



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2008

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

Dans toute cette partie, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, lorsque r est un entier naturel, on désignera par $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à r .

Étant donné Q appartenant à $\mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

À cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie, lorsque $P \in \mathcal{P}$, par la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

- 1°) a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.
- 1°) b) Pour $P \in \mathcal{P}$ de degré r strictement positif, calculer le degré de la fonction polynomiale $\Delta(P)$.
- 1°) c) Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.
- 2°) On considère, pour $r \in \mathbb{N}^*$, l'application $\Delta_r : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r, P \mapsto \Delta_r(P) = \Delta(P)$.
 - 2°) a) Justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.
 - 2°) b) Quel est le noyau de Δ_r ?
 - 2°) c) Montrer alors que $\text{Im } \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.
 - 2°) d) En déduire que l'application Δ est surjective.
- 3°) On désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynomiales s'annulant en 0. Montrer que la restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$.

- 4°) a) Dédurre de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

N_n s'appelle fonction polynomiale de Newton d'indice n .

- 4°) b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :

$$N_n(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

- 4°) c) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{0 \leq n \leq r}$ forme une base de $\mathcal{P}_r$. En déduire que la famille $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathcal{P}$.

- 4°) d) On adopte la notation usuelle : $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathcal{P}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

Prouver que, pour toute fonction polynomiale Q de degré r :

$$Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n(Q)(0) N_n.$$

Justifier ensuite l'écriture

$$Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n.$$

- 4°) e) La fonction polynomiale Q étant ainsi décomposée, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

- 4°) f) Application : en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de

$$\sum_{k=0}^n Q(k)$$

faisant intervenir P .

Calculer

$$\sum_{k=0}^n k^2.$$

5°) Établir, pour toute fonction polynomiale Q , pour tout entier naturel n et tout réel x , la relation :

$$\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).$$

6°) Dans toute cette question, on suppose que $r \in \mathbb{N}^*$.

6°) a) On désigne par $C(\Delta_r)$ le commutant de Δ_r dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$ des endomorphismes de $\mathcal{P}_r$, c'est-à-dire $C(\Delta_r) = \{g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r) \mid g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g\}$.

6°) a) i. Pour g et h appartenant à $C(\Delta_r)$, montrer que, si $g(N_r) = h(N_r)$, alors $g = h$.

6°) a) ii. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$. Justifier l'existence de $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que :

$$g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_1 N_1 + a_0 N_0.$$

6°) a) iii. En déduire que $C(\Delta_r)$ est de dimension $r+1$ et qu'il admet pour base :

$$(\text{Id}_{\mathcal{P}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^{r-1}, \Delta_r^r).$$

- 6°) a) iv. On introduit l'endomorphisme d de $\mathcal{P}$ qui à une fonction polynomiale P associe sa fonction dérivée P' . Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$. En supposant qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que $d = a_0 \text{Id}_{\mathcal{P}} + a_1 \Delta + \dots + a_r \Delta^r$, calculer $d(N_{r+1})$. Conclure à une contradiction.
- 6°) b) Préciser la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{0 \leq n \leq r}$. Montrer que $\Delta_r^{r+1} = 0$. L'endomorphisme Δ_r est-il diagonalisable ?
- 6°) c) Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathcal{P}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$?

Partie II

On note toujours $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies, pour tout x réel, par $N_0(x) = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $N_n(x) = x(x-1) \cdots (x-n+1)/n!$.

- 1°) Recherche d'un équivalent de $|N_n(x)|$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

On fixe x un réel non égal à un entier naturel.

Pour t réel, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = n^t |N_n(x)|$.

- 1°) a) Préciser, selon le réel t , la nature de la série de terme général $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

- 1°) b) Que conclure pour la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?

En déduire qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que $|N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$.

- 2°) Série de Newton associée à une fonction

On considère une application f de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

À cette application, on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i).$$

2°) a) Soit $b > 0$, préciser la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque f est l'application $x \mapsto b^x$.

2°) b) Pour n entier naturel, on note Q la fonction polynomiale

$$\sum_{k=0}^n a_k N_k.$$

Justifier que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = \Delta^k(Q)(0)$.

Montrer alors que la fonction

$$x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$$

s'annule en $0, 1, \dots, n$.

2°) c) On suppose de plus que f est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout x réel positif, il existe un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

Indication : on pourra utiliser, lorsque $x \notin \{0, \dots, n\}$, la fonction auxiliaire

$$\varphi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(t) - N_{n+1}(t)A,$$

avec A un réel choisi tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

- 2°) d) On note toujours f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et vérifiant la propriété suivante : il existe une constante M strictement positive telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq M.$$

Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

En déduire que si une telle fonction s'annule sur $\mathbb{N}$, c'est la fonction nulle.

- 3°) Étude de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} h^n N_n(x)$$

avec h réel

- 3°) a) Lorsque $|h| > 1$, montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente pour tout x réel non égal à un entier naturel.

- 3°) b) On suppose que $|h| < 1$.

- 3°) b) i. Montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente pour tout x réel.

- 3°) b) ii. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout n entier naturel et tout x réel :

$$(1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

Puis, lorsque $h \neq 0$, établir que la suite

$$\left(\frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est bornée. Le cas $h = 0$ sera traité directement dans la question suivante.

3°) b) iii. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x).$$

3°) c) On suppose que $h = 1$.

3°) c) i. Montrer que la série de terme général $N_n(x)$ est divergente pour $x \leq -1$.

3°) c) ii. En reprenant la méthode préconisée au II.3°) b), établir que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} N_n(x)$$

est convergente pour $x > -1$ et que :

$$\forall x > -1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x.$$

3°) d) On suppose que $h = -1$.

3°) d) i. Préciser les réels x pour lesquels la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ?

3°) d) ii. Justifier, pour tout x réel et tout entier naturel n strictement positif, la formule :

$$N_0(x) - N_1(x) + \cdots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1).$$

3°) d) iii. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x)$$

lorsque $x \geq 0$.