



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2008

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I

On note $\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$. Tous les espaces vectoriels et coefficients considérés sont réels.

1°) a)

Si P est une fonction polynomiale, $x \mapsto P(x+1)$ et $x \mapsto P(x)$ sont polynomiales, donc leur différence l'est aussi. Ainsi Δ est bien une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même.

Pour $P, Q \in \mathcal{P}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(aP + bQ)(x) = a(P(x+1) - P(x)) + b(Q(x+1) - Q(x)) = a\Delta(P)(x) + b\Delta(Q)(x).$$

L'égalité valant pour tout x , Δ est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

1°) b)

Écrivons $P(x) = a_r x^r + \dots + a_0$ avec $r \geq 1$ et $a_r \neq 0$. Pour $j \geq 1$, le binôme donne

$$(x+1)^j - x^j = jx^{j-1} + \sum_{k=0}^{j-2} \binom{j}{k} x^k,$$

où la somme est vide pour $j = 1$. Le terme de degré r disparaît donc dans $\Delta(P)$, et son coefficient de degré $r-1$ vaut $ra_r \neq 0$; les termes de degré inférieur de P ne contribuent pas à ce coefficient.

Ainsi $\deg \Delta(P) = r-1$, et son coefficient dominant est ra_r .

1°) c)

Toute fonction constante vérifie $P(x+1) - P(x) = 0$, donc appartient au noyau.

Réciproquement, si P n'est pas constante, son degré est au moins 1 et 1°) b) montre que $\Delta(P)$ est un polynôme non nul. Donc

$$\text{Ker } \Delta = \mathcal{P}_0 = \text{Vect}\{1\}.$$

2°) a)

Si $P \in \mathcal{P}_r$ est non constant, $\Delta(P)$ est de degré au plus $r-1$; si P est constant, $\Delta(P) = 0$. Dans tous les cas, $\Delta(P) \in \mathcal{P}_r$. La restriction $\Delta_r : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r$ est donc bien définie.

Elle est linéaire comme restriction de l'application linéaire Δ à un sous-espace stable.

2°) b)

Par 1°) c), $\text{Ker } \Delta_r = \mathcal{P}_r \cap \text{Ker } \Delta = \mathcal{P}_0$. Son noyau est donc de dimension 1.

2°) c)

D'après 1°) b), $\text{Im } \Delta_r \subset \mathcal{P}_{r-1}$. L'espace $\mathcal{P}_r$ a pour base $(1, x, \dots, x^r)$, donc pour dimension $r+1$. Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Im } \Delta_r = (r+1) - 1 = r.$$

Or $\dim \mathcal{P}_{r-1} = r$. L'inclusion entre sous-espaces de même dimension est donc une égalité :

$$\text{Im } \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}.$$

2°) d)

Soit $Q \in \mathcal{P}$. Si $Q = 0$, il possède l'antécédent $P = 0$. Sinon, notons $s = \deg Q \geq 0$. La

question précédente appliquée à $r = s + 1 \geq 1$ donne $Q \in \mathcal{P}_s = \text{Im } \Delta_{s+1}$. Il existe donc $P \in \mathcal{P}_{s+1}$ tel que $\Delta(P) = Q$.

Chaque élément de $\mathcal{P}$ possède ainsi un antécédent : Δ est surjective.

3°)

La restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est linéaire. Si $P \in \mathcal{E}$ et $\Delta(P) = 0$, 1°) c) impose que P soit constant, et $P(0) = 0$ impose alors $P = 0$. La restriction est donc injective.

Pour sa surjectivité, soit $Q \in \mathcal{P}$. Par 2°) d), choisissons $P \in \mathcal{P}$ tel que $\Delta(P) = Q$. Le polynôme $R = P - P(0)$ vérifie $R(0) = 0$ et $\Delta(R) = \Delta(P) = Q$. Ainsi $R \in \mathcal{E}$ est un antécédent de Q par la restriction.

La restriction est donc une application linéaire bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$, autrement dit un isomorphisme. Cette preuve ne déduit pas une bijection de la seule injectivité en dimension infinie.

4°) a)

On impose $N_0 = 1$. Supposons N_{n-1} construit pour un entier $n \geq 1$. L'isomorphisme de 3°) fournit un unique $N_n \in \mathcal{E}$ tel que $\Delta(N_n) = N_{n-1}$. L'appartenance à $\mathcal{E}$ signifie précisément $N_n(0) = 0$.

La construction par récurrence donne donc une suite ayant les propriétés requises. Toute autre suite coïncide avec elle en 0, puis à chaque indice par l'unicité de l'antécédent dans $\mathcal{E}$. Il existe exactement une telle suite.

4°) b)

Définissons $F_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$F_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)/n!.$$

Chaque F_n pour $n \geq 1$ s'annule en 0. Pour $n = 1$, $F_1(x) = x$ et $\Delta(F_1) = 1 = F_0$.

Pour $n \geq 2$, les produits définissant $F_n(x+1)$ et $F_n(x)$ ont le facteur commun $x(x-1)\cdots(x-n+2)$. Ainsi

$$F_n(x+1) - F_n(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{n!}((x+1) - (x-n+1))$$

$$= \frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!} = F_{n-1}(x).$$

La suite (F_n) vérifie les propriétés de 4°) a). Par unicité, $F_n = N_n$ pour tout n , ce qui établit la formule demandée.

4°) c)

Le polynôme N_n est de degré n et de coefficient dominant $1/n!$, y compris pour $n = 0$. Pour montrer la liberté de $(N_0, \dots, N_r)$, supposons

$$\sum_{j=0}^r c_j N_j = 0.$$

Si un coefficient est non nul, notons j_0 le plus grand indice correspondant ; le coefficient de degré j_0 de la somme vaut $c_{j_0}/j_0! \neq 0$, contradiction.

La famille est donc libre et comporte $r+1$ éléments dans l'espace $\mathcal{P}_r$ de dimension $r+1$: c'est une base.

Tout polynôme appartient à un certain $\mathcal{P}_r$, donc est combinaison linéaire finie des N_n . Toute relation linéaire finie entre les N_n est contenue dans une famille initiale $(N_0, \dots, N_r)$ et est donc triviale. Ainsi $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$.

4°) d)

Par récurrence sur le nombre d'applications de Δ , les relations de 4°) a) donnent

$$\Delta^k(N_j) = \begin{cases} N_{j-k} & \text{si } k \leq j, \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Comme $N_0(0) = 1$ et $N_\ell(0) = 0$ pour $\ell \geq 1$, on en déduit $\Delta^k(N_j)(0) = 1$ si $j = k$, et 0 sinon.

Soit Q de degré r . Par 4°) c), écrivons

$$Q = \sum_{j=0}^r c_j N_j.$$

En appliquant Δ^k et en évaluant en 0, pour $0 \leq k \leq r$, on obtient

$$\Delta^k(Q)(0) = \sum_{j=0}^r c_j \Delta^k(N_j)(0) = c_k.$$

Ainsi

$$Q = \sum_{k=0}^r \Delta^k(Q)(0) N_k.$$

Pour $k > r$, $\Delta^k(Q) = 0$: la somme infinie annoncée n'a en réalité qu'un nombre fini de termes non nuls. Son écriture est donc légitime sans question de convergence. Pour $Q = 0$, tous les coefficients sont nuls et la même formule s'applique.

4°) e)

Posons $c_k = \Delta^k(Q)(0)$. Lorsque Q est non nul de degré r , on a

$$Q = \sum_{k=0}^r c_k N_k.$$

Comme $\Delta(N_{k+1}) = N_k$, le polynôme

$$P_0 = \sum_{k=0}^r c_k N_{k+1}$$

vérifie $\Delta(P_0) = Q$.

Un polynôme P est solution si et seulement si $\Delta(P - P_0) = 0$. Par 1°) c), cela équivaut à ce que $P - P_0$ soit constant. Toutes les solutions sont donc

$$P = C + \sum_{k=0}^r \Delta^k(Q)(0) N_{k+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante C est égale à $P(0)$, car tous les N_{k+1} s'annulent en 0. Pour $Q = 0$, les solutions sont exactement les constantes.

4°) f)

Si $\Delta(P) = Q$, alors $Q(k) = P(k+1) - P(k)$. La somme finie est télescopique :

$$\sum_{k=0}^n Q(k) = P(n+1) - P(0).$$

Méthode 1 — Base de Newton pour la somme des carrés

Pour $Q(x) = x^2$, $Q(0) = 0$, $\Delta(Q)(x) = 2x + 1$, donc $\Delta(Q)(0) = 1$, et $\Delta^2(Q) = 2$. Ainsi $Q = N_1 + 2N_2$ et on peut choisir $P = N_2 + 2N_3$, avec $P(0) = 0$. Par la formule télescopique,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = N_2(n+1) + 2N_3(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Les expressions factorielles donnent aussi cette égalité pour $n = 0$ et $n = 1$, où certains produits s'annulent.

Méthode 2 — Recherche dans la base des monômes

Cherchons un polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tel que $\Delta(P)(x) = x^2$. Le binôme donne

$$\Delta(P)(x) = 3ax^2 + (3a + 2b)x + (a + b + c).$$

L'identification des coefficients impose $a = 1/3$, $b = -1/2$, $c = 1/6$. Ainsi

$P(x) = x^3/3 - x^2/2 + x/6$ et

$$P(n+1) - P(0) = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On retrouve la même somme. La base de Newton simplifie l'opérateur Δ ; la base des monômes conduit ici à un petit système d'identification.

5°)

Méthode 1 — Binôme d'endomorphismes qui commutent

Définissons l'endomorphisme de translation τ par $\tau(Q)(x) = Q(x+1)$. On a $\Delta = \tau - \text{Id}_{\mathcal{P}}$. La translation et l'identité commutent ; le binôme, qui est une identité finie pour de tels endomorphismes, donne

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \tau^i (-\text{Id}_{\mathcal{P}})^{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \tau^i.$$

Or $\tau^i(Q)(x) = Q(x+i)$. En appliquant cette identité à Q , on obtient la formule demandée, y compris pour $n = 0$.

Méthode 2 — Récurrence et triangle de Pascal

Pour $n = 0$, le membre de droite est $Q(x)$: l'égalité est vraie. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$$\Delta^{n+1}(Q)(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+1+i) - \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i).$$

Pour $1 \leq j \leq n$, le coefficient de $Q(x+j)$ dans cette différence est

$$(-1)^{n+1-j} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) = (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j}.$$

Les coefficients aux extrémités sont $(-1)^{n+1}$ pour $j = 0$ et 1 pour $j = n+1$. Ils correspondent également à la formule du rang $n+1$. La récurrence est donc établie.

Le binôme d'opérateurs explique la structure de la formule ; la récurrence permet de vérifier explicitement ses indices et ses signes.

6°) a) i.

Si g commute avec Δ_r , il commute aussi avec chaque puissance de Δ_r , par récurrence.

Pour $0 \leq k \leq r$, la relation $N_k = \Delta_r^{r-k}(N_r)$ donne

$$g(N_k) = \Delta_r^{r-k}(g(N_r)).$$

La même égalité vaut pour h . Si $g(N_r) = h(N_r)$, on obtient $g(N_k) = h(N_k)$ pour tous les éléments de la base $(N_0, \dots, N_r)$. Par linéarité, $g = h$.

6°) a) ii.

Le vecteur $g(N_r)$ appartient à $\mathcal{P}_r$. D'après 4°) c), $(N_0, \dots, N_r)$ est une base de cet espace. Il existe donc des réels uniques $a_0, \dots, a_r$ tels que

$$g(N_r) = \sum_{j=0}^r a_j N_j.$$

6°) a) iii.

Le commutant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$: l'application nulle commute avec Δ_r , et les relations de commutation sont conservées par combinaison linéaire. Chacune des puissances Δ_r^j commute avec Δ_r .

Pour $g \in C(\Delta_r)$, écrivons

$$g(N_r) = \sum_{j=0}^r a_j N_j$$

et définissons

$$H = \sum_{j=0}^r a_j \Delta_r^{r-j}.$$

Alors $H \in C(\Delta_r)$ et

$$H(N_r) = \sum_{j=0}^r a_j N_j = g(N_r).$$

Par 6°) a) i., $H = g$. Ainsi $(\text{Id}_{\mathcal{P}_r}, \Delta_r, \dots, \Delta_r^r)$ engendre le commutant.

Si

$$\sum_{j=0}^r b_j \Delta_r^j = 0,$$

l'évaluation en N_r donne

$$\sum_{j=0}^r b_j N_{r-j} = 0.$$

La liberté de la base de Newton impose $b_j = 0$ pour tout j . La famille des puissances est donc libre, puis une base du commutant. Par conséquent $\dim C(\Delta_r) = r + 1$.

6°) a) iv.

La dérivation est un endomorphisme de $\mathcal{P}$. Pour tout $P \in \mathcal{P}$ et tout réel x ,

$$d(\Delta(P))(x) = P'(x+1) - P'(x) = \Delta(d(P))(x).$$

Donc $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.

Supposons maintenant que

$$d = \sum_{j=0}^r a_j \Delta^j$$

sur tout $\mathcal{P}$. Appliquée à N_{r+1} , cette égalité donne

$$d(N_{r+1}) = a_0 N_{r+1} + a_1 N_r + \cdots + a_r N_1.$$

Tous les polynômes du membre de droite s'annulent en 0, donc l'hypothèse impose $d(N_{r+1})(0) = 0$.

Calculons cette valeur à partir de la formule de 4°) b). La dérivée du produit donne

$$d(N_{r+1})(x) = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{j=0}^r \prod_{\substack{0 \leq k \leq r \\ k \neq j}} (x - k).$$

À $x = 0$, tous les termes sauf celui de $j = 0$ contiennent le facteur x . Il reste

$$d(N_{r+1})(0) = \frac{(-1)(-2) \cdots (-r)}{(r+1)!} = \frac{(-1)^r}{r+1} \neq 0.$$

C'est une contradiction. La dérivation commute avec Δ sur $\mathcal{P}$ mais n'est pas une combinaison linéaire finie de ses puissances. Cela ne contredit pas 6°) a) iii., qui porte sur un espace de degré borné, de dimension finie.

6°) b)

Dans la base ordonnée $(N_0, N_1, \dots, N_r)$, $\Delta_r(N_0) = 0$ et $\Delta_r(N_j) = N_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq r$. Sa matrice J , de taille $r+1$, est donc définie par

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq r + 1.$$

Autrement dit, seuls les coefficients immédiatement au-dessus de la diagonale valent 1. Pour chaque élément de la base, $\Delta_r^{r+1}(N_j) = 0$; donc $\Delta_r^{r+1} = 0$. En revanche, $\Delta_r^r(N_r) = N_0 \neq 0$.

Si λ est une valeur propre et $P \neq 0$ un vecteur propre, alors $0 = \Delta_r^{r+1}(P) = \lambda^{r+1}P$, donc $\lambda = 0$. Si Δ_r était diagonalisable, une base de vecteurs propres serait entièrement associée à 0 ; l'endomorphisme serait nul. Or $r \geq 1$ et $\Delta_r(N_1) = N_0 \neq 0$. Ainsi Δ_r n'est pas diagonalisable.

6°) c)

Supposons $g^2 = \Delta_r$. Par associativité, $g\Delta_r = g^3 = \Delta_r g$; donc g appartient au commutant. D'après 6°) a) iii., il existe $b_0, \dots, b_r$ tels que

$$g = \sum_{j=0}^r b_j \Delta_r^j.$$

Comme $\Delta_r(N_0) = 0$, on a $g(N_0) = b_0 N_0$, puis $g^2(N_0) = b_0^2 N_0$. Mais $g^2(N_0) = \Delta_r(N_0) = 0$, donc $b_0 = 0$.

Le vecteur N_1 appartient à $\mathcal{P}_r$ puisque $r \geq 1$. Toutes les puissances de Δ_r d'ordre au moins 2 l'annulent, donc $g(N_1) = b_1 N_0$. Dès lors $g^2(N_1) = b_1 g(N_0) = 0$, tandis que $\Delta_r(N_1) = N_0 \neq 0$.

Cette contradiction montre qu'il n'existe aucun endomorphisme g de $\mathcal{P}_r$ tel que $g^2 = \Delta_r$.

Partie II

1°) a)

Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : on définit u_n et v_n pour $n \geq 1$. L'expression 0^t n'est pas définie pour tout réel t , et l'étude de la limite ne dépend pas de l'ajout d'un premier terme.

Fixons $x \notin \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Aucun facteur de $N_n(x)$ n'est nul ; donc $u_n > 0$ pour chaque $n \geq 1$, et le logarithme définissant v_n existe.

La formule du produit donne $N_{n+1}(x) = \frac{x-n}{n+1} N_n(x)$. Pour n assez grand, $n > x$, donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t \frac{n-x}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$v_n = (t-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Utilisons les développements limités du logarithme en 0, appliqués respectivement à $1/n$ et à $-x/n$; ce sont des substitutions dans un développement usuel, sans composition de développements limités :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $x = 0$, la deuxième égalité serait aussi vraie, mais cette valeur est exclue ici. En additionnant ces expansions, on obtient

$$v_n = \frac{t-x-1}{n} - \frac{t-1+x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $w_n = v_n - (t-x-1)/n$ est absolument convergente : pour n assez grand, $|w_n| \leq K/n^2$ avec une constante K , et la série de Riemann d'exposant 2 converge.

Si $t = x + 1$, $v_n = w_n$, donc

$$\sum v_n$$

est absolument convergente. Si $t > x + 1$, ses sommes partielles sont la somme d'une constante positive fois une somme harmonique et d'une suite convergente ; elles tendent vers $+\infty$. Si $t < x + 1$, elles tendent vers $-\infty$.

Ainsi

$$\sum v_n$$

converge exactement pour $t = x + 1$; sinon elle diverge, avec le signe précisé ci-dessus. Dans ces derniers cas, elle n'est pas absolument convergente non plus, car $|v_n| \sim |t - x - 1|/n$.

1°) b)

Les logarithmes permettent de transformer le produit des rapports en somme télescopique. Pour $n \geq 2$,

$$\ln u_n = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k.$$

Par 1°) a) et continuité de l'exponentielle, on en déduit :

- Si $t < x + 1$, $\ln u_n \rightarrow -\infty$, donc $u_n \rightarrow 0$.
- Si $t > x + 1$, $\ln u_n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $t = x + 1$, $\ln u_n$ tend vers un réel fini $L(x)$, donc $u_n \rightarrow e^{L(x)} > 0$.

Posons $C(x) = e^{L(x)}$. Pour $t = x + 1$, $u_n = n^{x+1}|N_n(x)|$, donc

$$n^{x+1}|N_n(x)| \rightarrow C(x) > 0,$$

ce qui équivaut à $|N_n(x)| \sim C(x)/n^{x+1}$.

2°) a)

Pour $f(x) = b^x$ avec $b > 0$, on utilise le binôme, qui concerne ici une somme finie :

$$a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} b^i = (b-1)^n.$$

Ainsi $a_0 = 1$ et $a_n = (b-1)^n$ pour $n \geq 1$. En particulier, si $b = 1$, tous les coefficients d'indice strictement positif sont nuls.

2°) b)

Pour $0 \leq k \leq n$, les identités $\Delta^k(N_j)(0) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon, établies en I.4°) d), donnent

$$\Delta^k(Q)(0) = \sum_{j=0}^n a_j \Delta^k(N_j)(0) = a_k.$$

Montrons maintenant que Q interpole f en $0, 1, \dots, n$.

Méthode 1 — Système triangulaire des différences

Par I.5°),

$$\Delta^k(Q)(0) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} Q(i).$$

L'égalité avec a_k et la définition de ce dernier donnent

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (f(i) - Q(i)) = 0 \quad (0 \leq k \leq n).$$

Pour $k = 0$, cela donne $f(0) - Q(0) = 0$. Si l'on sait $f(i) - Q(i) = 0$ pour $0 \leq i < k$, tous les termes de cette relation sauf celui de $i = k$ disparaissent. Le coefficient de ce dernier est 1, donc $f(k) - Q(k) = 0$. La récurrence prouve $Q(k) = f(k)$ pour tous les entiers $0 \leq k \leq n$.

Méthode 2 — Inversion binomiale par sommes finies

Fixons $j \in \{0, \dots, n\}$. La formule du produit donne $N_k(j) = \binom{j}{k}$ pour $k \leq j$, et $N_k(j) = 0$ pour $k > j$. Ainsi

$$Q(j) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i).$$

Toutes les sommes étant finies, on peut les réordonner. L'identité, vérifiée à partir des factorielles,

$$\binom{j}{k} \binom{k}{i} = \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i}$$

donne

$$Q(j) = \sum_{i=0}^j f(i) \binom{j}{i} \sum_{k=i}^j (-1)^{k-i} \binom{j-i}{k-i}.$$

Si $i < j$, la somme intérieure vaut $(1 - 1)^{j-i} = 0$ par le binôme ; si $i = j$, elle comporte le seul terme 1. Il reste donc $Q(j) = f(j)$.

La première méthode exploite directement les différences successives ; la seconde explique la compensation des coefficients binomiaux. Dans les deux cas, $f - Q$ s'annule en tous les points annoncés.

2°) c)

On suit l'indication et on justifie les applications successives de Rolle. Posons

$$Q = \sum_{k=0}^n a_k N_k$$

et fixons $x \geq 0$.

Si $x \in \{0, \dots, n\}$, 2°) b) donne $f(x) = Q(x)$ et le produit définissant N_{n+1} donne $N_{n+1}(x) = 0$. La formule est donc vraie, par exemple avec $\theta = 0$.

Si $x \notin \{0, \dots, n\}$, alors $N_{n+1}(x) \neq 0$. Définissons

$$A = \frac{f(x) - Q(x)}{N_{n+1}(x)}, \quad \varphi(t) = f(t) - Q(t) - AN_{n+1}(t).$$

Par construction, $\varphi(x) = 0$. Pour chaque entier $j \in \{0, \dots, n\}$, $f(j) - Q(j) = 0$ et $N_{n+1}(j) = 0$, donc $\varphi(j) = 0$.

La fonction φ possède ainsi $n + 2$ zéros distincts dans le segment $[0, \max(n, x)]$. Elle est continue sur ce segment et dérivable autant de fois que nécessaire à l'intérieur, car f est indéfiniment dérivable et les autres termes sont polynomiaux. En ordonnant ces zéros, le théorème de Rolle fournit au moins $n + 1$ zéros distincts de φ' entre deux zéros consécutifs de φ , puis au moins n zéros de φ'' , et ainsi de suite. Au bout de $n + 1$ applications, il existe

$$\theta \in]0, \max(n, x)[\quad \text{tel que} \quad \varphi^{(n+1)}(\theta) = 0.$$

Le polynôme Q est de degré au plus n , donc $Q^{(n+1)} = 0$. Le polynôme N_{n+1} est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $1/(n + 1)!$, donc $N_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Il vient

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A.$$

Par conséquent $A = f^{(n+1)}(\theta)$ et, en utilisant la définition de A ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

Le point θ appartient toujours au domaine de f . Pour $n = 0$ et $x > 0$, l'argument comporte une seule application de Rolle et reste valable.

2°) d)

Notons

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x).$$

D'après 2°) c), il existe $\theta \geq 0$ tel que

$$f(x) - S_n(x) = N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

L'hypothèse s'applique à l'ordre $n + 1 \geq 1$ et donne $|f^{(n+1)}(\theta)| \leq M(n + 1)$. Ainsi

$$|f(x) - S_n(x)| \leq M(n + 1) |N_{n+1}(x)|.$$

Si x est un entier naturel j , le terme $N_{n+1}(j)$ est nul pour $n \geq j$. On a donc déjà $S_n(j) = f(j)$ pour ces indices.

Si $x \geq 0$ n'est pas entier, alors $x > 0$, et II.1°) b) donne

$$(n + 1) |N_{n+1}(x)| \sim \frac{C(x)}{(n + 1)^x} \rightarrow 0.$$

Dans les deux cas, $S_n(x) \rightarrow f(x)$. La série converge donc, avec pour somme

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x).$$

Enfin, si $f(j) = 0$ pour tous les entiers naturels j , la définition de a_k montre que tous ces coefficients sont nuls. La formule précédente donne $f(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$. La fonction est nulle sur tout son domaine.

3°) a)

Pour $x \notin \mathbb{N}$, l'équivalent de II.1°) b) donne

$$|h^n N_n(x)| \sim C(x) \frac{|h|^n}{n^{x+1}}.$$

Si $|h| > 1$, posons $c = \ln |h| > 0$. Le logarithme du facteur $|h|^n/n^{x+1}$ vaut $nc - (x+1) \ln n$, qui tend vers $+\infty$ puisque $\ln n/n \rightarrow 0$. Donc $|h^n N_n(x)| \rightarrow +\infty$.

En particulier, le terme général ne tend pas vers 0; la série diverge. Pour $x \in \mathbb{N}$, exclu de la question, les termes sont au contraire nuls à partir d'un certain rang.

3°) b) i.

Si $h = 0$, seul le terme d'indice 0 est non nul et vaut 1; la série est absolument convergente. Si $x = j \in \mathbb{N}$, on a $N_n(j) = 0$ pour $n > j$: la série est encore une somme finie.

Supposons $0 < |h| = q < 1$ et $x \notin \mathbb{N}$. Par II.1°) b),

$$|h^n N_n(x)| \sim C(x) q^n n^{-x-1}.$$

Choisissons ρ tel que $q < \rho < 1$. La croissance comparée d'une puissance et d'une exponentielle donne

$$\left(\frac{q}{\rho}\right)^n n^{-x-1} \rightarrow 0.$$

Il en résulte $q^n n^{-x-1} \leq \rho^n$ pour n assez grand, puis $|h^n N_n(x)| \leq K \rho^n$ pour une constante $K > 0$. La série géométrique

$$\sum \rho^n$$

converge ; par comparaison, la série étudiée est absolument convergente pour tout réel x .

3°) b) ii.

Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : la suite contenant le facteur $1/|h|^n$ est étudiée uniquement pour $h \neq 0$. La formule de Taylor reste valable pour $h = 0$, et la somme de la série dans ce cas sera donnée en iii.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $u > -1$, la fonction $F(u) = (1+u)^x$ est indéfiniment dérivable et

$$F^{(k)}(u) = x(x-1)\cdots(x-k+1)(1+u)^{x-k} = k!N_k(x)(1+u)^{x-k}.$$

Pour $k = 0$, on retrouve F et $N_0 = 1$. Comme $|h| < 1$, le segment reliant 0 et h est inclus dans $] -1, +\infty[$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n s'applique sur ce segment, avec l'intégrale orientée si $h < 0$:

$$F(h) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{1}{n!} \int_0^h (h-u)^n F^{(n+1)}(u) du.$$

En substituant les dérivées calculées, le reste devient

$$\frac{(n+1)!}{n!} N_{n+1}(x) \int_0^h (h-u)^n (1+u)^{x-n-1} du$$

$$= (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

Cela établit la formule demandée pour tout $n \geq 0$.

Supposons maintenant $h \neq 0$ et posons $q = |h| \in]0, 1[$. On va borner le rapport intervenant dans l'intégrale.

Si $h = q > 0$ et $0 \leq u \leq q$, on a $0 \leq (q-u)/(1+u) \leq q$.

Si $h = -q < 0$ et $-q \leq u \leq 0$, alors

$$\left| \frac{h-u}{1+u} \right| = \frac{q+u}{1+u} \leq q,$$

car $1+u > 0$ et l'inégalité équivaut à $(1-q)u \leq 0$. Elle est donc vraie également dans ce cas.

La fonction $u \mapsto (1+u)^{x-1}$ est continue et positive sur le segment compact $I_h = [\min(0, h), \max(0, h)]$, donc elle y admet un maximum fini $K_{x,h} > 0$. En majorant l'intégrale en valeur absolue, on obtient

$$\left| \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq q^n K_{x,h} |h|.$$

Après division par $q^n > 0$,

$$\left| \frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du \right| \leq K_{x,h} |h|.$$

La borne est indépendante de n : la suite est bien bornée. Le cas $n = 0$ est inclus dans cette majoration.

3°) b) iii.

Si $h = 0$, la série a pour somme $N_0(x) = 1 = (1 + 0)^x$.

Supposons $0 < |h| = q < 1$. La formule et la borne de ii. donnent

$$\left| (1 + h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) \right| \leq K_{x,h} |h| (n + 1) |N_{n+1}(x)| q^n.$$

Si $x = j \in \mathbb{N}$, le membre de droite est nul pour $n \geq j$.

Si $x \notin \mathbb{N}$, II.1°) b) donne $(n + 1) |N_{n+1}(x)| \sim C(x) / (n + 1)^x$. Le produit de cette puissance par q^n tend vers 0 par croissance comparée, quel que soit le réel x .

Le reste tend donc vers 0, et on conclut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x) = (1 + h)^x.$$

Cette égalité résulte de la limite des sommes partielles avec une borne explicite du reste ; elle ne nécessite pas de théorie générale des séries entières.

3°) c) i.

Si $x < -1$, alors $x \notin \mathbb{N}$ et II.1°) b) donne $|N_n(x)| \sim C(x) n^{-x-1}$. L'exposant $-x - 1$ est strictement positif, donc $|N_n(x)| \rightarrow +\infty$. Le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge.

Au point $x = -1$, la formule du produit donne

$$N_n(-1) = \frac{(-1)(-2) \cdots (-n)}{n!} = (-1)^n$$

pour $n \geq 1$, et $N_0(-1) = 1$. Le terme général ne tend toujours pas vers 0 : la série diverge aussi. La divergence est ainsi établie pour $x \leq -1$.

3°) c) ii.

On reprend Taylor avec reste intégral, comme demandé. La fonction $F(u) = (1+u)^x$ est régulière sur un ouvert contenant $[0, 1]$; le calcul de b) ii. reste donc valable à $h = 1$:

$$2^x - \sum_{k=0}^n N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du.$$

Posons $K_x = \max_{u \in [0,1]} (1+u)^{x-1}$, fini par continuité sur le segment. Pour $u \in [0, 1]$, on a $0 \leq (1-u)/(1+u) \leq 1-u$. Ainsi

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1} du \leq K_x \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{K_x}{n+1}.$$

Il en résulte la majoration améliorée

$$\left| 2^x - \sum_{k=0}^n N_k(x) \right| \leq K_x |N_{n+1}(x)|.$$

Si $x \in \mathbb{N}$, ce reste est nul à partir d'un certain rang. Sinon, si $x > -1$, II.1°) b) donne $|N_{n+1}(x)| \sim C(x)/(n+1)^{x+1} \rightarrow 0$ puisque $x+1 > 0$.

Donc, pour tous les réels $x > -1$, la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x.$$

Pour préciser la nature de cette convergence, si $x > 0$ non entier, la série des valeurs absolues converge par comparaison à une série de Riemann d'exposant $x+1 > 1$. Pour $x \in \mathbb{N}$, la somme est finie. Pour $-1 < x < 0$, la série des valeurs absolues diverge par le même équivalent avec $0 < x+1 < 1$, tandis que la série elle-même converge comme on vient de le prouver. Le résultat au bord a donc été établi directement, sans prolonger automatiquement la formule obtenue pour $|h| < 1$.

3°) d) i.

Si $x = j \in \mathbb{N}$, $N_n(j) = 0$ pour $n > j$; la série est finie, donc absolument convergente.

Si $x \notin \mathbb{N}$, II.1°) b) donne $|(-1)^n N_n(x)| = |N_n(x)| \sim C(x)/n^{x+1}$. Par équivalence de séries à termes positifs et le critère des séries de Riemann, la série est absolument convergente exactement lorsque $x + 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

En réunissant les cas, la convergence absolue a lieu exactement pour $x \geq 0$.

Pour déterminer la convergence simple restante, supposons $x < 0$. Chaque facteur $x - k$ du produit définissant $N_n(x)$ est strictement négatif, donc $(-1)^n N_n(x) = |N_n(x)| > 0$. La série est alors une série à termes positifs, équivalents à $C(x)/n^{x+1}$ avec $x + 1 < 1$, et elle diverge.

Ainsi la série converge exactement pour $x \geq 0$, et sa convergence y est toujours absolue.

3°) d) ii.

On commence par établir l'identité polynomiale de Pascal

$$N_n(x) = N_n(x-1) + N_{n-1}(x-1) \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 1$, elle s'écrit $x = (x-1) + 1$. Pour $n \geq 2$, on factorise le produit commun :

$$\begin{aligned} N_n(x) - N_n(x-1) &= \frac{(x-1) \cdots (x-n+1)}{n!} (x - (x-n)) \\ &= \frac{(x-1) \cdots (x-n+1)}{(n-1)!} = N_{n-1}(x-1). \end{aligned}$$

Méthode 1 — Récurrence sur les sommes partielles

Pour $n = 1$, $N_0(x) - N_1(x) = 1 - x = -N_1(x - 1)$. Supposons la formule vraie au rang $n - 1 \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) &= (-1)^{n-1} N_{n-1}(x - 1) + (-1)^n N_n(x) \\ &= (-1)^n (N_n(x) - N_{n-1}(x - 1)) = (-1)^n N_n(x - 1). \end{aligned}$$

La récurrence conclut pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Annulation télescopique

Pour $n \geq 1$, en remplaçant chaque $N_k(x)$, $k \geq 1$, par l'identité de Pascal,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k N_k(x - 1) + \sum_{k=1}^n (-1)^k N_{k-1}(x - 1).$$

En posant $j = k - 1$ dans la dernière somme, elle devient

$$- \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j N_j(x - 1).$$

Tous les termes d'indices 1 à $n - 1$ se compensent, et $1 - N_0(x - 1) = 0$. Il reste exactement $(-1)^n N_n(x - 1)$.

La récurrence met en évidence le passage d'un rang au suivant ; la seconde méthode révèle directement la structure télescopique de la somme.

3°) d) iii.

La convergence pour $x \geq 0$ a été prouvée en i. Il reste à calculer la limite des sommes partielles grâce à ii.

Si $x = 0$, $N_0(0) = 1$ et $N_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$, donc la somme vaut 1. L'identité de ii. donne aussi $(-1)^n N_n(-1) = 1$.

Si x est un entier strictement positif, $x - 1 \in \mathbb{N}$, donc $N_n(x - 1) = 0$ pour $n > x - 1$. Les sommes partielles sont alors nulles à partir de ce rang, et la somme vaut 0.

Si $x > 0$ n'est pas entier, $x - 1 \notin \mathbb{N}$ et II.1°) b), appliquée au réel $x - 1$, donne

$$|N_n(x - 1)| \sim \frac{C(x - 1)}{n^x} \rightarrow 0.$$

Par ii.,

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k N_k(x) \right| = |N_n(x - 1)| \rightarrow 0,$$

donc la somme vaut encore 0.

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Relevé des adaptations

- II.1°) a)-b) : la suite $u_n = n^t |N_n(x)|$ et les logarithmes de rapports sont indexés à partir de $n = 1$. Cela rectifie l'indexation à partir de 0 du PDF, qui ferait intervenir 0^t pour un réel t quelconque. La limite et l'objectif des questions sont conservés.

- II.3°) b) ii.-iii. : la suite divisée par $|h|^n$ n'est étudiée que pour $h \neq 0$. Le cas $h = 0$ reste inclus dans la formule de Taylor et dans la somme finale, et est traité directement. Cette précision évite une division par zéro sans changer le résultat recherché.