



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2007

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Notations utiles

On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. On conserve les notations et la numérotation du sujet. En particulier, $A < B$ signifie que $B - A$ est symétrique définie positive.

Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

Question préliminaire

Il faut justifier la convergence de l'intégrale définissant $f(x)$ pour chaque $x > 0$, sans séparer deux intégrales qui pourraient diverger.

Rectification locale du préambule : on précise que φ est positive ou nulle et non identiquement nulle. Cette dernière hypothèse sera nécessaire en III-3°-b)-iii) pour obtenir une croissance stricte ; elle n'est pas nécessaire à la convergence démontrée ici. Si l'on autorisait $\varphi = 0$, la fonction matricielle correspondante serait constante.

Pour $t > 0$ et $x > 0$, une réduction au même dénominateur donne :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} = \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}.$$

Comme $\varphi(t) \geq 0$, on obtient :

$$\left| \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) \right| \leq \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \left(\frac{xt}{x+t} + \frac{1}{x+t} \right) \leq \left(x + \frac{1}{x} \right) \frac{\varphi(t)}{1+t^2}.$$

La fonction majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$ par hypothèse. L'intégrande est continue sur cet intervalle et son intégrale converge donc absolument, par comparaison, aux deux bornes. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°)

La fonction intégrée est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il suffit donc d'étudier séparément les deux bornes impropres.

Lorsque $t \rightarrow 0^+$:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \sim t^\alpha.$$

L'intégrale de référence $\int_0^1 t^\alpha dt$ converge exactement lorsque $\alpha > -1$. Pour $\alpha = -1$, une primitive est $\ln t$ et l'intégrale diverge ; pour $\alpha < -1$, la primitive $t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ montre aussi la divergence.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \sim t^{\alpha-2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} dt$ converge exactement lorsque $\alpha - 2 < -1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. Le cas $\alpha = 1$ est logarithmiquement divergent.

Par équivalence d'intégrandes positifs, la condition cherchée est donc :

$$\alpha \in]-1, 1[.$$

Pour ces valeurs, la question préliminaire appliquée à $\varphi(t) = t^\alpha$ assure l'existence de $f_\alpha(x)$ pour tout $x > 0$.

2°)

On calcule d'abord sur un segment et on passe ensuite aux limites. Pour $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_\varepsilon^R \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \ln(x+t) \right]_\varepsilon^R.$$

À l'infini, le terme entre crochets s'écrit :

$$\frac{1}{2} \ln(1 + R^{-2}) - \ln(1 + x/R) \rightarrow 0.$$

À la borne inférieure, il tend vers $-\ln x$. La convergence a déjà été justifiée. Il vient :

$$f_0(x) = \ln x \quad (x > 0).$$

L'intégrale du terme $t/(1+t^2)$ et celle de $1/(x+t)$ divergent séparément à l'infini ; le calcul porte bien sur leur différence.

3°)

Fixons $\alpha \in]-1, 0[$ et $x > 0$. Au voisinage de 0, $t^\alpha/(x+t) \sim t^\alpha/x$, qui est intégrable puisque $\alpha > -1$. À l'infini, $t^\alpha/(x+t) \sim t^{\alpha-1}$, qui est intégrable puisque $\alpha < 0$.

Définissons la constante finie et strictement positive :

$$K_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du > 0.$$

Sur un segment, le changement de variable $t = xu$, avec $dt = x du$, donne :

$$\int_\varepsilon^R \frac{t^\alpha}{x+t} dt = x^\alpha \int_{\varepsilon/x}^{R/x} \frac{u^\alpha}{1+u} du.$$

Les intégrales impropres sont convergentes ; en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt = K_\alpha x^\alpha.$$

L'autre intégrale qui intervient dans f_α converge également. En effet, $t^{\alpha+1}/(1+t^2)$ est équivalent à $t^{\alpha+1}$ en 0, et à $t^{\alpha-1}$ à l'infini. Posons :

$$D_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt.$$

Cette fois, la séparation des intégrales est licite, puisque les deux convergent. Ainsi :

$$f_\alpha(x) = -K_\alpha x^\alpha + D_\alpha.$$

On peut donc prendre $c = -K_\alpha < 0$ et $d = D_\alpha$, qui ne dépendent que de α .

4°) On fixe $\alpha \in]0, 1[$.

a)

On établit la dérivabilité à partir du taux d'accroissement, en majorant explicitement son écart à l'intégrale attendue.

Les deux intégrales définissant $f_\alpha(x+h)$ et $f_\alpha(x)$ sont absolument convergentes. Par linéarité et réduction au même dénominateur :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+h+t} \right) t^\alpha dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)} dt.$$

Pour $x > 0$, posons :

$$J_x = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt.$$

Cette intégrale converge : l'intégrande est équivalent à t^α/x^2 en 0 et à $t^{\alpha-2}$ à l'infini, avec $\alpha > -1$ et $\alpha < 1$. Elle est strictement positive.

Pour $0 < |h| < x/2$, on a $x+h+t \geq (x+t)/2$. D'autre part :

$$\frac{1}{(x+h+t)(x+t)} - \frac{1}{(x+t)^2} = -\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}.$$

Les intégrales de cette différence convergent absolument par la majoration suivante :

$$\left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - J_x \right| \leq 2|h| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^3} dt \leq \frac{2|h|}{x} J_x.$$

Le dernier membre tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$. Cela prouve, pour tout $x > 0$, que le taux d'accroissement tend vers J_x . Par définition de la dérivée :

$$f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt.$$

La preuve repose uniquement sur une estimation de l'erreur ; aucun échange non justifié entre limite et intégrale n'est effectué.

b)

Le changement de variable sur un segment, puis le passage aux bornes grâce à la convergence établie en a), donnent :

$$f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u)^2} du = f'_\alpha(1)x^{\alpha-1}.$$

Posons $L_\alpha = f'_\alpha(1)$. L'intégrande définissant L_α est strictement positif et intégrable, donc $L_\alpha > 0$.

La fonction $x \mapsto f_\alpha(x) - (L_\alpha/\alpha)x^\alpha$ est dérivable et de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle y est constante par le théorème des accroissements finis. Ainsi :

$$f_\alpha(x) = \frac{L_\alpha}{\alpha} x^\alpha + d.$$

Les constantes $c = L_\alpha/\alpha > 0$ et $d = f_\alpha(1) - c$ ne dépendent que de α .

Partie II : les matrices symétriques réelles

1°) Caractérisations des matrices définies positives.

a)

On utilise le théorème spectral réel, applicable car A est une matrice réelle symétrique.

Supposons d'abord A définie positive. Pour toute valeur propre λ , il existe un vecteur propre $X \neq 0$. Alors :

$$0 < {}^t()XAX = \lambda {}^t()XX = \lambda \|X\|^2.$$

Comme $\|X\|^2 > 0$, il en résulte $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons toutes les valeurs propres strictement positives. Le théorème spectral fournit une matrice P telle que ${}^t()PP = I_n$ et :

$$A = PD^tP, \quad D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \mu_k > 0.$$

Pour $X \neq 0$, la colonne $Z = {}^tPX$ n'est pas nulle puisque P est inversible. On a :

$${}^t()XAX = {}^t()ZDZ = \sum_{k=1}^n \mu_k z_k^2 > 0.$$

Au moins un z_k est non nul et tous les μ_k sont strictement positifs. Les deux implications établissent l'équivalence demandée.

b)

La forme quadratique vaut ${}^t()XAX = ax^2 + 2bxy + cy^2$. En développant :

$$(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2 = a^2x^2 + 2abxy + acy^2 = a {}^t()XAX.$$

Si A est définie positive, le choix $X = {}^t(1, 0)$ donne $a > 0$. On peut donc choisir $X = {}^t(-b/a, 1)$, qui est non nul. L'identité précédente entraîne :

$$0 < a {}^t()XAX = ac - b^2.$$

Réciproquement, supposons $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Pour $X \neq 0$, l'expression $(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2$ est strictement positive : si $y \neq 0$, son second terme l'est ; si $y = 0$, alors $x \neq 0$ et son premier terme l'est. En divisant par $a > 0$, on obtient ${}^t()XAX > 0$.

Par conséquent :

$$A \in S_2^{++}(\mathbb{R}) \iff a > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0.$$

L'expression $ac - b^2$ intervient ici uniquement dans une identité algébrique de forme quadratique, établie dans la question ; aucun résultat sur les déterminants n'est utilisé.

2°) Exemples.

a)

Méthode 1 — Appliquer la caractérisation précédente.

Pour A , on a $a = 2 > 0$ et $ac - b^2 = 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$. Pour B , on a $a = 4 > 0$ et $ac - b^2 = 4 \times (5/3) = 20/3 > 0$. Les deux matrices sont donc définies positives.

Leur différence est :

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Son premier coefficient diagonal vaut $2 > 0$ et l'expression de II-1°-b) vaut $2 \times (2/3) - 1 = 1/3 > 0$. Ainsi $A < B$.

La multiplication matricielle donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{pmatrix}, \quad B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Pour cette dernière matrice, $11 \times (7/9) - (-3)^2 = -4/9 < 0$. Elle n'est donc pas définie positive. La réponse à la dernière question est négative : $A^2 < B^2$ est faux.

Méthode 2 — Étudier directement les formes quadratiques.

Pour $X = {}^t(x, y) \neq 0$, on a :

$${}^t()XAX = x^2 + (x + y)^2 > 0, \quad {}^t()XBX = 4x^2 + \frac{5}{3}y^2 > 0.$$

La première somme ne peut s'annuler que si $x = 0$ et $x + y = 0$, donc si $X = 0$. De plus :

$${}^t()X(B - A)X = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}y^2 > 0.$$

Cela prouve à nouveau les trois propriétés de positivité. En revanche, pour $X = {}^t(3/11, 1)$:

$${}^t()X(B^2 - A^2)X = \frac{7}{9} - \frac{9}{11} = -\frac{4}{99} < 0.$$

Ainsi $A^2 < B^2$ est faux. La première méthode fournit un test rapide en dimension deux ; la seconde exhibe un vecteur qui explique concrètement l'échec de l'inégalité.

b) On fixe $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

i)

Méthode 1 — Utiliser le noyau et une transformation de la forme quadratique.

Si $AY = 0$, alors ${}^t()YAY = 0$. La positivité définie impose $Y = 0$. L'application linéaire associée à A est donc injective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, et elle est bijective par le théorème du rang. Ainsi A est inversible.

Son inverse est symétrique puisque :

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}.$$

Pour $X \neq 0$, posons $Y = A^{-1}X$. Alors $Y \neq 0$ et $X = AY$. On obtient :

$${}^t()XA^{-1}X = {}^t()(AY)Y = {}^t()YAY > 0.$$

Donc $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Méthode 2 — Utiliser une base orthonormale de vecteurs propres.

Par II-1°-a) et le théorème spectral, $A = PD^tP$, avec ${}^tPP = I_n$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, où tous les μ_k sont strictement positifs. La matrice diagonale D est inversible et :

$$A^{-1} = P \text{diag}(\mu_1^{-1}, \dots, \mu_n^{-1}) {}^tP.$$

Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

II-1°-a) montre qu'elle est définie positive. La première méthode évite toute diagonalisation ; la seconde donne explicitement les valeurs propres de l'inverse.

ii)

Méthode 1 — Compléter la forme quadratique autour du point annoncé.

Posons $U = A^{-1}X$, de sorte que $AU = X$. Pour tout H , la symétrie de A donne :

$$\phi_X^A(U + H) - \phi_X^A(U) = 2 {}^t()XH - 2 {}^t()HAU - {}^t()HAH = -{}^t()HAH.$$

Cette différence est négative ou nulle, et elle est strictement négative pour $H \neq 0$, puisque A est définie positive. Ainsi U est l'unique point de maximum global. Sa valeur est :

$$\phi_X^A(U) = 2 {}^t()XA^{-1}X - {}^t()UAU = {}^t()XA^{-1}X.$$

On obtient donc l'identité et le maximum demandés, y compris pour $X = 0$: dans ce cas, le maximum est 0 et est atteint uniquement en $Y = 0$.

Méthode 2 — Gradient et hessienne.

Pour X fixé, la fonction ϕ_X^A est polynomiale en les coordonnées de Y , donc de classe C^2 sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$. Puisque A est symétrique :

$$\nabla \phi_X^A(Y) = 2X - 2AY, \quad \nabla^2 \phi_X^A(Y) = -2A.$$

L'annulation du gradient donne l'unique point critique $Y = A^{-1}X$. D'après II-1°-a), les valeurs propres de A sont des nombres $\mu_k > 0$; celles de la hessienne sont $-2\mu_k < 0$. La hessienne est donc définie négative partout sur $\mathbb{R}^n$.

Le critère global sur un ouvert convexe donne un maximum global au point critique. Pour vérifier directement l'unicité et retrouver l'identité demandée, le développement exact du polynôme de degré deux autour de $U = A^{-1}X$ est :

$$\phi_X^A(U + H) = \phi_X^A(U) + {}^t(\nabla \phi_X^A(U))H + \frac{1}{2} {}^t H (-2A) H = \phi_X^A(U) - {}^t H A H.$$

La valeur du maximum est donc ${}^t X A^{-1} X$, et le maximum est strict. La complétion de la forme quadratique est plus directe ici ; l'étude de la hessienne illustre la méthode générale d'optimisation au programme.

iii)

Pour tous X, Y , on a :

$$\phi_X^A(Y) - \phi_X^B(Y) = {}^t Y (B - A) Y.$$

Comme $A < B$, la matrice $B - A$ est définie positive. La différence est donc strictement positive dès que $Y \neq 0$, ce qui établit la première assertion.

Pour comparer les inverses, fixons $X \neq 0$ et choisissons $Y = B^{-1}X$. L'inversibilité de B ,

prouvée en i), entraîne $Y \neq 0$. Le maximum de ϕ_X^A est au moins sa valeur en Y , tandis que Y est le point de maximum de ϕ_X^B . Ainsi :

$${}^t()XA^{-1}X = \max_Z \phi_X^A(Z) \geq \phi_X^A(B^{-1}X) > \phi_X^B(B^{-1}X) = {}^t()XB^{-1}X.$$

La matrice $A^{-1} - B^{-1}$ est symétrique et sa forme quadratique est strictement positive pour chaque $X \neq 0$. Donc :

$$B^{-1} < A^{-1}.$$

Le choix du point de maximum de ϕ_X^B permet de conserver la stricte inégalité lors de la comparaison des maxima.

Partie III : monotonie sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

1°) Résultats préliminaires.

La matrice A est réelle symétrique. Ses espaces propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$ sont donc deux à deux orthogonaux, et leur somme directe est tout $\mathbb{R}^n$, par le théorème spectral. Les projections orthogonales M_i sont symétriques et vérifient $M_i^2 = M_i$. Si $i \neq j$, alors $M_i M_j = 0$, puisque la projection sur $E_{\lambda_i}(A)$ s'annule sur $E_{\lambda_j}(A)$.

a)

Fixons $X \in \mathbb{R}^n$. La décomposition orthogonale de l'espace donne une écriture unique

$$X = \sum_{i=1}^p X_i,$$

avec $X_i \in E_{\lambda_i}(A)$. L'orthogonalité entraîne $M_i X = X_i$. Ainsi :

$$AX = \sum_{i=1}^p AX_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i \right) X.$$

Les deux matrices ont la même action sur chaque colonne, donc :

$$A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i.$$

b)

Pour toute colonne X , la décomposition précédente donne :

$$\left(\sum_{i=1}^p M_i \right) X = \sum_{i=1}^p X_i = X.$$

L'application associée à cette somme est l'identité, donc :

$$I_n = \sum_{i=1}^p M_i.$$

c)

Si $X \in E_{\lambda_i}(A)$, alors $(A + tI_n)X = (\lambda_i + t)X$. Réciproquement, l'équation $(A + tI_n)X = (\lambda_i + t)X$ équivaut à $AX = \lambda_i X$. Les espaces propres sont donc inchangés et les valeurs propres deviennent $\lambda_i + t$.

Ces valeurs restent distinctes et dans le même ordre. En utilisant a) et b), on obtient la décomposition :

$$A + tI_n = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + t) M_i.$$

Elle est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, y compris si une des valeurs propres obtenues est nulle. Si A est définie positive et $t > 0$, toutes les $\lambda_i + t$ sont strictement positives, donc $A + tI_n$ est définie positive.

2°)

a)

Chaque M_i est la matrice d'une projection orthogonale, donc est symétrique. La combinaison linéaire réelle :

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) M_i$$

est donc symétrique, quelle que soit la fonction réelle f .

Supposons maintenant f strictement monotone. Elle est alors injective et les nombres $f(\lambda_i)$ sont deux à deux distincts. Pour $X \in E_{\lambda_i}(A)$, les propriétés des projections donnent :

$$\tilde{f}(A)X = f(\lambda_i)X.$$

Réciproquement, si $\tilde{f}(A)X = f(\lambda_i)X$, écrivons

$$X = \sum_j X_j$$

avec $X_j \in E_{\lambda_j}(A)$. On obtient :

$$\sum_{j=1}^p (f(\lambda_j) - f(\lambda_i)) X_j = 0.$$

La somme des espaces propres étant directe, chaque terme est nul. Pour $j \neq i$, l'injectivité de f impose $X_j = 0$. Ainsi :

$$E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(A)) = E_{\lambda_i}(A).$$

Les projections sont donc les mêmes M_i . Si f est croissante, la décomposition affichée est déjà rangée par valeurs propres croissantes. Si f est décroissante, les valeurs propres croissantes sont $f(\lambda_p) < \dots < f(\lambda_1)$ et les projections correspondantes sont $M_p, \dots, M_1$.

b)

Pour $f(x) = 1/x$, tous les λ_i sont strictement positifs et :

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} M_i.$$

Les relations $M_i M_j = 0$ pour $i \neq j$, $M_i^2 = M_i$ et

$$\sum_i M_i = I_n$$

donnent :

$$A \tilde{f}(A) = \tilde{f}(A) A = \sum_{i=1}^p M_i = I_n.$$

On conclut que $\tilde{f}(A) = A^{-1}$ pour tout $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi $\tilde{f}$ est l'application d'inversion matricielle.

c)

Pour

$$A = \sum_i \lambda_i M_i \in S_n^{++}(\mathbb{R}),$$

les nombres $g(\lambda_i)$ sont strictement positifs par l'hypothèse sur les valeurs de g . D'après a), $\tilde{g}(A)$ est symétrique et possède ces valeurs propres, avec les mêmes projections M_i . Elle est donc définie positive par II-1°-a), et $\tilde{f}(\tilde{g}(A))$ est bien définie.

La stricte monotonie de g assure que ces valeurs propres sont distinctes. Même si leur ordre est inversé, leurs projections restent associées aux mêmes espaces. La définition donne :

$$\tilde{f}(\tilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^p f(g(\lambda_i)) M_i = \widetilde{f \circ g}(A).$$

L'égalité vaut pour toute matrice A du domaine, donc :

$$\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}.$$

d)

Les hypothèses $c > 0$ et $d > 0$ assurent $cx + d > 0$ pour $x > 0$. On vérifie directement :

$$\frac{bc - ad}{c(cx + d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad + a(cx + d)}{c(cx + d)} = \frac{ax + b}{cx + d} = h(x).$$

Pour

$$A = \sum_i \lambda_i M_i \in S_n^{++}(\mathbb{R}),$$

la matrice $cA + dI_n$ est définie positive : sa forme quadratique est $c {}^t X A X + d \|X\|^2 > 0$ pour $X \neq 0$. Son inverse a pour décomposition

$$\sum_i (c\lambda_i + d)^{-1} M_i.$$

Ainsi :

$$\tilde{h}(A) = \frac{bc - ad}{c}(cA + dI_n)^{-1} + \frac{a}{c}I_n.$$

Si $A < B$, on a $cA + dI_n < cB + dI_n$, car leur différence est $c(B - A)$, définie positive.

II-2°-b)-iii) entraîne :

$$(cB + dI_n)^{-1} < (cA + dI_n)^{-1}.$$

Posons $k = (bc - ad)/c$, qui est non nul. Si $bc - ad > 0$, alors $k > 0$ et :

$$\tilde{h}(A) - \tilde{h}(B) = k((cA + dI_n)^{-1} - (cB + dI_n)^{-1}) \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Donc $\tilde{h}$ est strictement décroissante. Si $bc - ad < 0$, alors $k < 0$ et la même différence est définie négative ; autrement dit, $\tilde{h}(B) - \tilde{h}(A)$ est définie positive. Donc $\tilde{h}$ est strictement croissante.

En conclusion, $\tilde{h}$ est strictement croissante lorsque $ad - bc > 0$ et strictement décroissante lorsque $ad - bc < 0$.

3°) Intégrales de matrices.

a) Résultats préliminaires.

(i)

Notons $m_{i,j}(t)$ et $n_{i,j}(t)$ les coefficients de $M(t)$ et de $N(t)$. Par hypothèse, leurs intégrales impropres convergent. La linéarité des intégrales impropres convergentes assure :

$$\int_0^{+\infty} (m_{i,j}(t) + n_{i,j}(t)) dt = \int_0^{+\infty} m_{i,j}(t) dt + \int_0^{+\infty} n_{i,j}(t) dt.$$

Cette identité est valable pour chacun des n^2 coefficients. Elle prouve à la fois l'existence et l'égalité matricielle :

$$\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t)) dt = \int_0^{+\infty} M(t) dt + \int_0^{+\infty} N(t) dt.$$

La même règle s'étend à toute somme finie en l'appliquant successivement.

(ii)

Résultat admis dans cette version adaptée.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si h est continue sur $]0, +\infty[$ et si $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge, alors, pour $M(t) = h(t)A$, l'intégrale matricielle existe et :

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt = \left(\int_0^{+\infty} h(t) dt \right) A.$$

Ce résultat est déjà admis dans le sujet original. Il sera utilisé en b)-i) pour intégrer un coefficient scalaire multiplié par une projection M_i .

(iii)

Résultat admis dans cette version adaptée.

Si l'intégrale matricielle $\int_0^{+\infty} M(t) dt$ existe et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'intégrale scalaire $\int_0^{+\infty} {}^t()XM(t)X dt$ converge et :

$${}^t()X \left(\int_0^{+\infty} M(t) dt \right) X = \int_0^{+\infty} {}^t()XM(t)X dt.$$

Ce résultat est également déjà admis dans le sujet original. Il permettra en b)-iii) de démontrer la positivité définie d'une intégrale en étudiant sa forme quadratique pour chaque colonne non nulle.

b)

On conserve l'hypothèse précisée dans le préambule de la partie I : $\varphi \geq 0$ est continue et non identiquement nulle, et $\int_0^{+\infty} \varphi(t)/(1+t^2) dt$ converge.

i)

Pour $t > 0$, la matrice $A + tI_n$ est définie positive et inversible. En utilisant III-1°-c) et III-2°-b), on obtient :

$$(A + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} M_i.$$

Avec

$$I_n = \sum_i M_i,$$

l'intégrande du sujet s'écrit donc :

$$\varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) = \sum_{i=1}^p \varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i + t} \right) M_i.$$

Pour chaque i , la question préliminaire de la partie I prouve la convergence absolue de l'intégrale du coefficient scalaire. Les propriétés a)-(i) et a)-(ii), appliquées à cette somme finie, assurent donc l'existence de l'intégrale matricielle et donnent :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) dt = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) M_i = \tilde{f}(A).$$

Les coefficients des intégrandes sont continus, puisque φ l'est et que les dénominateurs $\lambda_i + t$ restent strictement positifs. L'intégrale porte sur la différence complète ; les deux termes de cette différence ne sont pas intégrés séparément.

ii)

Supposons $A < B$. Pour tout $t > 0$, les matrices $A + tI_n$ et $B + tI_n$ sont définies positives et :

$$(B + tI_n) - (A + tI_n) = B - A \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

La décroissance stricte de l'inversion, prouvée en II-2°-b)-iii), donne :

$$(B + tI_n)^{-1} < (A + tI_n)^{-1}.$$

Par définition de l'ordre, pour $X \neq 0$:

$${}^t()X((A + tI_n)^{-1} - (B + tI_n)^{-1})X > 0.$$

En soustrayant les formes quadratiques des inverses au même nombre $\frac{t}{1+t^2}\|X\|^2$, on obtient exactement l'inégalité demandée :

$${}^t()X\left(\frac{t}{1+t^2}I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)X < {}^t()X\left(\frac{t}{1+t^2}I_n - (B + tI_n)^{-1}\right)X.$$

iii)

Question adaptée au programme actuel : la formulation «à valeurs positives» est précisée en «positives ou nulles, non identiquement nulle». Cette précision garantit la stricte croissance, même si φ s'annule en certains points.

Fixons $A < B$ et $X \neq 0$. D'après i), les intégrales matricielles représentant $\tilde{f}(A)$ et $\tilde{f}(B)$ existent. Leur différence existe aussi par a)-(i) et a)-(ii). On peut donc appliquer a)-(iii) pour écrire :

$${}^t()X(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A))X = \int_0^{+\infty} \varphi(t)q_X(t) dt,$$

où :

$$q_X(t) = {}^t()X((A + tI_n)^{-1} - (B + tI_n)^{-1})X.$$

Selon ii), $q_X(t) > 0$ pour tout $t > 0$. La fonction q_X est continue : les inverses s'écrivent comme des sommes finies de projections à coefficients $(\lambda_i + t)^{-1}$, et de même pour B .

Le produit $\varphi(t)q_X(t)$ est donc continu et positif ou nul. Comme φ est non identiquement nulle, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) > 0$. On a alors $\varphi(t_0)q_X(t_0) > 0$. Par continuité, il existe un segment $[u, v] \subset]0, +\infty[$, avec $u < v$, et un réel $m > 0$ tels que $\varphi(t)q_X(t) \geq m$ sur ce segment. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)q_X(t) dt \geq \int_u^v \varphi(t)q_X(t) dt \geq m(v - u) > 0.$$

La matrice $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A)$ est symétrique par III-2°-a), et sa forme quadratique est strictement positive pour tout $X \neq 0$. Elle est donc définie positive. Cela prouve :

$$A < B \implies \tilde{f}(A) < \tilde{f}(B).$$

L'application $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c)

Pour $\varphi(t) = 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-1} dt$ converge d'après I-1°, et φ est continue, strictement positive. I-2°) donne $f_0 = \ln$. III-3°-b)-iii) entraîne donc que $\tilde{\ln}$ est strictement croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on prend $\varphi(t) = t^\alpha$. Les hypothèses de III-3°-b) sont vérifiées grâce à I-1°), donc $\tilde{f}_\alpha$ est strictement croissante.

Les parties I-3°) et I-4°)-b) donnent $f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$. En appliquant la définition à une décomposition de A , et en utilisant

$$\sum_i M_i = I_n,$$

il vient :

$$\tilde{f}_\alpha(A) = c\tilde{p}_\alpha(A) + dI_n.$$

Pour $A < B$, la matrice :

$$\tilde{f}_\alpha(B) - \tilde{f}_\alpha(A) = c(\tilde{p}_\alpha(B) - \tilde{p}_\alpha(A))$$

est définie positive. Si $\alpha \in]0, 1[$, on a $c > 0$ par I-4°)-b), donc $\tilde{p}_\alpha(B) - \tilde{p}_\alpha(A)$ est définie positive : $\tilde{p}_\alpha$ est strictement croissante.

Si $\alpha \in]-1, 0[$, on a $c < 0$ par I-3°), donc $\tilde{p}_\alpha(A) - \tilde{p}_\alpha(B)$ est définie positive : $\tilde{p}_\alpha$ est strictement décroissante.

Les conclusions sont ainsi : $\tilde{f}_\alpha$ est strictement croissante ; $\tilde{p}_\alpha$ est strictement décroissante pour $-1 < \alpha < 0$ et strictement croissante pour $0 < \alpha < 1$.

Partie IV : monotonies comparées de f et $\tilde{f}$

1°)

Pour déduire l'ordre scalaire de l'ordre matriciel, on utilise les matrices multiples de l'identité.

Soient $0 < x < y$. Les matrices xI_n et yI_n sont définies positives et $xI_n < yI_n$, puisque leur différence est $(y - x)I_n$.

La seule valeur propre de xI_n est x , son espace propre est tout $\mathbb{R}^n$ et la projection associée est I_n . Ainsi :

$$\tilde{f}(xI_n) = f(x)I_n, \quad \tilde{f}(yI_n) = f(y)I_n.$$

La croissance stricte de $\tilde{f}$ implique que $(f(y) - f(x))I_n$ est définie positive. En évaluant sa forme quadratique sur une colonne unitaire, on obtient $f(y) - f(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2°)

Pour alléger les calculs, on définit, pour $u \in \mathbb{R}$:

$$C(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad S(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Ces notations ne font appel qu'à la fonction exponentielle. Une différence de carrés donne l'identité :

$$C(u)^2 - S(u)^2 = \frac{(e^u + e^{-u})^2 - (e^u - e^{-u})^2}{4} = 1.$$

En particulier, $C(u) > 0$ et $C(u) \geq 1$, car $(e^{u/2} - e^{-u/2})^2 \geq 0$ entraîne $e^u + e^{-u} \geq 2$.

Pour $t > 0$, les matrices du sujet sont :

$$A(t) = \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ S(t) & C(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \frac{1}{C(t)} - t^3.$$

a)

La matrice $A(t)$ est symétrique. Les colonnes unitaires :

$$U_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormale et satisfont :

$$A(t)U_- = (C(t) - S(t))U_- = e^{-t}U_-, \quad A(t)U_+ = (C(t) + S(t))U_+ = e^tU_+.$$

Les deux valeurs propres sont strictement positives et, pour $t > 0$, distinctes, avec $e^{-t} < e^t$. II-1°-a) montre que $A(t) \in S_2^{++}(\mathbb{R})$.

Les projections orthogonales sur les deux droites propres ont pour matrices :

$$P_- = U_- U_-^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_+ = U_+ U_+^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition demandée, rangée dans l'ordre croissant des valeurs propres, est :

$$A(t) = e^{-t}P_- + e^tP_+.$$

b)

Comme $C(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, on a $\beta(t) = 1/C(t) - t^3 \rightarrow 1$. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que $\beta(t) > 0$ pour tout $0 < t < \eta_0$. Cela résulte de la définition de la limite, en choisissant par exemple un écart strictement inférieur à $1/2$ autour de 1.

Sur ce même intervalle, $t^3 > 0$. Les deux coefficients diagonaux de $B(t)$ sont donc strictement positifs. Sa forme quadratique $t^3x^2 + \beta(t)y^2$ est strictement positive pour toute colonne ${}^t(x, y) \neq 0$. Ainsi :

$$\forall t \in]0, \eta_0[, \quad B(t) \in S_2^{++}(\mathbb{R}).$$

Aucune valeur de η_0 n'est recherchée, conformément à la consigne.

c)

Méthode 1 — Une identité exacte de forme quadratique en dimension deux.

Pour $0 < t < \eta_0$, on a $\beta(t) > 0$, donc $t^3 < 1/C(t)$. Puisque $C(t) \geq 1$, on en déduit :

$$t^3 < \frac{1}{C(t)} \leq C(t),$$

ce qui assure $C(t) - t^3 > 0$. La différence à étudier est :

$$A(t) - B(t) = \begin{pmatrix} C(t) - t^3 & S(t) \\ S(t) & C(t) - \frac{1}{C(t)} + t^3 \end{pmatrix}.$$

L'expression intervenant dans II-1°-b) vaut :

$$\begin{aligned} (C(t) - t^3) \left(C(t) - \frac{1}{C(t)} + t^3 \right) - S(t)^2 &= C(t)^2 - 1 + \frac{t^3}{C(t)} - t^6 - S(t)^2 \\ &= \frac{t^3}{C(t)} - t^6 \\ &= t^3 \beta(t) > 0. \end{aligned}$$

On a utilisé l'identité $C(t)^2 - S(t)^2 = 1$. Les deux conditions de II-1°-b) sont satisfaites ; ainsi $B(t) < A(t)$ pour tout $0 < t < \eta_0$.

Il suffit donc de prendre $\eta_1 = \eta_0/2$, qui appartient à $]0, \eta_0[$. La propriété demandée est établie sur $]0, \eta_1[$.

d)

Fixons un réel α et $0 < t < \eta_1$. Les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont définies positives, donc leurs puissances au sens du sujet sont bien définies, y compris lorsque α est négatif ou nul.

La décomposition de a) donne :

$$\tilde{p}_\alpha(A(t)) = e^{-\alpha t} P_- + e^{\alpha t} P_+ = \begin{pmatrix} C(\alpha t) & S(\alpha t) \\ S(\alpha t) & C(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

La matrice $B(t)$ est diagonale dans la base canonique. Ainsi :

$$\tilde{p}_\alpha(B(t)) = \begin{pmatrix} t^{3\alpha} & 0 \\ 0 & \beta(t)^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{3\alpha} & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha \end{pmatrix}.$$

Si ses deux valeurs propres coïncident pour un certain t , alors $B(t)$ est une matrice scalaire ; la même formule reste valable, puisque sa puissance est alors la même puissance scalaire multipliée par I_2 . Pour $\alpha = 0$, les deux matrices obtenues sont I_2 , comme attendu.

e)

On fixe $\alpha > 1$ et on étudie la limite $t \rightarrow 0^+$. Notons $E_\alpha(t)$ la quantité du sujet :

$$E_\alpha(t) = (C(\alpha t) - t^{3\alpha})(C(\alpha t) - \beta(t)^\alpha) - S(\alpha t)^2.$$

Les développements limités usuels de l'exponentielle donnent :

$$C(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad C(\alpha t) = 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2), \quad S(\alpha t) = \alpha t + o(t).$$

Pour justifier les deux changements d'expression nécessaires sans composer de développements limités, on procède par identités et par accroissements finis.

D'abord :

$$\frac{1}{C(t)} - 1 = -\frac{C(t) - 1}{C(t)} = -\frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

car $C(t) \rightarrow 1$. Comme $t^3 = o(t^2)$, on en déduit :

$$\beta(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

La fonction $u \mapsto u^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $\beta(t) > 0$ pour les t considérés. Par le théorème des accroissements finis, pour chaque t assez petit il existe ξ_t entre $\beta(t)$ et 1 tel que :

$$\beta(t)^\alpha - 1 = \alpha \xi_t^{\alpha-1} (\beta(t) - 1).$$

Comme $\beta(t) \rightarrow 1$, l'encadrement de ξ_t entraîne $\xi_t \rightarrow 1$. Il s'ensuit :

$$\beta(t)^\alpha = 1 - \frac{\alpha t^2}{2} + o(t^2).$$

On peut maintenant soustraire les développements établis :

$$C(\alpha t) - \beta(t)^\alpha = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} t^2 + o(t^2).$$

Le premier facteur $C(\alpha t) - t^{3\alpha}$ tend vers 1, puisque $\alpha > 1$. De plus, $S(\alpha t)^2 = \alpha^2 t^2 + o(t^2)$. En multipliant les développements puis en soustrayant, on obtient :

$$\begin{aligned} E_\alpha(t) &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}t^2 - \alpha^2 t^2 + o(t^2) \\ &= -\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Le coefficient est non nul puisque $\alpha > 1$. L'équivalent demandé est donc :

$$E_\alpha(t) \sim -\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 \quad (t \rightarrow 0^+).$$

En particulier, cette quantité est strictement négative pour tout $t > 0$ suffisamment petit.

f)

Pour $0 < t < \eta_1$, posons :

$$D_\alpha(t) = \tilde{p}_\alpha(A(t)) - \tilde{p}_\alpha(B(t)) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ v(t) & w(t) \end{pmatrix},$$

où $u(t) = C(\alpha t) - t^{3\alpha}$, $v(t) = S(\alpha t)$ et $w(t) = C(\alpha t) - \beta(t)^\alpha$.

On a $u(t) \rightarrow 1$ et $u(t)w(t) - v(t)^2 = E_\alpha(t)$. Pour $\alpha > 1$, e) montre qu'il existe $\delta_\alpha > 0$, que l'on peut choisir inférieur à η_1 , tel que, pour $0 < t < \delta_\alpha$, $u(t) > 0$ et $E_\alpha(t) < 0$.

D'après la caractérisation II-1°-b), $D_\alpha(t)$ n'est pas définie positive. Plus explicitement, la colonne non nulle $X_t = {}^t(-v(t)/u(t), 1)$ vérifie :

$${}^t(X_t D_\alpha(t) X_t = w(t) - \frac{v(t)^2}{u(t)} = \frac{E_\alpha(t)}{u(t)} < 0.$$

Pour de tels t , les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont définies positives et vérifient $B(t) < A(t)$, mais l'inégalité $\tilde{p}_\alpha(B(t)) < \tilde{p}_\alpha(A(t))$ est fausse. Donc, pour chaque $\alpha > 1$, $\tilde{p}_\alpha$ n'est pas strictement croissante sur $S_2^{++}(\mathbb{R})$.

3°)

Il faut fournir, pour chaque dimension $n \geq 2$, une fonction scalaire strictement croissante dont l'application matricielle associée ne l'est pas.

Méthode 1 — Prolonger le contre-exemple de IV-2°).

Prenons $f(x) = x^2$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puisque $f'(x) = 2x > 0$. Pour $n = 2$, IV-2°)-f), avec $\alpha = 2$, donne déjà le contre-exemple.

Pour $n > 2$, choisissons $t > 0$ assez petit pour que les conclusions de IV-2°)-f) avec $\alpha = 2$ soient valables, et définissons les matrices par blocs :

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & 2I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Les blocs hors diagonale sont des matrices nulles de dimensions adaptées. Les deux matrices sont symétriques définies positives : pour une colonne ${}^t(X, Z)$, leur forme quadratique est la somme de celle du bloc supérieur, définie positive, et d'un multiple strictement positif de $\|Z\|^2$.

Leur différence est :

$$\mathcal{A}_n - \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} A(t) - B(t) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n^{++}(\mathbb{R}),$$

donc $\mathcal{B}_n < \mathcal{A}_n$. Pour la fonction $f(x) = x^2$, la définition spectrale donne $\tilde{f}(M) = M^2$: cela découle de $M_i M_j = 0$ pour $i \neq j$ et de $M_i^2 = M_i$ dans la décomposition de M .

Ainsi :

$$\tilde{f}(\mathcal{A}_n) - \tilde{f}(\mathcal{B}_n) = \begin{pmatrix} A(t)^2 - B(t)^2 & 0 \\ 0 & 3I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

IV-2°)-f) fournit une colonne $X_t \neq 0$ pour laquelle la forme quadratique du bloc supérieur est strictement négative. Sur la colonne ${}^t(X_t, 0)$, la forme quadratique de la matrice entière est donc strictement négative. Elle n'est pas définie positive, et $\tilde{f}$ n'est pas strictement croissante.

Méthode 2 — Un contre-exemple numérique exact issu de II-2°)-a).

Cette méthode donne des matrices explicites, sans choisir un paramètre petit.

Reprenons :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

La question II-2°)-a) a établi $A_0, B_0 \in S_2^{++}(\mathbb{R})$, $A_0 < B_0$ et, pour $X = {}^t(3/11, 1)$:

$${}^t()X(B_0^2 - A_0^2)X = -\frac{4}{99} < 0.$$

Pour $n = 2$, cela suffit. Pour $n > 2$, posons :

$$A_n = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 2I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Les blocs sont définis positifs, et $B_n - A_n$ a pour blocs diagonaux $B_0 - A_0$ et I_{n-2} , tous deux définis positifs. Donc $A_n < B_n$. Mais, sur la colonne non nulle ${}^t(X, 0)$:

$${}^t(X, 0)(B_n^2 - A_n^2)(X, 0) = -\frac{4}{99} < 0, \quad X = (3/11, 1, 0, \dots, 0).$$

Ainsi $A_n^2 < B_n^2$ est faux, alors que $x \mapsto x^2$ est strictement croissante.

La première méthode utilise la famille étudiée dans la partie IV et s'étend à toute puissance $\alpha > 1$. La seconde suffit pour réfuter la réciproque et fournit un exemple exact facile à vérifier. Dans chaque dimension $n \geq 2$, la propriété de IV-1°) n'admet donc pas de réciproque.

Relevé des adaptations

- I, préambule et question préliminaire ; III-3°-b), préambule et iii) : la condition « à valeurs positives » sur φ est précisée en « à valeurs positives ou nulles, non identiquement nulle ». La non-nullité, combinée à la continuité, garantit une intégrale strictement positive en III-3°-b)-iii). Sans elle, si « positives » est compris au sens large, le choix $\varphi = 0$ contredit la conclusion de croissance stricte. Si cette formulation désigne déjà des valeurs strictement positives, la précision explicite simplement une hypothèse suffisante, plus générale.