



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2006

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout ce problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

On rappelle qu'une permutation de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ est une bijection de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ sur lui-même. Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels;
- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels;
- $m_{i,j}$ l'élément générique d'une matrice M , c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de M ;
- ${}^t M$ la transposée d'une matrice M .

Lorsque σ appartient à $\mathcal{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée P_σ , dont le terme générique vérifie, pour tout $(i, j) \in [1, n]_{\mathbb{Z}}^2$:

$$p_{i,j} = 1 \text{ si } \sigma(i) = j, \quad p_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Par exemple, pour $n = 3$ et $\sigma \in \mathcal{S}_3$ définie par $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$:

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble E_n des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall i \in [1, n]_{\mathbb{Z}}, \forall j \in [1, n]_{\mathbb{Z}}, \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \sum_{k=1}^n m_{k,j}.$$

Dans ce cas, leur valeur commune sera notée $\omega(M)$.

PARTIE I : Étude de l'ensemble E_n

On note J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1, c'est-à-dire :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

et U la matrice colonne à n lignes égale à :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Généralités.

a) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\omega : E_n \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \omega(M)$, en est une forme linéaire.

b) Lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, établir que $M \in E_n$ si et seulement si U est vecteur propre commun à M et tM associé à une même valeur propre.

- c) Vérifier que E_n est stable pour le produit matriciel et préciser $\omega(MN)$ en fonction de $\omega(M)$ et $\omega(N)$ lorsque M et N appartiennent à E_n .

2) Dimension de E_n .

- a) Montrer que le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n .
- b) Pour $(r, s) \in [2, n]_{\mathbb{Z}}^2$, on note $A_{r,s}$ la matrice de E_n dont tous les éléments sont nuls sauf les quatre éléments $a_{1,1}, a_{r,s}, a_{1,s}, a_{r,1}$, qui sont tels que :

$$a_{1,1} = a_{r,s} = 1, \quad a_{1,s} = a_{r,1} = -1.$$

Montrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s) \in [2,n]_{\mathbb{Z}}^2}$ est libre, puis qu'elle est génératrice du noyau de ω . En déduire la dimension de E_n .

3) Une famille génératrice de E_n .

- a) Établir que, pour toute permutation σ de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$, la matrice P_σ appartient à E_n et que les matrices P_σ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M) = 1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

- b) Écrire la matrice P_σ correspondant à la permutation σ de $\mathcal{S}_n$ définie par :

$$\forall k \in [1, n-1]_{\mathbb{Z}}, \quad \sigma(k) = k+1, \quad \sigma(n) = 1.$$

Préciser les matrices $(P_\sigma)^2, (P_\sigma)^3, \dots, (P_\sigma)^n$.

- c) Exprimer J comme combinaison linéaire de matrices de permutations. Faire de même avec chaque matrice de type $A_{r,s}$ quand $(r, s) \in [2, n]_{\mathbb{Z}}^2$: on pourra se limiter

aux matrices $A_{2,2}$ et $A_{3,2}$, si $n \geq 3$, et donner une décomposition explicite de ces deux matrices en combinaison linéaire de matrices de permutations.

- d) Prouver qu'il existe $(n-1)^2 + 1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ telles que $(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n .

Que représente la somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base ?

Les deux parties suivantes du problème sont indépendantes de la partie I.

On s'intéresse dans toute la suite du problème à l'ensemble des matrices M de E_n dont tous les éléments $m_{i,j}$ sont positifs ou nuls. On note E_n^+ cet ensemble.

PARTIE II : Étude de l'ensemble E_n^+

- 1) Montrer que E_n^+ est stable pour le produit matriciel et que, pour toute famille $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ de permutations de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ et toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de réels positifs ou nuls :

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+.$$

Dans cette partie, on admettra que :

$$\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ telle que } m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$

- 2) a) On suppose que σ est une telle permutation associée à $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$ et on désigne par $c = \min\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, \dots, m_{n,\sigma(n)}\}$. Montrer que $M - cP_{\sigma} \in E_n^+$.
- b) En déduire que, pour toute matrice M de $E_n^+ \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ et p réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ strictement positifs tels que :

$$M = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}.$$

- c) Montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins $n^2 - n + 1$ termes nuls est nulle ; en déduire que l'on peut choisir, dans la décomposition de la question b), un entier p vérifiant $1 \leq p \leq n^2 - n + 1$.

- d) Exemple : lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer M comme combinaison linéaire à scalaires strictement positifs de matrices de permutations de $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$.

3) Une application.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

- a) Vérifier que la matrice $M_{u,v} = (\langle v_i | u_j \rangle^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ appartient à E_n^+ et donner la valeur de $\omega(M_{u,v})$.

Lorsque σ est une permutation de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$, préciser $M_{u,v}$ dans le cas où $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})$.

- b) On introduit l'endomorphisme symétrique s de $\mathbb{R}^n$ dont $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de diagonalisation et de valeurs propres respectivement associées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On note Λ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \langle s(v_1) | v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n) | v_n \rangle \end{pmatrix} = M_{u,v} \Lambda.$$

- c) En utilisant la question II 2) b), établir que, pour toute forme linéaire f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe deux permutations σ et σ' de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$f(P_{\sigma} \Lambda) \leq f(M_{u,v} \Lambda) \leq f(P_{\sigma'} \Lambda).$$

- d) On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $r \in [1, n]_{\mathbb{Z}}$.

Trouver une forme linéaire f permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \leq \sum_{k=1}^r \langle s(v_k) | v_k \rangle \leq \sum_{k=1}^r \lambda_{n-r+k}.$$

Que représente le terme $\langle s(v_k) | v_k \rangle$ dans la matrice de s relativement à la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et pouvez-vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci-dessus ?

PARTIE III

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie II 1).

Lorsque $(p, q) \in [1, n]_{\mathbb{Z}}^2$, on appelle sous-matrice de type (p, q) de la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de M en supprimant de M exactement $n - p$ lignes et $n - q$ colonnes. Dans une écriture par blocs, un bloc ne comportant aucune ligne ou aucune colonne est simplement absent.

- 1) Lorsque σ est une permutation de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter le terme générique des matrices $P_{\sigma}M$ et $MP_{\sigma^{-1}}$. Comment obtient-on ces deux matrices à partir de M ?
- 2) On suppose que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type (p, q) .
 - a) Montrer qu'il existe deux permutations σ, σ' de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$ telles que :

$$P_{\sigma}MP_{\sigma'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix},$$

avec $X \in \mathcal{M}_{p, n-q}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{M}_{n-p, n-q}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-p, q}(\mathbb{R})$, avec la convention précédente pour les blocs absents.

- b) En déduire que, si M appartient à $E_n^+ \setminus \{0\}$, on a $p + q \leq n$.
- 3) Pour tout entier $k \geq 1$, on dit qu'une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$ si :

$$\forall \rho \in \mathcal{S}_k, \quad b_{1, \rho(1)} b_{2, \rho(2)} \cdots b_{k, \rho(k)} = 0.$$

En particulier, pour $k = 1$, cette hypothèse signifie que l'unique coefficient de B est nul.

On désire établir la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$, alors M contient au moins une sous-matrice nulle de type (p, q) avec $p + q = n + 1$.

- a) Le vérifier pour $n = 2$.

b) n étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée pour tout $k \in [2, n-1]_{\mathbb{Z}}$. On désigne par M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

- Établir que M contient une sous-matrice de type $(n-1, n-1)$ vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.
- En déduire qu'il existe $\tau, \tau' \in \mathcal{S}_n$ et des entiers $p, q \geq 1$ tels que $p + q = n$ et :

$$P_{\tau} M P_{\tau'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad Z \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \quad Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}).$$

- Montrer que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou que Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.
- En déduire alors que M contient une sous-matrice nulle de type (p', q') telle que $p' + q' = n + 1$ et conclure.

4) Montrer alors, à l'aide de la question 2) b), que :

$$\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ telle que } m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$