II.1. Résultats préliminaires

II.1.a. Puisque $\alpha = o(\beta)$ et $\beta > 0$, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $A \geq 1$ tel que

$$\forall t \geq A, \quad |\alpha(t)| \leq \varepsilon \beta(t).$$

En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, on voit que $\int_A^{+\infty} |\alpha(t)| dt$ converge par comparaison. Sur $[1, A]$, α est continue, donc intégrable. L'intégrale de α converge ainsi absolument.

Pour $T \geq x \geq A$, l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent

$$\left| \int_x^T \alpha(t) dt \right| \leq \int_x^T |\alpha(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^T \beta(t) dt.$$

Après passage à la limite en T ,

$$\left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

Le dénominateur $\int_x^{+\infty} \beta(t) dt$ est strictement positif : l'intégrale sur $[x, x+1]$ l'est déjà puisque β est continue et strictement positive. On peut donc diviser. Comme ε est arbitraire, le quotient des modules tend vers 0, d'où

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

II.1.b. L'hypothèse $\alpha \sim \beta$ et la stricte positivité de β donnent $\alpha - \beta = o(\beta)$. Par II.1.a, $\alpha - \beta$ est absolument intégrable et

$$\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

Ainsi α est absolument intégrable également. Par linéarité des intégrales convergentes,

$$\frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} = 1 + \frac{\int_x^{+\infty} (\alpha(t) - \beta(t)) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} \rightarrow 1.$$

C'est l'équivalence demandée.

II.2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$

Méthode 1 — Comparaison des restes d'intégrales.

Si $b = 0$, $f(t) = o(1)$ et donc $e^{-at}f(t) = o(e^{-at})$. Appliquons II.1.a à $\alpha(t) = e^{-at}f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at}$, continue, strictement positive et intégrable. On obtient

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt = o(e^{-ax}/a).$$

Après multiplication par e^{ax} , $U(f)(x) \rightarrow 0$.

Pour b quelconque, $f - b \in E$ et $f - b \rightarrow 0$. Par linéarité et I.2.a, $U(f) = U(f - b) + b/a$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(f)(x) = b/a.$$

Méthode 2 — Estimation directe par la représentation translatée.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite de f donne un $A \geq 1$ tel que $|f(y) - b| \leq \varepsilon$ pour $y \geq A$. Pour $x \geq A$ et $t \geq 0$, on a $x + t \geq A$, donc I.6 donne

$$|U(f)(x) - b/a| \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t) - b| dt \leq \varepsilon/a.$$

Cette estimation prouve directement la même limite, sans théorème d'échange entre limite et intégrale. La première méthode illustre le résultat préliminaire ; la seconde fournit une majoration quantitative.

II.3. Cas des fonctions puissances

II.3.a. Pour $\omega > 0$, $f_\omega(x) = x^{-\omega}$ est de classe C^1 sur I , bornée par 1, et $f'_\omega(x) = -\omega x^{-\omega-1}$ est bornée par ω . Ainsi $f_\omega \in E_1$. La question I.8.a donne

$$ag_\omega = f_\omega + U(f'_\omega) = f_\omega - \omega g_{\omega+1},$$

soit

$$g_\omega = \frac{f_\omega}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}.$$

La fonction $f_{\omega+1}$ est positive et décroissante. La question I.7.c donne

$$0 \leq g_{\omega+1}(x) \leq f_{\omega+1}(x)/a. \text{ Par conséquent,}$$

$$0 \leq 1 - \frac{g_\omega(x)}{f_\omega(x)/a} = \frac{\omega g_{\omega+1}(x)}{f_\omega(x)} \leq \frac{\omega}{ax}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Par encadrement, $g_\omega(x)/(f_\omega(x)/a) \rightarrow 1$, donc

$$g_\omega(x) \sim \frac{1}{ax^\omega}.$$

La différence a été explicitement majorée : on n'a pas soustrait des équivalents sans justification.

II.3.b. Fixons $x \geq 1$. On ne fera passer la limite sous l'intégrale qu'après une estimation du reste.

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est de classe C^∞ . Sur $[0, x]$, le module de sa dérivée d'ordre $N + 1$ est au plus a^{N+1} . L'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 donne donc, pour $0 \leq t \leq x$,

$$e^{-at} = \sum_{k=0}^N \frac{(-a)^k t^k}{k!} + r_N(t), \quad |r_N(t)| \leq \frac{a^{N+1} t^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Divisons par t seulement sur $[1, x]$, puis intégrons une somme finie :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1) + R_N(x),$$

où

$$|R_N(x)| \leq \frac{a^{N+1}}{(N+1)!} \int_1^x t^N dt = \frac{a^{N+1}(x^{N+1} - 1)}{(N+1)(N+1)!} \leq \frac{(ax)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Pour tout $c > 0$, $c^m/m! \rightarrow 0$: le quotient des termes successifs vaut $c/(m+1)$ et est au plus $1/2$ à partir d'un certain rang, ce qui donne une majoration géométrique. Ainsi $R_N(x) \rightarrow 0$.

La série de l'énoncé converge également absolument pour ce x fixé, car, pour $k \geq 1$ et $x \geq 1$,

$$\left| \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1) \right| \leq \frac{(ax)^k}{k!},$$

et la série exponentielle de droite converge. On obtient donc

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1).$$

Pour $x = 1$, les deux membres sont nuls, donc la formule inclut ce cas.

Enfin, $t \mapsto e^{-at}/t$ est positive et dominée sur I par e^{-at} ; son intégrale sur I converge. La relation de Chasles donne

$$g_1(x) = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt \right).$$

En remplaçant la seconde intégrale par la formule précédente, on obtient exactement

$$g_1(x) = e^{ax} \left(-\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right).$$

Cette expression est exacte pour chaque x fixé; elle ne suppose aucun résultat général sur les séries entières.

II.4. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances

II.4.a. Appliquons II.1.a à $\alpha(t) = e^{-at} f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at} f_\omega(t)$. Les deux fonctions sont continues; β est strictement positive et intégrable car $0 < \beta(t) \leq e^{-at}$ sur I . L'hypothèse $f = o(f_\omega)$ donne $\alpha = o(\beta)$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o \left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt \right).$$

Les deux expressions sont multipliées par le même facteur strictement positif e^{ax} . Leur quotient est donc inchangé, et on obtient $g = o(g_\omega)$. Le dénominateur $g_\omega(x)$ est strictement positif.

II.4.b. Sous l'hypothèse $f \sim f_\omega$, les mêmes fonctions α, β satisfont $\alpha \sim \beta$. La question II.1.b donne donc $g \sim g_\omega$. Par II.3.a, $g_\omega \sim f_\omega/a$. Enfin $f_\omega \sim f$, et f est strictement positive à partir d'un certain rang. On peut écrire explicitement

$$\frac{g(x)}{f(x)/a} = \frac{g(x)}{g_\omega(x)} \frac{g_\omega(x)}{f_\omega(x)/a} \frac{f_\omega(x)}{f(x)} \rightarrow 1.$$

Ainsi $g \sim f/a$.

III. Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

III.1. Études d'exemples

III.1.a. Pour $k > 0$, la question I.3.a donne $g_k(t) = e^{-kt}/(a+k)$, une fonction positive. Son intégrale converge et vaut

$$\int_1^{+\infty} g_k(t) dt = \frac{1}{a+k} \int_1^{+\infty} e^{-kt} dt = \frac{e^{-k}}{k(a+k)}.$$

L'intégrale est aussi absolument convergente, puisque l'intégrande est positive.

III.1.b. La fonction g_ω est positive, et II.3.a donne $g_\omega(t) \sim 1/(at^\omega)$. Le critère de comparaison par équivalence pour des intégrandes positifs s'applique. L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} t^{-\omega} dt$ converge exactement lorsque $\omega > 1$. Donc

$$\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt \text{ converge} \iff \omega > 1.$$

Pour $0 < \omega \leq 1$, l'intégrale diverge vers $+\infty$.

III.2. Cas des fonctions positives

On pose $L = \int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty$. Les fonctions f et g sont positives ou nulles.

III.2.a. La fonction g est de classe C^1 et satisfait $g' - ag = -f$. L'intégration de cette égalité sur $[1, x]$ donne

$$g(x) - g(1) - a \int_1^x g(t) dt = - \int_1^x f(t) dt.$$

Comme $G' = g$ et $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, on obtient

$$G'(x) - aG(x) = -F(x) + g(1).$$

Toutes les intégrales de cette étape sont prises sur un segment.

III.2.b. Le théorème fondamental donne $F \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $F' = f$. Comme $f \geq 0$ et son intégrale converge, $0 \leq F(x) \leq L$. Donc F est continue et bornée, c'est-à-dire $F \in E$.

Posons $Y = U(F) - g(1)/a$. Alors

$$Y' - aY = [U(F)]' - aU(F) + g(1) = -F + g(1).$$

Les fonctions G et Y satisfont donc la même identité différentielle. Leur différence $Z = G - Y$ vérifie $Z' - aZ = 0$. La dérivée de $e^{-ax} Z(x)$ est nulle; cette fonction est constante sur I par le théorème des accroissements finis. Il existe ainsi $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(x) = Ke^{ax} + U(F)(x) - g(1)/a.$$

III.2.c. Puisque $g \in E$, il existe M_g tel que $|g(t)| \leq M_g$. Pour $x \geq 1$,

$$|G(x)| \leq \int_1^x |g(t)| dt \leq M_g(x-1).$$

Comme $x > 0$, on peut diviser pour obtenir $|G(x)/x| \leq M_g(x-1)/x \leq M_g$. La fonction $G(x)/x$ est donc bornée sur I .

III.2.d. Posons $B(x) = U(F)(x) - g(1)/a$. Cette fonction est bornée, car $U(F) \in E$. En divisant l'égalité de III.2.b par x ,

$$\frac{G(x)}{x} = K \frac{e^{ax}}{x} + \frac{B(x)}{x}.$$

Le terme $B(x)/x$ tend vers 0, tandis que $e^{ax}/x \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Si $K \neq 0$, le module du membre de droite tend vers $+\infty$, en contradiction avec III.2.c. Donc $K = 0$, et

$$G = U(F) - g(1)/a.$$

III.2.e. Méthode 1 — Limite de la primitive.

Par définition de L , $F(x) \rightarrow L$. La question II.2 donne alors $U(F)(x) \rightarrow L/a$. Grâce à III.2.d,

$$G(x) \rightarrow \frac{L - g(1)}{a}.$$

La convergence de $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ est exactement la convergence de l'intégrale impropre demandée. De plus,

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{a} \left(\int_1^{+\infty} f(t) dt - g(1) \right).$$

Méthode 2 — Primitive positive, croissante et bornée.

La positivité de g donne $G' = g \geq 0$, donc G est croissante et $G(1) = 0$. D'après III.2.d et le caractère borné de $U(F)$, G est bornée. Le théorème de la limite monotone assure alors que G possède une limite finie, ce qui prouve à nouveau la convergence de l'intégrale. Cette seconde approche suffit à prouver l'existence de l'intégrale ; la première en fournit aussi la valeur.

III.3. Cas général

La fonction $h = |f|$ appartient à E et son intégrale sur I converge par l'hypothèse de convergence absolue. La question III.2.e, appliquée à h , montre que

$$\int_1^{+\infty} U(|f|)(t) dt < +\infty.$$

D'après I.7.a, pour tout $t \in I$,

$$0 \leq |g(t)| = |U(f)(t)| \leq U(|f|)(t).$$

Les deux fonctions sont continues et l'intégrale de la majorante positive converge. Par comparaison, $\int_1^{+\infty} |g(t)| dt$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.

On obtient même, avec la valeur de III.2.e appliquée à $|f|$,

$$\int_1^{+\infty} |U(f)(t)| dt \leq \frac{\int_1^{+\infty} |f(t)| dt - U(|f|)(1)}{a} \leq \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Cette conclusion n'utilise aucun échange d'intégrales.

Relevé des adaptations

I.5.c. La mention « base de F_1 » est rectifiée en « base de F_2 » : les trois fonctions $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ constituent la base de l'espace F_2 étudié dans cette question.

Aucune autre question ne nécessite de modification mathématique. Toutes les questions sont démontrées avec les outils du référentiel. En particulier, I.2.d est établie sans échange d'intégrales ni dérivation sous une intégrale impropre ; I.4.c est résolue par des calculs matriciels et trigonométriques réels ; II.3.b repose sur un reste de Taylor-Lagrange explicitement majoré.