



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC — 2009

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

ESSEC — Banque commune d'épreuves — Mathématiques, option scientifique — 2009

Version adaptée au programme ECG de mathématiques approfondies, première et deuxième années.

Durée : quatre heures. Épreuve du mercredi 6 mai 2009, de 14 h à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Cadre adapté au programme actuel : dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On confondra les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ avec leurs matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. De même, on confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes qui les représentent dans cette base. Toutes les matrices et tous les scalaires étudiés sont réels.

Partie I

1°) Matrice à diagonale strictement dominante.

Question adaptée au programme actuel : le cadre est réel.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la condition :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est une matrice à diagonale strictement dominante.

a) On suppose qu'il existe $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_1| \geq |x_i|$.

Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

- b)** On suppose qu'il existe $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.
- c)** En déduire que A est inversible.

2°) Application : version réelle du théorème de Gershgorin.

Question adaptée au programme actuel : les ensembles de localisation sont des intervalles réels et le spectre considéré est le spectre réel.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|, \quad D_i = \{z \in \mathbb{R} : |z - a_{i,i}| \leq R_i\} = [a_{i,i} - R_i, a_{i,i} + R_i].$$

L'intervalle D_i est le i -ième intervalle de Gershgorin de A . On pose $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

- a)** Montrer que le spectre réel de A est inclus dans D .
- b)** Algorithme pour $n = 3$.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Écrire une fonction Python qui permet à l'utilisateur de saisir dans un tableau les neuf coefficients d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis écrire une fonction Python qui a pour argument ce tableau et qui renvoie les centres et les rayons des trois intervalles de Gershgorin associés à la matrice contenue dans le tableau.

Pour la saisie, on autorise les commandes suivantes : `input(message)` affiche la chaîne message et renvoie la réponse saisie sous forme de chaîne ; `float(chaine)` convertit une chaîne représentant un nombre réel en un nombre utilisable pour le calcul. Les indices des tableaux Python commencent à zéro.

- c)** Exemple : on se donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Justifier sans calculs que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (ii) À l'aide de la version réelle du théorème de Gershgorin, situer les valeurs propres de A .
- (iii) Diagonaliser explicitement A .

3°) La propriété (P).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & a_{i,i} > 0, \\ \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j, & a_{i,j} \leq 0, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, & \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0. \end{cases}$$

- a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.
- b) Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que le vecteur AX ait toutes ses coordonnées positives ou nulles.

Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 0$. On pourra considérer $x_{i_0} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i$.

- c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i,j) dans la matrice inverse de A :
 $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, que vaut ${}^t(A(b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{n,j}))$?

- d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

- e) Exemple : on reprend ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère, pour $\alpha > 0$,

$$A_\alpha = A + \alpha I_3, \text{ où } I_3 \text{ désigne la matrice identité de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Établir que A_α vérifie la propriété (P) et calculer A_α^{-1} .

Partie II : convergence de suites de matrices

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $X_k = {}^t(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$.

On dit que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite réelle $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel x_i .

De même, pour $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on note $M_k = (m_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, on dit que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la suite réelle $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $m_{i,j}$.

1°) Généralités.

a) Pour un vecteur $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $m(X) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$.

Montrer qu'une suite de vecteurs $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur X si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0$.

b) Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$s(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|.$$

Montrer qu'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0$.

c) Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, m(MX) \leq s(M)m(X)$.

d) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX .

e) Réciproquement, si on dispose d'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX , montrer que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M .

f) Montrer encore que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, s(MN) \leq s(M)s(N)$.

g) Établir maintenant que $\forall (Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$, puis en déduire que $\forall (Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, |m(Y) - m(Z)| \leq m(Y - Z)$.

2°) Convergence de la suite des inverses.

On considère ici une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toutes inversibles, qui converge vers une matrice M inversible.

a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M - M_k)m(M_k^{-1}X),$$

puis établir que

$$m(M_k^{-1}X)[1 - s(M^{-1})s(M - M_k)] \leq m(M^{-1}X).$$

b) En déduire l'existence d'un entier k_0 tel que, pour tout entier k supérieur à k_0 ,

$$m(M_k^{-1}X) \leq 2m(M^{-1}X).$$

c) Montrer alors que la suite $(M_k^{-1}X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M^{-1}X$.

d) Conclure alors que la suite de matrices $(M_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice M^{-1} .

3°) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices qui converge vers M . On suppose de plus que les matrices M_k vérifient toutes la propriété (P).

Montrer que les coefficients de la matrice M^{-1} sont tous positifs ou nuls.

4°) À partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} = 2; \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, a_{i,i+1} = -1; \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, a_{i,i-1} = -1.$$

Les autres coefficients de A sont nuls. Ainsi A est tridiagonale, avec 2 sur la diagonale et -1 sur les deux diagonales voisines. Pour $n = 1$, $A = (2)$.

- a) Pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer $(AX \mid X)$, où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Exprimer $(AX \mid X)$ sous la forme d'une somme de carrés. En déduire que A est inversible.
- b) Établir que, pour tout réel α strictement positif, la matrice $A_\alpha = A + \alpha I_n$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifie la propriété (P).
- c) Construire une suite de matrices, vérifiant toutes la propriété (P), qui converge vers A .
- d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S)

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur le segment $[0, 1]$. On dit qu'une fonction u vérifie le système (S) si :

$$(S) \quad \begin{cases} u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), \\ u'' = -f, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1°) Existence et unicité de la solution de (S).

- a) Montrer que (S) admet une unique solution u , de classe C^4 sur le segment $[0, 1]$.
- b) Montrer que si f est positive, alors l'unique solution u du système (S) associé à f est également positive.

Ici « positive » signifie positive ou nulle, conformément aux conclusions de positivité du problème.

- c) Expliciter la solution $\tilde{u}$ de (S) lorsque f est la fonction constante égale à 1. Calculer $\sup_{[0,1]} \tilde{u}$.

2°) On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1. On pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère la subdivision du segment $[0, 1]$ formée des points $x_i = ih = \frac{i}{n+1}$, $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

- a) On considère $u \in C^4([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$ tel que $x + h$ et $x - h$ appartiennent à $[0, 1]$. Justifier à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que :

$$|u(x + h) - 2u(x) + u(x - h) - h^2 u''(x)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$$

- b) En déduire :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \left| u''(x_i) - \frac{1}{h^2} [u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))] \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$$

- 3°) On reprend la matrice A du II-4° et on note $\tilde{F} = {}^t(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{U} = {}^t(\tilde{u}(x_1), \dots, \tilde{u}(x_n)) \in \mathbb{R}^n$.

- a) Réécrire les inégalités du 2°-b) dans le cas où u est la fonction $\tilde{u}$.

- b) Montrer que $\frac{1}{h^2} A \tilde{U} = \tilde{F}$.

- c) En déduire que les coefficients $b_{i,j}$ de la matrice A^{-1} vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} \leq \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{1}{8h^2}.$$

- 4°) Pour $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i = f(x_i)$ et $F = {}^t(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$. On note u l'unique solution du système (S) associé à f .

On définit $U = {}^t(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ par $U = h^2 A^{-1} F$.

On note $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\Delta u_i = u_i - u(x_i)$, puis $\Delta U = {}^t(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n) \in \mathbb{R}^n$ et enfin $V = {}^t(v_1, \dots, v_n) = A \Delta U$.

Montrer pour $i \in \{1, \dots, n\}$ que $|v_i| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} |f''|$.

Donner alors, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, une majoration de $|\Delta u_i| = |u_i - u(x_i)|$ en fonction de h et de f'' .

- 5°) Exemple : on prend $f : x \mapsto \exp(\sin x)$.

- a) Montrer que $|f''| \leq 2e$ sur $[0, 1]$. En déduire une première valeur de n qui garantit $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- b) Étudier la fonction $x \mapsto (x^2 + x - 1) \exp(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire une valeur de n , meilleure que la précédente, qui garantit encore $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.