



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC — 2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

ESSEC — Mathématiques, option scientifique — 2009 — Corrigé

Version adaptée au programme ECG de mathématiques approfondies, première et deuxième années.

Toutes les matrices et tous les scalaires sont réels. On note e_j le j -ième vecteur de la base canonique. Une somme sur un ensemble d'indices vide vaut zéro.

Partie I

1°) Matrice à diagonale strictement dominante.

a) Utilisons la ligne correspondant à une coordonnée de valeur absolue maximale.

Comme $X \neq 0$ et $|x_1| \geq |x_j|$ pour tout j , on a $|x_1| > 0$. La première ligne de $AX = 0$ donne :

$$a_{1,1}x_1 = - \sum_{j=2}^n a_{1,j}x_j.$$

L'inégalité triangulaire implique :

$$|a_{1,1}| |x_1| \leq \sum_{j=2}^n |a_{1,j}| |x_j| \leq |x_1| \sum_{j=2}^n |a_{1,j}|.$$

La division par $|x_1| > 0$ donne

$$|a_{1,1}| \leq \sum_{j=2}^n |a_{1,j}|,$$

en contradiction avec la dominance stricte. Aucun tel vecteur ne peut donc exister. Pour $n = 1$, le même raisonnement donne $|a_{1,1}| \leq 0$, également impossible.

b) Puisque la famille des coordonnées est finie, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_j |x_j|$. Comme $X \neq 0$, $|x_{i_0}| > 0$.

La ligne i_0 de $AX = 0$ fournit :

$$|a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.$$

Après division par $|x_{i_0}|$, on contredit la dominance stricte de la ligne i_0 . Ainsi $AX = 0$ implique $X = 0$.

- c) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A a un noyau réduit à $\{0\}$. Par le théorème du rang, son image a dimension n ; il est donc bijectif. La matrice A est inversible.

2°) Application : version réelle du théorème de Gershgorin.

- a) Raisonnons par contraposée. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus D$. Pour tout i ,

$$|a_{i,i} - \lambda| > R_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

La matrice $A - \lambda I_n$ est donc à diagonale strictement dominante. La question I-1° montre qu'elle est inversible; son noyau est nul. Il n'existe donc aucun vecteur propre non nul associé à λ .

Ainsi toute valeur propre réelle de A appartient à D . Cette preuve établit précisément le résultat particulier demandé, sans supposer de théorème de localisation connu.

- b) La première fonction remplit un tableau de taille trois par trois. La seconde extrait les coefficients diagonaux comme centres et additionne les valeurs absolues des coefficients hors diagonale sur chaque ligne.

Python

```
import numpy as np
```

```
def saisir_matrice():
    A = np.zeros((3, 3))
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            A[i, j] = float(input("Coefficient de la matrice : "))
    return A
```

```
def gershgorin(A):
    centres = np.zeros(3)
    rayons = np.zeros(3)
    for i in range(3):
        centres[i] = A[i, i]
        for j in range(3):
            if j != i:
```

```
rayons[i] = rayons[i] + abs(A[i, j])
return centres, rayons
```

Les bornes exclusives de `range(3)` donnent les indices zéro, un et deux. Les neuf coefficients sont saisis une seule fois. Pour chaque ligne, le coefficient diagonal est exclu de la somme définissant le rayon. Les intervalles se déduisent des tableaux renvoyés en soustrayant et en ajoutant les rayons aux centres.

Code exécuté : la fonction de saisie a été vérifiée avec neuf réponses fournies automatiquement, et la fonction de localisation a été exécutée sur la matrice de I-2°-c). Elle renvoie les centres (1, 2, 1) et les rayons (1, 2, 1). Cette vérification numérique ne remplace pas les démonstrations.

c) Exemple.

(i) La matrice A est réelle symétrique. Le théorème spectral réel assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Les centres sont 1, 2, 1 et les rayons 1, 2, 1. Par conséquent,

$$D_1 = [0, 2], \quad D_2 = [0, 4], \quad D_3 = [0, 2], \quad D = [0, 4].$$

Toutes les valeurs propres de A , réelles par le théorème spectral, appartiennent donc à $[0, 4]$.

(iii) Cherchons des vecteurs propres explicites en utilisant la symétrie entre les première et troisième coordonnées. Posons :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les produits matriciels donnent :

$$Av_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1, \quad Av_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_3.$$

Ces trois vecteurs non nuls correspondent à trois valeurs propres distinctes ; ils sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^3$. On vérifie également qu'ils sont deux à deux orthogonaux et que leurs normes valent respectivement $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$.

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

on obtient $Q^{-1} = {}^tQ$ et $A = QD^tQ$. Son spectre est exactement $\{0, 1, 3\}$.

3°) La propriété (P).

a) Pour chaque ligne i , les signes imposés donnent :

$$|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0.$$

Ainsi A est à diagonale strictement dominante. Elle est inversible par I-1°-c).

b) Montrons qu'une coordonnée minimale ne peut pas être négative. Choisissons i_0 tel que $x_{i_0} = \min_j x_j$ et supposons $x_{i_0} < 0$.

Pour $j \neq i_0$, $x_j \geq x_{i_0}$ et $a_{i_0,j} \leq 0$, donc $a_{i_0,j}x_j \leq a_{i_0,j}x_{i_0}$. Ainsi :

$$(AX)_{i_0} = a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j \leq x_{i_0} \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} < 0.$$

La dernière inégalité utilise $x_{i_0} < 0$ et la somme de ligne strictement positive. Elle contredit l'hypothèse $(AX)_{i_0} \geq 0$. Toutes les coordonnées de X sont donc positives ou nulles.

c) La colonne j de A^{-1} est $A^{-1}e_j$. Puisque $AA^{-1} = I_n$,

$$A \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = e_j.$$

Le vecteur obtenu a une coordonnée égale à un en position j et toutes les autres égales à zéro.

- d) Pour chaque j , la colonne j de A^{-1} a une image par A égale à e_j , dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles. I-3°-b) montre donc que cette colonne a elle-même toutes ses coordonnées positives ou nulles.

Ainsi $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, b_{i,j} \geq 0$.

e) On a

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha > 0$, les coefficients diagonaux sont strictement positifs, les coefficients hors diagonale sont négatifs ou nuls et chaque somme de ligne vaut $\alpha > 0$. La propriété (P) est vérifiée, donc A_α est inversible.

Utilisons la diagonalisation de I-2°-c)-(iii). Les trois vecteurs normalisés restent propres et les valeurs propres deviennent $\alpha, \alpha + 1$ et $\alpha + 3$, toutes non nulles. Par conséquent,

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{3\alpha} v_0 {}^t(v_0) + \frac{1}{2(\alpha + 1)} v_1 {}^t(v_1) + \frac{1}{6(\alpha + 3)} v_3 {}^t(v_3).$$

Explicitons les trois produits :

$$v_0 {}^t(v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 {}^t(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 {}^t(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour les positions $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ et $(2, 2)$, les coefficients sont respectivement :

$$\frac{1}{3\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{6(\alpha+3)} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)},$$

$$\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{3(\alpha+3)} = \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)},$$

$$\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{6(\alpha+3)} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)},$$

$$\frac{1}{3\alpha} + \frac{2}{3(\alpha+3)} = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}.$$

La symétrie complète alors la matrice :

$$A_{\alpha}^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} \alpha^2 + 3\alpha + 1 & \alpha + 1 & 1 \\ \alpha + 1 & (\alpha + 1)^2 & \alpha + 1 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha^2 + 3\alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II : convergence de suites de matrices

1°) Généralités.

- a) Si $X_k \rightarrow X$ coordonnée par coordonnée, fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque i , il existe K_i tel que $k \geq K_i$ implique $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$. Comme le nombre de coordonnées est fini, $K = \max_i K_i$ convient simultanément à toutes les coordonnées.

Pour $k \geq K$, $m(X_k - X) < \varepsilon$, donc $m(X_k - X) \rightarrow 0$.

Réciproquement, pour tout i et tout k ,

$$0 \leq |x_i^{(k)} - x_i| \leq m(X_k - X).$$

Si le membre de droite tend vers zéro, le théorème d'encadrement montre que chaque coordonnée converge. L'équivalence est établie.

- b) Si $M_k \rightarrow M$, chacun des n^2 termes $|m_{i,j}^{(k)} - m_{i,j}|$ tend vers zéro. Une somme finie de suites convergentes converge vers la somme de leurs limites, donc $s(M_k - M) \rightarrow 0$.

Réciproquement, pour chaque (i, j) ,

$$0 \leq |m_{i,j}^{(k)} - m_{i,j}| \leq s(M_k - M).$$

La convergence du membre de droite vers zéro entraîne celle de chaque coefficient vers le coefficient correspondant de M .

- c) Pour chaque i , l'inégalité triangulaire donne :

$$|(MX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| |x_j| \leq m(X) \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \leq m(X) s(M).$$

Le passage au maximum sur i donne $m(MX) \leq s(M)m(X)$.

- d) Fixons $X \in \mathbb{R}^n$. Par II-1°-c),

$$0 \leq m(M_k X - MX) = m((M_k - M)X) \leq s(M_k - M)m(X).$$

La question II-1°-b) donne $s(M_k - M) \rightarrow 0$; $m(X)$ est une constante finie. Le théorème d'encadrement puis II-1°-a) impliquent $M_k X \rightarrow MX$.

- e) Appliquons l'hypothèse à chacun des vecteurs e_j de la base canonique. Le vecteur $M_k e_j$ est la colonne j de M_k , et $M e_j$ est la colonne j de M .

Ainsi, pour chaque j et chaque i , $m_{i,j}^{(k)} \rightarrow m_{i,j}$. Cela correspond exactement à la définition de $M_k \rightarrow M$.

- f) Écrivons $M = (m_{i,\ell})$ et $N = (n_{\ell,j})$. Toutes les sommes suivantes sont finies :

$$s(MN) = \sum_{i,j} \left| \sum_{\ell=1}^n m_{i,\ell} n_{\ell,j} \right| \leq \sum_{i,j,\ell} |m_{i,\ell}| |n_{\ell,j}|.$$

En regroupant selon ℓ ,

$$s(MN) \leq \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_i |m_{i,\ell}| \right) \left(\sum_j |n_{\ell,j}| \right).$$

Pour tout ℓ ,

$$\sum_j |n_{\ell,j}| \leq s(N).$$

Tous les facteurs étant positifs ou nuls,

$$s(MN) \leq s(N) \sum_{\ell,i} |m_{i,\ell}| = s(M)s(N).$$

g) Pour chaque i , $|y_i + z_i| \leq |y_i| + |z_i| \leq m(Y) + m(Z)$. Ainsi $m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$.

En appliquant cette inégalité à $Y = (Y - Z) + Z$, on obtient $m(Y) - m(Z) \leq m(Y - Z)$.

En échangeant Y et Z , on obtient $m(Z) - m(Y) \leq m(Z - Y)$.

Comme $m(Z - Y) = m(Y - Z)$, les deux majorations donnent

$$|m(Y) - m(Z)| \leq m(Y - Z).$$

2°) Convergence de la suite des inverses.

a) Les inverses existent par hypothèse. On utilise l'identité :

$$M_k^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - M_k)M_k^{-1}.$$

En effet, le membre de droite vaut $M^{-1}MM_k^{-1} - M^{-1}M_kM_k^{-1} = M_k^{-1} - M^{-1}$. Aucun échange de l'ordre des facteurs n'est effectué.

Pour $X \in \mathbb{R}^n$, II-1°-c) appliquée deux fois donne :

$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})m((M - M_k)M_k^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M - M_k)m(M_k^{-1}X).$$

Posons $c_k = s(M^{-1})s(M - M_k) \geq 0$. L'inégalité triangulaire de II-1°-g) entraîne :

$$m(M_k^{-1}X) \leq m(M^{-1}X) + m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq m(M^{-1}X) + c_k m(M_k^{-1}X).$$

En regroupant, on obtient $(1 - c_k)m(M_k^{-1}X) \leq m(M^{-1}X)$. Cette étape ne nécessite pas que $1 - c_k$ soit positif, car on ne divise pas par ce facteur.

b) Comme $M_k \rightarrow M$, II-1°-b) donne $s(M - M_k) \rightarrow 0$. Donc $c_k \rightarrow 0$.

Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $c_k \leq \frac{1}{2}$. Pour de tels indices, $1 - c_k \geq \frac{1}{2} > 0$, et la division devient légitime :

$$m(M_k^{-1}X) \leq \frac{m(M^{-1}X)}{1 - c_k} \leq 2m(M^{-1}X).$$

L'entier k_0 ne dépend pas de X , puisque c_k ne dépend que des matrices.

c) Pour $k \geq k_0$, les questions précédentes donnent :

$$0 \leq m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq 2c_k m(M^{-1}X).$$

Le membre de droite tend vers zéro. Par encadrement et II-1°-a), $M_k^{-1}X \rightarrow M^{-1}X$. Le cas $X = 0$ est inclus : tous les vecteurs considérés sont alors nuls.

d) La convergence précédente est établie pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. On applique II-1°-e) à la suite (M_k^{-1}) et à la matrice M^{-1} . On conclut que $M_k^{-1} \rightarrow M^{-1}$ coefficient par coefficient.

3°) Pour tout k , la propriété (P) assure, par I-3°-a) et I-3°-d), que M_k est inversible et que tous les coefficients de M_k^{-1} sont positifs ou nuls.

La matrice limite M est inversible par hypothèse. II-2°-d) assure donc $M_k^{-1} \rightarrow M^{-1}$. Chacun des coefficients de M^{-1} est la limite d'une suite réelle positive ou nulle, donc est lui-même positif ou nul.

Il n'est pas nécessaire que M vérifie (P) : les sommes de ligne pourraient devenir nulles à la limite.

4°) Étude de la matrice tridiagonale A .

a) Pour traiter simultanément les bords et le cas $n = 1$, posons $x_0 = x_{n+1} = 0$. Alors $(AX)_i = 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$.

En développant le produit scalaire et en regroupant les produits voisins :

$$(AX | X) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

D'autre part, le développement des carrés donne :

$$\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i)^2 = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

Ainsi

$$(AX | X) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i)^2 \geq 0.$$

Si $AX = 0$, cette somme est nulle. Chaque carré est nul, donc $x_0 = x_1 = \dots = x_{n+1}$. Comme $x_0 = 0$, $X = 0$. Le noyau est nul et A est inversible. Pour $n = 1$, la somme vaut bien $2x_1^2$.

b) Dans $A_\alpha = A + \alpha I_n$, les coefficients diagonaux valent $2 + \alpha > 0$ et les coefficients hors diagonale sont négatifs ou nuls.

Si $n \geq 2$, les sommes des première et dernière lignes valent $1 + \alpha > 0$. Pour les lignes intérieures, lorsqu'elles existent, elles valent $\alpha > 0$.

Si $n = 1$, l'unique somme de ligne vaut $2 + \alpha > 0$. Ainsi (P) est vérifiée pour tout $n \geq 1$ et tout $\alpha > 0$.

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, définissons $M_k = A + \frac{1}{k+1} I_n$. Le nombre $\frac{1}{k+1}$ est strictement positif, donc II-4°-b) montre que M_k vérifie (P) .

Les coefficients hors diagonale sont constants, et chaque coefficient diagonal tend vers 2. La suite (M_k) converge donc vers A .

d) La matrice A est inversible par II-4°-a). Elle est limite d'une suite de matrices vérifiant (P) par II-4°-c). II-3° assure donc que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S)

1°) Existence et unicité de la solution de (S).

a) Construisons une solution en intégrant deux fois. La continuité de f sur $[0, 1]$ assure l'existence de toutes les intégrales sur segment ci-dessous. Posons :

$$c = \int_0^1 (1-t)f(t) dt, \quad u(x) = cx - \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

Pour dériver sans invoquer de dérivation sous l'intégrale, écrivons :

$$u(x) = cx - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt.$$

Le théorème fondamental du calcul intégral et la règle du produit donnent :

$$u'(x) = c - \int_0^x f(t) dt - xf(x) + xf(x) = c - \int_0^x f(t) dt, \quad u''(x) = -f(x).$$

Comme $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, on a $u''' = -f'$ et $u^{(4)} = -f''$, toutes deux continues. La fonction construite est donc de classe C^4 . De plus, $u(0) = 0$ et

$$u(1) = c - \int_0^1 (1-t)f(t) dt = 0.$$

Elle satisfait (S).

Pour l'unicité, si u et v sont deux solutions, $w = u - v$ vérifie $w'' = 0$. Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante, donc w' est constante et $w(x) = ax + b$. Les conditions $w(0) = w(1) = 0$ donnent $b = 0$ puis $a = 0$. Ainsi $u = v$.

b) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u'' = -f \leq 0$. La fonction u , de classe C^2 , est donc concave sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité de concavité donne :

$$u(x) = u((1-x)0 + x1) \geq (1-x)u(0) + xu(1) = 0.$$

La solution est donc positive ou nulle sur tout le segment, y compris à ses extrémités où elle vaut zéro.

- c) Pour $f = 1$, l'équation devient $\tilde{u}'' = -1$. Ses solutions sont de la forme $-\frac{x^2}{2} + ax + b$. La condition en zéro impose $b = 0$ et celle en un impose $a = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\tilde{u}(x) = \frac{x(1-x)}{2}$ pour $x \in [0, 1]$.

La dérivée $\tilde{u}'(x) = \frac{1}{2} - x$ est positive avant $\frac{1}{2}$, nulle en $\frac{1}{2}$, négative après. La fonction atteint donc son maximum en $\frac{1}{2}$, de valeur $\frac{1}{8}$. Ainsi $\sup_{[0,1]} \tilde{u} = \frac{1}{8}$.

2°) Approximation de la dérivée seconde.

- a) La fonction $u^{(4)}$ est continue sur le segment fermé borné $[0, 1]$; elle y est bornée et atteint le maximum de sa valeur absolue. Notons $B = \sup_{[0,1]} |u^{(4)}| < +\infty$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre trois, sur les segments reliant x à $x + h$ et x à $x - h$, donne :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + r_+,$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + r_-,$$

avec $|r_+| \leq \frac{h^4}{24}B$ et $|r_-| \leq \frac{h^4}{24}B$. Les segments sont inclus dans $[0, 1]$ par l'hypothèse sur x .

En additionnant, les termes d'ordres un et trois s'annulent :

$$u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2u''(x) = r_+ + r_-.$$

L'inégalité triangulaire donne donc la majoration demandée, avec $\frac{h^4}{12}B$.

- b) Pour $1 \leq i \leq n$, $x_i - h = x_{i-1}$ et $x_i + h = x_{i+1}$ appartiennent à $[0, 1]$. La question précédente est donc applicable en x_i .

En divisant par $h^2 > 0$, puis en utilisant que la valeur absolue est inchangée lorsqu'on change le signe, on obtient :

$$\left| u''(x_i) - \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$$

Cette inégalité vaut pour tous les indices demandés, bords inclus.

3°) Sommes des lignes de A^{-1} .

a) La fonction $\tilde{u}(x) = \frac{x(1-x)}{2}$ satisfait $\tilde{u}'' = -1$ et $\tilde{u}^{(4)} = 0$. Le majorant du 2°-b) est donc nul :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \left| -1 - \frac{\tilde{u}(x_{i-1}) - 2\tilde{u}(x_i) + \tilde{u}(x_{i+1}))}{h^2} \right| = 0.$$

Autrement dit, $2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i-1}) - \tilde{u}(x_{i+1})) = h^2$ pour chaque i .

b) La coordonnée i de $A\tilde{U}$ est $2\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_{i-1}) - \tilde{u}(x_{i+1}))$, en prenant $\tilde{u}(x_0) = \tilde{u}(x_{n+1}) = 0$. Cela décrit également les lignes de bord et le cas $n = 1$.

Par III-3°-a), chaque coordonnée vaut h^2 . Ainsi $A\tilde{U} = h^2\tilde{F}$, soit $\frac{1}{h^2}A\tilde{U} = \tilde{F}$.

c) Puisque A est inversible, on déduit $\tilde{U} = h^2 A^{-1}\tilde{F}$. Comme chaque coordonnée de $\tilde{F}$ vaut un,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \tilde{u}(x_i) = h^2 \sum_{j=1}^n b_{i,j}.$$

II-4°-d) assure $b_{i,j} \geq 0$. De plus, III-1°-c) donne $\tilde{u}(x_i) \leq \frac{1}{8}$. Donc :

$$0 \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{\tilde{u}(x_i)}{h^2} \leq \frac{1}{8h^2} = \frac{(n+1)^2}{8}.$$

On dispose même de l'identité

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{i(n+1-i)}{2},$$

obtenue en remplaçant x_i par $\frac{i}{n+1}$.

4°) Majoration de l'erreur de discrétisation.

La solution u est de classe C^4 par III-1°-a), et $u^{(4)} = -f''$. Comme f'' est continue sur $[0, 1]$, posons $B_f = \sup_{[0,1]} |f''| < +\infty$.

Notons $W = {}^t(u(x_1), \dots, u(x_n))$. Alors $\Delta U = U - W$, et la définition $U = h^2 A^{-1} F$ donne $AU = h^2 F$. Par conséquent,

$$V = A\Delta U = h^2 F - AW.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, en utilisant $u(x_0) = u(x_{n+1}) = 0$, on obtient :

$$v_i = h^2 f(x_i) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}).$$

Comme $f(x_i) = -u''(x_i)$,

$$v_i = u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) - h^2 u''(x_i).$$

III-2°-a) appliquée en x_i donne $|v_i| \leq \frac{h^4}{12} B_f$.

Pour passer de cette erreur locale à l'erreur sur la solution, utilisons $\Delta U = A^{-1}V$. Pour chaque i ,

$$|\Delta u_i| = \left| \sum_{j=1}^n b_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} |v_j| \leq \frac{h^4}{12} B_f \sum_{j=1}^n b_{i,j}.$$

Les coefficients $b_{i,j}$ sont positifs ou nuls par II-4°-d), ce qui justifie la deuxième écriture et la majoration. III-3°-c) fournit alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{[0,1]} |f''| = \frac{1}{96(n+1)^2} \sup_{[0,1]} |f''|.$$

5°) Exemple : $f(x) = \exp(\sin x)$.

a) La fonction f est de classe C^2 sur $[0, 1]$. En dérivant deux fois :

$$f'(x) = \cos x \exp(\sin x), \quad f''(x) = (\cos^2 x - \sin x) \exp(\sin x).$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $|\cos^2 x - \sin x| \leq \cos^2 x + |\sin x| \leq 2$, et $\exp(\sin x) \leq e$. On a donc $|f''(x)| \leq 2e$.

D'après III-4°, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{2e}{96(n+1)^2} \leq 10^{-4}, \quad \text{soit} \quad (n+1)^2 \geq \frac{625e}{3}.$$

Le choix $n = 23$ convient. Pour le justifier sans dépendre d'un arrondi numérique, établissons une borne rationnelle de e à l'aide de la série exponentielle autorisée :

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{65}{24} + \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Pour $r \geq 0$, $(5+r)! \geq 5! 6^r$, donc, par comparaison à une série géométrique,

$$\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{120} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{6^r} = \frac{1}{100}.$$

Ainsi $e \leq \frac{65}{24} + \frac{1}{100} = \frac{1631}{600} < \frac{11}{4}$. Pour $n = 23$,

$$\frac{2e}{96 \cdot 24^2} < \frac{11}{110592} < \frac{1}{10000}.$$

La dernière inégalité revient à $110000 < 110592$. Le choix $n = 23$ garantit donc la précision demandée pour tous les indices.

C'est également le plus petit entier garanti par le majorant $2e$: si $n = 22$, $(n + 1)^2 = 529$, tandis que $\frac{625e}{3} > \frac{625}{3} \cdot \frac{65}{24} = \frac{40625}{72} > 529$.

b) Posons $g(t) = (t^2 + t - 1)e^t$ pour $t \geq 0$. La fonction est dérivable et :

$$g'(t) = [2t + 1 + t^2 + t - 1]e^t = t(t + 3)e^t.$$

Pour $t \geq 0$, $g'(t) \geq 0$, avec stricte positivité pour $t > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $[0, +\infty)$; elle part de $g(0) = -1$ et tend vers $+\infty$.

Comme l'exponentielle est positive, le signe de g est celui de $t^2 + t - 1$. Les racines de ce polynôme réel du second degré sont $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0$. Ainsi g est négative sur $[0, \rho[$, nulle en ρ , positive sur $]\rho, +\infty[$. En particulier $g(1) = e$ et, sur $[0, 1]$, $-1 \leq g(t) \leq e$.

L'identité $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ permet d'écrire :

$$f''(x) = (1 - \sin^2 x - \sin x)e^{\sin x} = -g(\sin x).$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $|f''(x)| = |g(\sin x)| \leq e$, car $e > 1$. On remplace ainsi le majorant précédent $2e$ par e .

III-4° donne maintenant :

$$|u_i - u(x_i)| \leq \frac{e}{96(n + 1)^2}.$$

Le choix $n = 16$ convient : en réutilisant $e < \frac{11}{4}$,

$$\frac{e}{96 \cdot 17^2} < \frac{11}{110976} < \frac{1}{10000}.$$

L'inégalité finale revient à $110000 < 110976$. Ainsi $n = 16$, inférieur à 23, garantit encore la précision demandée pour tous les indices.

Ce choix est le plus petit entier garanti par le majorant uniforme e utilisé ici : pour $n = 15$, il faudrait $e \leq \frac{96 \cdot 16^2}{10000} = \frac{1536}{625}$, alors que $e > \frac{65}{24} > \frac{1536}{625}$. Une exploitation

plus fine de $\sin 1$ peut améliorer davantage la borne ; elle n'est pas nécessaire pour répondre à la question.

Relevé des adaptations

I-1°-a), I-1°-b), I-1°-c) : les matrices, vecteurs et scalaires de la démonstration de dominance diagonale sont pris dans le cadre réel. La preuve et son objectif sont conservés.

I-2°-a) : les ensembles de localisation sont remplacés par des intervalles réels et le résultat porte sur le spectre réel. La conséquence utile pour la matrice symétrique de l'exemple est intégralement préservée et démontrée.

I-2°-b) : le programme de saisie et de calcul des centres et rayons est converti en Python. Les fonctions `input` et `float`, nécessaires à la saisie interactive, sont expliquées dans le sujet.

I-2°-c)-(ii) : la localisation des valeurs propres utilise les intervalles de la version réelle établie en I-2°-a).
