



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I : Étude de l'ensemble E_n

On identifie une matrice colonne à un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour $M \in E_n$, toutes les sommes de lignes et de colonnes sont égales à $\omega(M)$. Les indices de matrices sont toujours compris entre 1 et n .

1) Généralités.

a) Sous-espace vectoriel et forme linéaire.

La matrice nulle appartient à E_n , car toutes ses sommes de lignes et de colonnes sont nulles. Soient $M, N \in E_n$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour chaque ligne i et chaque colonne j , la linéarité des sommes finies donne :

$$\sum_{k=1}^n (am_{i,k} + bn_{i,k}) = a\omega(M) + b\omega(N) = \sum_{k=1}^n (am_{k,j} + bn_{k,j}).$$

Ainsi, $aM + bN \in E_n$. L'ensemble E_n est non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'égalité précédente fournit également :

$$\omega(aM + bN) = a\omega(M) + b\omega(N).$$

L'application ω est donc linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une forme linéaire. Elle est non nulle : pour la matrice identité I_n , on a $\omega(I_n) = 1$.

b) Caractérisation à l'aide du vecteur U .

Par définition du produit matriciel :

$$(MU)_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k}, \quad ({}^tMU)_j = \sum_{k=1}^n m_{k,j}.$$

Si $M \in E_n$, ces deux expressions valent $\omega(M)$. On obtient :

$$MU = \omega(M)U, \quad {}^tMU = \omega(M)U.$$

Comme $U \neq 0$, c'est un vecteur propre commun à M et tM , associé à la même valeur propre $\omega(M)$.

Réciproquement, si un réel a vérifie $MU = aU$ et ${}^tMU = aU$, toutes les sommes de lignes et de colonnes de M sont égales à a . Ainsi, $M \in E_n$ et $\omega(M) = a$. L'équivalence demandée est établie, y compris lorsque $a = 0$.

c) Stabilité par produit.

Méthode 1 — Utiliser le vecteur commun.

Soient $M, N \in E_n$. La question b) donne :

$$(MN)U = M(\omega(N)U) = \omega(N)\omega(M)U.$$

Puisque ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$, on a aussi :

$${}^t(MN)U = {}^tN(\omega(M)U) = \omega(M)\omega(N)U.$$

La caractérisation de b) montre que $MN \in E_n$ et :

$$\omega(MN) = \omega(M)\omega(N).$$

Méthode 2 — Calculer les sommes de coefficients.

En écrivant

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j},$$

on obtient, uniquement par réarrangement de sommes finies :

$$\sum_{j=1}^n (MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \left(\sum_{j=1}^n n_{k,j} \right) = \omega(N) \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \omega(M) \omega(N).$$

De même, pour chaque colonne j :

$$\sum_{i=1}^n (MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,k} \right) n_{k,j} = \omega(M) \sum_{k=1}^n n_{k,j} = \omega(M) \omega(N).$$

Toutes les sommes sont égales au même réel. Cela prouve à nouveau la stabilité et la formule pour $\omega(MN)$. La première méthode exploite une caractérisation déjà établie ; la seconde permet de vérifier directement le rôle de chaque somme de ligne et de colonne.

2) Dimension de E_n .

a) Décomposition en somme directe.

Toutes les sommes de lignes et de colonnes de J valent n . Donc $J \in E_n$ et $\omega(J) = n \neq 0$.

Pour $M \in E_n$, posons :

$$K = M - \frac{\omega(M)}{n} J.$$

Par linéarité, $\omega(K) = \omega(M) - \omega(M) = 0$. On a donc la décomposition :

$$M = K + \frac{\omega(M)}{n}J, \quad K \in \text{Ker } \omega.$$

Ainsi, $E_n = \text{Ker } \omega + \text{Vect}(J)$. Pour vérifier que cette somme est directe, soit $aJ \in \text{Ker } \omega$. Alors $0 = \omega(aJ) = an$, donc $a = 0$. L'intersection des deux sous-espaces se réduit à la matrice nulle.

Conclusion

$$E_n = \text{Ker } \omega \oplus \text{Vect}(J).$$

La composante sur la droite engendrée par J est $\frac{\omega(M)}{n}J$; cette expression montre aussi l'unicité de la décomposition.

b) Base du noyau et dimension.

Méthode 1 — Construire une base du noyau, puis ajouter la direction de J .

Pour chaque $(r, s) \in [2, n]_{\mathbb{Z}}^2$, les seules lignes éventuellement non nulles de $A_{r,s}$ sont les lignes 1 et r , dont les sommes sont respectivement $1 - 1$ et $-1 + 1$. Les colonnes 1 et s ont elles aussi une somme nulle. Donc $A_{r,s} \in \text{Ker } \omega$.

Pour la liberté, supposons :

$$\sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n c_{r,s} A_{r,s} = 0.$$

Fixons $(i, j) \in [2, n]_{\mathbb{Z}}^2$. Dans le bloc formé des lignes et colonnes $2, \dots, n$, la matrice $A_{r,s}$

possède un unique coefficient non nul, égal à 1, à la position (r, s) . Le coefficient (i, j) de la somme est donc exactement $c_{i,j}$. L'égalité matricielle impose $c_{i,j} = 0$ pour tout (i, j) : la famille est libre.

Pour la génération, soit $M \in \text{Ker } \omega$. Les sommes de ses lignes et de ses colonnes sont nulles. Posons :

$$B = \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n m_{r,s} A_{r,s}.$$

Lorsque $i, j \geq 2$, on a $b_{i,j} = m_{i,j}$. Lorsque $i \geq 2$, la somme nulle de la ligne i donne :

$$b_{i,1} = - \sum_{s=2}^n m_{i,s} = m_{i,1}.$$

De même, pour $j \geq 2$:

$$b_{1,j} = - \sum_{r=2}^n m_{r,j} = m_{1,j}.$$

Enfin, la somme nulle de la première ligne donne :

$$m_{1,1} = - \sum_{j=2}^n m_{1,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{r=2}^n m_{r,j} = b_{1,1}.$$

Tous les coefficients coïncident, donc $M = B$. La famille proposée est une base du noyau et contient $(n-1)^2$ matrices. Grâce à a) :

$$\dim(\text{Ker } \omega) = (n-1)^2, \quad \dim(E_n) = (n-1)^2 + 1.$$

Méthode 2 — Paramétrer directement E_n pour retrouver sa dimension.

Cette seconde approche complète la construction de la base en mettant en évidence les paramètres libres. Pour $M \in E_n$, notons $w = \omega(M)$. Les coefficients $m_{i,j}$ avec $i, j \geq 2$ et le réel w déterminent les autres coefficients par :

$$m_{i,1} = w - \sum_{j=2}^n m_{i,j} \quad (i \geq 2), \quad m_{1,j} = w - \sum_{i=2}^n m_{i,j} \quad (j \geq 2),$$

$$m_{1,1} = (2-n)w + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n m_{i,j}.$$

Réciproquement, si l'on choisit arbitrairement ces $(n-1)^2 + 1$ réels et définit les coefficients restants par ces formules, les lignes et colonnes d'indice supérieur ou égal à 2 ont une somme w . La première ligne a également une somme w , car :

$$m_{1,1} + \sum_{j=2}^n m_{1,j} = (2-n)w + \sum_{i,j \geq 2} m_{i,j} + (n-1)w - \sum_{i,j \geq 2} m_{i,j} = w.$$

Le même calcul s'applique à la première colonne. La matrice appartient donc à E_n . L'application qui associe ces paramètres à la matrice est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$ sur E_n , ce qui redonne la dimension annoncée. La construction par les $A_{r,s}$ fournit une base explicite ; le paramétrage indique directement les degrés de liberté.

3) Une famille génératrice de E_n .

a) Caractérisation des matrices de permutations.

Dans chaque ligne i de P_σ , il existe exactement un coefficient égal à 1, dans la colonne $\sigma(i)$, et tous les autres sont nuls. Comme σ est bijective, chaque colonne possède elle aussi exactement un coefficient égal à 1. Les sommes de lignes et de colonnes valent donc 1 :

$$P_\sigma \in E_n, \quad \omega(P_\sigma) = 1.$$

Réciproquement, soit $M \in E_n$ tel que $\omega(M) = 1$, avec exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne. Dans la ligne i , notons $\sigma(i)$ la colonne du coefficient non nul. Ce coefficient vaut 1, puisque la somme de la ligne vaut 1. Deux lignes ne peuvent pas choisir la même colonne, sans contredire l'unicité du coefficient non nul dans cette colonne. L'application σ est injective sur un ensemble fini de cardinal n , donc bijective.

Ainsi, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $M = P_\sigma$. Les matrices de permutations sont exactement les matrices décrites.

b) Permutation cyclique et puissances.

Posons $C = P_\sigma$ pour la permutation donnée. Sa ligne $i < n$ contient son unique 1 dans la colonne $i + 1$, et sa dernière ligne dans la colonne 1. Ainsi :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette description signifie, pour toute colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, que :

$$CX = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)^t.$$

Le produit $C^k X$ effectue donc k décalages cycliques. Plus précisément :

$$(C^k X)_i = x_{\sigma^k(i)}, \quad (C^k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma^k(i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, l'indice $\sigma^k(i)$ est $i+k$ si $i+k \leq n$, et $i+k-n$ sinon. Cela décrit explicitement toutes les matrices demandées : dans C^2 , les positions des 1 sont les couples $(i, i+2)$ avec retour au début des colonnes ; dans C^3 , elles sont décalées de trois colonnes ; et ainsi de suite. Finalement :

$$C^k = P_{\sigma^k}, \quad C^n = I_n.$$

Pour $n=2$, cette règle donne bien $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^2 = I_2$.

c) Décompositions de J et des $A_{r,s}$.

Fixons une ligne i . Lorsque k parcourt $0, \dots, n-1$, les colonnes $\sigma^k(i)$ parcourent chacune des colonnes $1, \dots, n$ exactement une fois. Par conséquent, chaque coefficient de la somme des C^k vaut 1 :

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} C^k = \sum_{k=1}^n C^k.$$

Chaque terme est une matrice de permutation, d'après b).

Pour $A_{2,2}$, soit τ la permutation qui échange 1 et 2 et fixe les autres indices. Les matrices I_n et P_τ ne diffèrent que dans le bloc des lignes et colonnes 1, 2. Leur différence possède des coefficients 1 en $(1,1)$ et $(2,2)$, et -1 en $(1,2)$ et $(2,1)$. Donc :

$$A_{2,2} = I_n - P_\tau.$$

Pour $n \geq 3$, définissons α et β par :

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(2) = 3, \quad \alpha(3) = 2, \quad \beta(1) = 2, \quad \beta(2) = 3, \quad \beta(3) = 1,$$

et $\alpha(i) = \beta(i) = i$ pour $i \geq 4$. Leurs matrices ont, dans les trois premières lignes et colonnes, les blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les autres coefficients coïncident. En soustrayant ces matrices :

$$A_{3,2} = P_\alpha - P_\beta.$$

On peut également traiter tous les couples (r, s) directement. Choisissons une permutation α telle que $\alpha(1) = 1$ et $\alpha(r) = s$. Ce choix est possible, puisque les lignes $1, r$ et les colonnes $1, s$ sont distinctes : on complète par une bijection entre les $n - 2$ lignes et colonnes restantes. Définissons β en échangeant seulement les images de 1 et r :

$$\beta(1) = s, \quad \beta(r) = 1, \quad \beta(i) = \alpha(i) \text{ pour } i \notin \{1, r\}.$$

La permutation β reste bijective. La différence $P_\alpha - P_\beta$ comporte précisément les quatre coefficients de $A_{r,s}$. Ainsi :

$$A_{r,s} = P_\alpha - P_\beta.$$

Toutes les matrices demandées sont donc des combinaisons linéaires de matrices de permutations.

d) Extraction d'une base et somme des coordonnées.

D'après 2), la famille constituée de J et des $(n-1)^2$ matrices $A_{r,s}$ est une base de E_n . D'après c), chacune de ces matrices est une combinaison linéaire de matrices de permutations. Par conséquent, la famille $(P_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$ engendre E_n .

Cette famille est finie. Le théorème de la base incomplète permet d'en extraire une base, qui possède exactement $\dim(E_n) = (n-1)^2 + 1$ éléments. Il existe donc des permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_d$, avec $d = (n-1)^2 + 1$, telles que $(P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_d})$ soit une base de E_n .

Pour $M \in E_n$, écrivons sa décomposition dans cette base :

$$M = \sum_{k=1}^d x_k P_{\sigma_k}.$$

Par linéarité de ω et puisque chaque $\omega(P_{\sigma_k}) = 1$:

$$\omega(M) = \sum_{k=1}^d x_k.$$

La somme des coordonnées est donc la somme commune des lignes et des colonnes de M . Elle vaut également

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j},$$

et ne dépend pas de la base particulière de matrices de permutations choisie.

PARTIE II : Étude de l'ensemble E_n^+

Pour ne pas dépendre de la partie I, on utilisera directement les sommes de coefficients.

Si $M \in E_n^+$, alors $\omega(M) \geq 0$. De plus :

$$M \in E_n^+ \setminus \{0\} \implies \omega(M) > 0.$$

En effet, si $\omega(M) = 0$, chaque ligne est une famille de réels positifs ou nuls de somme nulle : tous ses coefficients sont nuls, donc $M = 0$.

1) Stabilité et combinaisons positives.

Soient $M, N \in E_n^+$. Chaque coefficient

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j}$$

est positif ou nul. De plus, pour chaque ligne i et chaque colonne j :

$$\sum_{j=1}^n (MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \left(\sum_{j=1}^n n_{k,j} \right) = \omega(M) \omega(N),$$

$$\sum_{i=1}^n (MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,k} \right) n_{k,j} = \omega(M) \omega(N).$$

Ainsi, $MN \in E_n^+$.

Chaque matrice P_{σ_k} possède des coefficients positifs ou nuls, avec une somme 1 dans chaque ligne et chaque colonne. Si les α_k sont positifs ou nuls, les coefficients de

$$B = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}$$

sont positifs ou nuls, et chaque ligne ou colonne a pour somme

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k.$$

Donc :

$$B \in E_n^+, \quad \omega(B) = \sum_{k=1}^p \alpha_k.$$

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans la partie II de l'original :

$$\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ telle que } m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$

Ce résultat garantit un coefficient strictement positif dans chaque ligne et chaque colonne, sur les positions d'une même permutation. Il permet la soustraction de la question 2) a). Il sera démontré dans la partie III, sans être utilisé pour cette démonstration.

2) Décomposition en matrices de permutations.

a) Soustraire une matrice de permutation.

Tous les facteurs $m_{i,\sigma(i)}$ sont positifs ou nuls. Leur produit étant strictement positif, ils sont tous strictement positifs. Le minimum fini c est donc strictement positif.

Posons $R = M - cP_\sigma$. Pour une position non choisie par la permutation, on a $r_{i,j} = m_{i,j} \geq 0$. Sur une position choisie, on a :

$$r_{i,\sigma(i)} = m_{i,\sigma(i)} - c \geq 0.$$

Ainsi, tous les coefficients de R sont positifs ou nuls. Comme on soustrait exactement un coefficient c dans chaque ligne et dans chaque colonne, toutes leurs sommes valent $\omega(M) - c$. Donc :

$$M - cP_\sigma \in E_n^+, \quad \omega(M - cP_\sigma) = \omega(M) - c.$$

Enfin, le minimum c est atteint : au moins un coefficient strictement positif de M devient nul dans R . Aucun coefficient initialement nul ne devient non nul.

b) Itération et terminaison.

On applique la construction de a) tant que la matrice restante n'est pas nulle. Posons $R_0 = M$. Si $R_{k-1} \neq 0$, le résultat admis fournit une permutation σ_k telle que les n coefficients $(R_{k-1})_{i, \sigma_k(i)}$ soient strictement positifs. On pose :

$$\alpha_k = \min_{1 \leq i \leq n} (R_{k-1})_{i, \sigma_k(i)} > 0, \quad R_k = R_{k-1} - \alpha_k P_{\sigma_k}.$$

La question a) assure que $R_k \in E_n^+$ et qu'au moins un coefficient positif supplémentaire devient nul. Les coefficients déjà nuls restent nuls. Ainsi, le nombre de coefficients strictement positifs diminue strictement à chaque étape.

Ce nombre est un entier compris initialement entre 1 et n^2 . La procédure ne peut donc effectuer plus de n^2 étapes sans atteindre la matrice nulle. Elle ne peut pas s'arrêter sur une matrice non nulle, puisque le résultat admis permettrait alors une nouvelle étape. Il existe donc $p \geq 1$ tel que $R_p = 0$.

En sommant les égalités $R_{k-1} - R_k = \alpha_k P_{\sigma_k}$, on obtient :

$$M = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}, \quad \alpha_k > 0.$$

La somme est finie ; aucun passage à la limite n'intervient. Chaque soustraction réduit la

somme commune de α_k , d'où également

$$\omega(M) = \sum_{k=1}^p \alpha_k.$$

c) Nombre de termes.

Question adaptée au programme actuel.

Précision de l'énoncé : la borne porte sur un choix de décomposition, notamment celle construite en b), et non sur toute représentation possible. On peut toujours augmenter artificiellement le nombre de termes en scindant un coefficient positif.

Supposons qu'une matrice $B \in E_n^+$ possède au moins $n^2 - n + 1$ coefficients nuls. Elle possède donc au plus $n - 1$ coefficients non nuls. Parmi ses n lignes, au moins une est entièrement nulle : sinon chaque ligne posséderait un coefficient non nul, ce qui donnerait au moins n coefficients non nuls.

La somme de cette ligne vaut 0, donc $\omega(B) = 0$. Comme tous les coefficients sont positifs ou nuls, les sommes nulles des autres lignes imposent aussi que tous leurs coefficients soient nuls. Ainsi, $B = 0$.

Reprenons la procédure de b). Après k étapes, au moins k coefficients qui étaient initialement strictement positifs sont devenus nuls ; en particulier, R_k possède au moins k coefficients nuls. Dès que $k = n^2 - n + 1$, le résultat précédent impose $R_k = 0$, si la procédure n'a pas terminé plus tôt. Elle fournit donc un choix de p tel que :

$$1 \leq p \leq n^2 - n + 1.$$

Si M possède initialement z coefficients nuls, le même raisonnement donne la borne plus précise $p \leq n^2 - n + 1 - z$. Comme $M \neq 0$, on a nécessairement $z \leq n^2 - n$, de sorte que cette borne reste positive.

d) Exemple de décomposition.

Les sommes des trois lignes de M valent 6 et celles des colonnes valent $3 + 3 + 0 = 6$, $1 + 1 + 4 = 6$ et $2 + 2 + 2 = 6$. Donc $M \in E_3^+$ et $\omega(M) = 6$.

Utilisons successivement quatre permutations, indiquées par leurs images de 1, 2, 3 :

$$\sigma_1 = (1, 2, 3), \quad \sigma_2 = (1, 3, 2), \quad \sigma_3 = (2, 1, 3), \quad \sigma_4 = (3, 1, 2).$$

Pour la permutation identité, les coefficients choisis sont 3, 1, 2, de minimum 1. La première soustraction donne :

$$R_1 = M - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour σ_2 , les coefficients choisis dans R_1 sont 2, 2, 4, de minimum 2. Ainsi :

$$R_2 = R_1 - 2P_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour σ_3 , les coefficients choisis dans R_2 sont 1, 3, 1, de minimum 1. Donc :

$$R_3 = R_2 - P_{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2P_{\sigma_4}.$$

On obtient la décomposition explicite :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les quatre scalaires 1, 2, 1, 2 sont strictement positifs et ont pour somme $6 = \omega(M)$. La somme coefficient par coefficient redonne bien la matrice proposée.

3) Application aux endomorphismes symétriques.

a) Matrice de carrés de produits scalaires.

Méthode 1 — Développer les vecteurs dans les bases orthonormales.

Les coefficients de $M_{u,v}$ sont des carrés réels, donc positifs ou nuls. Fixons une ligne i . Puisque $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base orthonormale :

$$v_i = \sum_{j=1}^n \langle v_i | u_j \rangle u_j.$$

En prenant la norme au carré et en utilisant l'orthonormalité :

$$1 = \|v_i\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle v_i | u_j \rangle^2.$$

Ainsi, chaque ligne de $M_{u,v}$ a pour somme 1. En développant cette fois u_j dans la base (v_i) , on obtient de même :

$$1 = \|u_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u_j | v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \langle v_i | u_j \rangle^2.$$

Chaque colonne a également une somme 1. Conclusion :

$$M_{u,v} \in E_n^+, \quad \omega(M_{u,v}) = 1.$$

Si $v_i = u_{\sigma(i)}$, l'orthonormalité donne $\langle v_i | u_j \rangle = 1$ lorsque $j = \sigma(i)$ et 0 sinon. Son carré garde la même valeur :

$$M_{u,v} = P_\sigma.$$

Méthode 2 — Utiliser une matrice de passage entre bases orthonormales.

Posons $Q = (\langle v_i | u_j \rangle)_{i,j}$. Les colonnes de Q sont les coordonnées des u_j dans la base (v_i) : c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. Le résultat du cours donne $Q^{-1} = {}^tQ$, donc :

$$Q {}^tQ = I_n, \quad {}^tQ Q = I_n.$$

Les coefficients diagonaux de ces deux égalités sont respectivement :

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n q_{i,j}^2 = 1.$$

Ce sont les sommes de lignes et de colonnes de $M_{u,v}$, dont les coefficients sont $q_{i,j}^2$. On retrouve $M_{u,v} \in E_n^+$ et $\omega(M_{u,v}) = 1$. Si $v_i = u_{\sigma(i)}$, alors $Q = P_\sigma$ et ses coefficients sont 0

ou 1 ; leurs carrés redonnent P_σ . La première méthode repose sur la géométrie des bases orthonormales ; la seconde traduit la même structure dans les identités de matrices de passage.

b) Expression des coefficients diagonaux.

Question adaptée au programme actuel.

Rectification locale : on nomme s l'endomorphisme introduit, cette lettre étant utilisée dans l'égalité à établir sans être indiquée dans la phrase de définition de l'original.

Méthode 1 — Décomposition dans la base propre.

Pour chaque i , posons $a_{i,j} = \langle v_i | u_j \rangle$. Puisque $s(u_j) = \lambda_j u_j$, la linéarité donne :

$$s(v_i) = s\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \lambda_j u_j.$$

En prenant le produit scalaire avec

$$v_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} u_k$$

et en utilisant $\langle u_j | u_k \rangle = 0$ pour $j \neq k$, puis 1 pour $j = k$:

$$\langle s(v_i) | v_i \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n (M_{u,v})_{i,j} \lambda_j.$$

Le membre de droite est le coefficient i de la colonne $M_{u,v} \Lambda$. On conclut :

$$\begin{pmatrix} \langle s(v_1) | v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n) | v_n \rangle \end{pmatrix} = M_{u,v} \Lambda.$$

Méthode 2 — Changement de base de la matrice de s .

Reprenons $Q = (\langle v_i | u_j \rangle)_{i,j}$. Elle transforme des coordonnées dans la base (u_j) en coordonnées dans la base (v_i) . Dans la première base, la matrice de s est $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dans la seconde, elle est :

$$S_v = Q D Q^{-1} = Q D^t Q.$$

Son coefficient diagonal d'indice i vaut

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \lambda_j q_{i,j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j q_{i,j}^2.$$

Dans une base orthonormale, ce coefficient vaut aussi $\langle s(v_i) | v_i \rangle$, puisqu'il est la i -ième coordonnée de $s(v_i)$. On retrouve l'égalité colonne par colonne. Cette méthode prépare directement l'interprétation matricielle de la question d).

c) Encadrement par des permutations.

On applique II 2) b) à $M_{u,v}$, qui appartient à E_n^+ et n'est pas nulle, puisque sa somme commune vaut 1. Il existe des permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ et des réels $\alpha_k > 0$ tels que :

$$M_{u,v} = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}.$$

En prenant la somme des coefficients d'une ligne, on obtient

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1.$$

La linéarité de f et le produit matriciel donnent :

$$f(M_{u,v}\Lambda) = \sum_{k=1}^p \alpha_k f(P_{\sigma_k}\Lambda).$$

Les p valeurs réelles $f(P_{\sigma_k}\Lambda)$ possèdent un minimum a et un maximum b , atteints respectivement pour deux indices k_- et k_+ . Pour chaque k , on a $a \leq f(P_{\sigma_k}\Lambda) \leq b$. En multipliant ces inégalités par $\alpha_k > 0$ et en sommant :

$$a \sum_{k=1}^p \alpha_k \leq f(M_{u,v}\Lambda) \leq b \sum_{k=1}^p \alpha_k.$$

La somme des poids vaut 1. En choisissant $\sigma = \sigma_{k_-}$ et $\sigma' = \sigma_{k_+}$, on obtient exactement :

$$f(P_{\sigma}\Lambda) \leq f(M_{u,v}\Lambda) \leq f(P_{\sigma'}\Lambda).$$

Les deux permutations peuvent être égales, notamment si toutes les valeurs considérées sont identiques. Le raisonnement est celui d'une moyenne pondérée à poids positifs, entièrement justifié par une somme finie.

d) Sommes de coefficients diagonaux et valeurs propres.

Méthode 1 — Choisir une forme linéaire et utiliser les permutations.

Pour une colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, choisissons la forme linéaire :

$$f_r(X) = \sum_{k=1}^r x_k.$$

Par b),

$$f_r(M_{u,v}\Lambda) = \sum_{k=1}^r \langle s(v_k) \mid v_k \rangle.$$

Par la définition de P_σ , on a $(P_\sigma\Lambda)_k = \lambda_{\sigma(k)}$, donc :

$$f_r(P_\sigma\Lambda) = \sum_{k=1}^r \lambda_{\sigma(k)}.$$

Cette somme comporte r valeurs propres d'indices distincts. Pour justifier son encadrement, rangeons ces indices dans l'ordre croissant : $j_1 < \dots < j_r$. Pour tout k , on a $j_k \geq k$. Il faut aussi réserver $r - k$ indices supérieurs à j_k , d'où $j_k \leq n - r + k$. Comme les valeurs propres sont rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_k \leq \lambda_{j_k} \leq \lambda_{n-r+k}.$$

En sommant, toute permutation vérifie :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \leq f_r(P_\sigma\Lambda) \leq \sum_{k=1}^r \lambda_{n-r+k}.$$

On applique ces bornes aux deux permutations fournies par c). On obtient :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \leq \sum_{k=1}^r \langle s(v_k) \mid v_k \rangle \leq \sum_{k=1}^r \lambda_{n-r+k}.$$

Notons $S_v = (s_{i,j})$ la matrice de s dans la base orthonormale (v_i) . Par la définition des coordonnées dans une base orthonormale :

$$s_{i,j} = \langle s(v_j) \mid v_i \rangle, \quad s_{k,k} = \langle s(v_k) \mid v_k \rangle.$$

Le terme demandé est donc le coefficient diagonal d'indice k . Les inégalités signifient que la somme des r premiers coefficients diagonaux d'une matrice symétrique réelle est comprise entre la somme de ses r plus petites valeurs propres et celle de ses r plus grandes valeurs propres. En réordonnant la base (v_i) , on peut placer en tête n'importe quel ensemble de r indices : l'encadrement vaut donc aussi pour toute somme de r coefficients diagonaux distincts.

Pour $r = 1$, chaque coefficient diagonal est compris entre λ_1 et λ_n . Pour $r = n$, les deux bornes sont identiques, et l'on retrouve :

$$\text{Tr}(S_v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Les bornes sont atteintes lorsque les r premiers vecteurs v_k sont les vecteurs propres associés aux r plus petites valeurs propres, ou aux r plus grandes valeurs propres, respectivement. Les répétitions éventuelles de valeurs propres ne modifient aucun de ces arguments.

Méthode 2 — Encadrer directement les poids des valeurs propres.

Cette méthode donne une autre preuve des inégalités, sans employer la décomposition de II 2). La réponse à la demande de forme linéaire et l'interprétation matricielle restent celles de la méthode 1.

Pour chaque j , posons

$$t_j = \sum_{k=1}^r \langle v_k | u_j \rangle^2.$$

Par a), chaque colonne de $M_{u,v}$ est une famille de réels positifs ou nuls de somme 1, d'où $0 \leq t_j \leq 1$. Les r premières lignes ont chacune une somme 1, donc

$$\sum_{j=1}^n t_j = r.$$

D'après b) :

$$\sum_{k=1}^r \langle s(v_k) | v_k \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j.$$

Pour la borne inférieure, on remarque que

$$\sum_{j=1}^r (1 - t_j) = \sum_{j=r+1}^n t_j.$$

Puisque $\lambda_j \leq \lambda_r$ pour $j \leq r$ et $\lambda_j \geq \lambda_r$ pour $j > r$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j t_j - \sum_{j=1}^r \lambda_j = - \sum_{j=1}^r \lambda_j (1 - t_j) + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j t_j \geq \lambda_r \left(- \sum_{j=1}^r (1 - t_j) + \sum_{j=r+1}^n t_j \right) = 0.$$

Pour la borne supérieure, on a

$$\sum_{j=n-r+1}^n (1 - t_j) = \sum_{j=1}^{n-r} t_j.$$

Les valeurs propres des r derniers indices sont au moins égales à λ_{n-r+1} , et celles des indices précédents lui sont inférieures ou égales. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=n-r+1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j &= \sum_{j=n-r+1}^n \lambda_j (1 - t_j) - \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j t_j \\ &\geq \lambda_{n-r+1} \left(\sum_{j=n-r+1}^n (1 - t_j) - \sum_{j=1}^{n-r} t_j \right) = 0. \end{aligned}$$

Toutes les quantités qui multiplient les valeurs propres dans ces comparaisons sont positives ou nulles ; les arguments restent donc valables si certaines valeurs propres sont négatives. Pour $r = n$, les sommes sur des ensembles vides valent 0, et les identités sont encore valables. On retrouve exactement les deux inégalités demandées. La méthode 1 s'appuie sur des combinaisons de permutations ; cette seconde méthode utilise seulement les bornes et la somme des poids t_j .

PARTIE III

L'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$ signifie que tout produit sélectionnant exactement un coefficient dans chaque ligne et chaque colonne d'une matrice d'ordre k est nul. Pour $k = 1$, elle signifie que l'unique coefficient est nul. Cette précision traite les blocs d'ordre 1 qui peuvent apparaître dans la récurrence.

1) Permutations de lignes et de colonnes.

Calculons directement les coefficients. Dans la ligne i de P_σ , le seul coefficient non nul est celui d'indice $\sigma(i)$, égal à 1. Ainsi :

$$(P_\sigma M)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (P_\sigma)_{i,k} m_{k,j} = m_{\sigma(i),j}.$$

La ligne i de $P_\sigma M$ est donc la ligne $\sigma(i)$ de M . La multiplication à gauche permute les lignes.

Pour le produit à droite, $(P_{\sigma^{-1}})_{k,j} = 1$ exactement lorsque $\sigma^{-1}(k) = j$, c'est-à-dire $k = \sigma(j)$. Donc :

$$(MP_{\sigma^{-1}})_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} (P_{\sigma^{-1}})_{k,j} = m_{i,\sigma(j)}.$$

La colonne j de $MP_{\sigma^{-1}}$ est la colonne $\sigma(j)$ de M . La multiplication à droite par $P_{\sigma^{-1}}$ permute les colonnes dans cet ordre. En particulier, pour une permutation β quelconque, $(MP_{\beta})_{i,j} = m_{i,\beta^{-1}(j)}$.

2) Sous-matrice nulle et contraintes sur ses dimensions.

a) Mise en blocs.

Question adaptée au programme actuel.

Soient A un ensemble de p indices de lignes et B un ensemble de q indices de colonnes tels que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in A$ et $j \in B$.

Choisissons une permutation σ dont les p premières images sont exactement les indices de A . Choisissons une permutation η dont les q dernières images sont exactement les indices de B , les $n - q$ premières étant les indices de son complémentaire. De telles permutations existent en rangeant chaque ensemble dans l'ordre que l'on souhaite.

Posons $\sigma' = \eta^{-1}$. La question 1) donne :

$$(P_{\sigma}MP_{\sigma'})_{i,j} = m_{\sigma(i),\eta(j)}.$$

Lorsque $i \leq p$ et $j > n - q$, les indices $\sigma(i)$ et $\eta(j)$ appartiennent respectivement à A et B , donc ce coefficient est nul. La matrice prend ainsi la forme :

$$P_{\sigma}MP_{\sigma'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}.$$

Le nombre de lignes et de colonnes de chaque bloc fournit exactement :

$$X \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{R}), \quad Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{R}), \quad Y \in \mathcal{M}_{n-p,q}(\mathbb{R}).$$

Si $p = n$ ou $q = n$, certains blocs n'ont pas de ligne ou de colonne et sont simplement absents, selon la convention précisée dans le sujet. La construction par permutations reste valable.

b) Inégalité $p + q \leq n$.

Méthode 1 — Sommes dans la forme par blocs.

Supposons désormais $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$ et posons $w = \omega(M) > 0$. Une permutation des lignes et des colonnes conserve la positivité des coefficients et les sommes communes. La matrice mise en blocs en a) appartient donc aussi à E_n^+ , avec somme commune w .

Les p premières lignes ont tous leurs coefficients non nuls éventuels dans les $n - q$ premières colonnes. La somme de tous les coefficients du bloc X est donc pw . Or ces $n - q$ colonnes ont une somme totale $(n - q)w$, comprenant les coefficients de X et ceux de Z , tous positifs ou nuls. Ainsi :

$$pw \leq (n - q)w.$$

Comme $w > 0$, on peut diviser par w et obtenir $p \leq n - q$, soit :

$$p + q \leq n.$$

En particulier, une telle matrice ne peut pas posséder une ligne ou une colonne entièrement nulle.

Méthode 2 — Compter la somme sur des ensembles de lignes et de colonnes.

Avec les ensembles A, B définis en a), les coefficients $m_{i,j}$ sont nuls pour $i \in A, j \in B$. La somme des lignes d'indices dans A est donc :

$$pw = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin B} m_{i,j}.$$

Par positivité, en ajoutant les lignes qui n'appartiennent pas à A , cette somme ne peut que croître :

$$pw \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin B} m_{i,j} = (n - q)w.$$

On divise à nouveau par $w > 0$, et l'on retrouve $p + q \leq n$. Cette formulation établit la même contrainte directement dans la matrice initiale, sans effectuer les permutations de a).

3) Démonstration de la propriété $(\mathcal{P}_n)$.

a) Initialisation pour $n = 2$.

Écrivons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il n'existe que deux permutations de $\{1, 2\}$, donc $(\mathcal{H}_2)$ donne :

$$ad = 0, \quad bc = 0.$$

L'égalité $ad = 0$ impose $a = 0$ ou $d = 0$, et $bc = 0$ impose $b = 0$ ou $c = 0$. Les quatre combinaisons possibles fournissent :

- Si $a = b = 0$, la première ligne est nulle : sous-matrice de type $(1, 2)$.
- Si $a = c = 0$, la première colonne est nulle : sous-matrice de type $(2, 1)$.
- Si $d = b = 0$, la seconde colonne est nulle : sous-matrice de type $(2, 1)$.
- Si $d = c = 0$, la seconde ligne est nulle : sous-matrice de type $(1, 2)$.

Ces cas couvrent toutes les possibilités, même si plusieurs se produisent simultanément. Dans chaque cas, la somme des deux dimensions est $3 = 2 + 1$. La propriété $(\mathcal{P}_2)$ est démontrée.

b) Hérité par récurrence forte.

Question adaptée au programme actuel.

Précision de l'énoncé : la notation $(\mathcal{H}_1)$ est étendue aux blocs d'ordre 1. On traitera ces blocs directement ; on n'appliquera pas à l'ordre 1 l'hypothèse de récurrence, formulée seulement pour les ordres $2, \dots, n - 1$.

Soit $n \geq 3$. Supposons $(\mathcal{P}_k)$ vérifiée pour chaque entier k de 2 à $n - 1$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

Première étape — Extraire une sous-matrice vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Si $M = 0$, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est déjà vraie : toute ligne fournit une sous-matrice nulle de type $(1, n)$. Toute sous-matrice d'ordre $n - 1$ vérifie également $(\mathcal{H}_{n-1})$. Pour poursuivre les étapes demandées, on peut donc choisir n'importe laquelle.

Si $M \neq 0$, choisissons un coefficient $m_{i_0, j_0} \neq 0$ et supprimons sa ligne et sa colonne. On obtient une matrice B d'ordre $n - 1$. Toute permutation des colonnes des lignes restantes définit une bijection entre les $n - 1$ indices de lignes restants et les $n - 1$ indices de colonnes restants. En lui ajoutant l'association $i_0 \mapsto j_0$, on obtient une permutation de $[1, n]_{\mathbb{Z}}$.

Le produit correspondant dans M est égal à m_{i_0, j_0} multiplié par le produit correspondant dans B . L'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$ impose que ce produit soit nul. Puisque

$m_{i_0, j_0} \neq 0$, le produit dans B est nul. Ce raisonnement vaut pour toute permutation : B vérifie $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Deuxième étape — Obtenir deux blocs diagonaux carrés.

Comme $n - 1 \geq 2$, l'hypothèse de récurrence appliquée à B fournit une sous-matrice nulle de type (p, q) telle que :

$$p + q = (n - 1) + 1 = n.$$

Ces mêmes lignes et colonnes définissent une sous-matrice nulle dans M . Ses dimensions vérifient $1 \leq p, q \leq n - 1$. D'après 2) a), on peut permuter les lignes et les colonnes de M pour placer cette sous-matrice en haut à droite. Il existe donc $\tau, \tau' \in \mathcal{S}_n$ tels que :

$$N = P_\tau M P_{\tau'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}.$$

Puisque $n - q = p$ et $n - p = q$, les dimensions sont :

$$X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad Z \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \quad Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}).$$

Avant d'utiliser $(\mathcal{H}_n)$ sur N , vérifions qu'elle est préservée. La question 1) donne $n_{i,j} = m_{\tau(i), \tau'^{-1}(j)}$. Pour une permutation ρ des indices de N , le produit

$$\prod_{i=1}^n n_{i, \rho(i)}$$

devient, en posant $\ell = \tau(i)$:

$$\prod_{\ell=1}^n m_{\ell, \theta(\ell)}, \quad \theta = \tau'^{-1} \circ \rho \circ \tau^{-1}.$$

La composition de bijections est une bijection, donc $\theta \in \mathcal{S}_n$. Le produit est nul par $(\mathcal{H}_n)$ pour M . Ainsi, N vérifie aussi $(\mathcal{H}_n)$.

Troisième étape — Un des deux blocs vérifie l'hypothèse correspondante.

Raisonnons par l'absurde. Si X ne vérifie pas $(\mathcal{H}_p)$, il existe une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_p$ telle que :

$$\prod_{i=1}^p x_{i, \alpha(i)} \neq 0.$$

Si Y ne vérifie pas $(\mathcal{H}_q)$, il existe une permutation $\beta \in \mathcal{S}_q$ telle que :

$$\prod_{j=1}^q y_{j, \beta(j)} \neq 0.$$

Définissons la permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ par $\rho(i) = \alpha(i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $\rho(p+j) = p + \beta(j)$ pour $1 \leq j \leq q$. Elle associe les premières lignes aux premières colonnes et les dernières lignes aux dernières colonnes. Le produit correspondant dans N vaut :

$$\prod_{i=1}^n n_{i, \rho(i)} = \left(\prod_{i=1}^p x_{i, \alpha(i)} \right) \left(\prod_{j=1}^q y_{j, \beta(j)} \right) \neq 0.$$

Cela contredit $(\mathcal{H}_n)$ pour N . Donc X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$. Aucun signe des coefficients n'est nécessaire ici : le produit de deux réels non nuls est non nul.

Quatrième étape — Construire une sous-matrice nulle dont la somme des dimensions vaut $n + 1$.

Supposons d'abord que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$.

Si $p \geq 2$, on a $p \leq n - 1$, donc l'hypothèse de récurrence s'applique à X . Il possède une sous-matrice nulle de type (a, b) avec $a + b = p + 1$. Sélectionnons dans N les a lignes correspondantes, toutes situées dans les p premières lignes. Conservons les b colonnes correspondantes de X et ajoutons toutes les q dernières colonnes de N . Dans ces dernières colonnes, les lignes sélectionnées sont nulles, puisque le bloc supérieur droit est nul. On obtient une sous-matrice nulle de type $(a, b + q)$ et :

$$a + (b + q) = p + 1 + q = n + 1.$$

Si $p = 1$, l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ impose $X = (0)$. Avec le bloc supérieur droit nul, la première ligne de N est entièrement nulle. Elle fournit une sous-matrice de type $(1, n)$, dont la somme des dimensions vaut $n + 1$.

Supposons maintenant que Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.

Si $q \geq 2$, l'hypothèse de récurrence s'applique, car $q \leq n - 1$. Il possède une sous-matrice nulle de type (a, b) avec $a + b = q + 1$. Dans N , sélectionnons les b colonnes correspondantes de Y et les a lignes correspondantes parmi les dernières lignes. Ajoutons les p premières lignes : elles sont nulles dans ces colonnes en raison du bloc supérieur droit. On obtient une sous-matrice nulle de type $(p + a, b)$, dont les dimensions vérifient :

$$(p + a) + b = p + q + 1 = n + 1.$$

Si $q = 1$, l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ impose $Y = (0)$. La dernière colonne de N est alors entièrement nulle, car le bloc au-dessus de Y est nul. Elle fournit une sous-matrice de type $(n, 1)$.

Dans tous les cas, N possède une sous-matrice nulle de type (p', q') avec $p' + q' = n + 1$. Les permutations de lignes et de colonnes sont bijectives : les lignes et colonnes sélectionnées correspondent à autant de lignes et de colonnes de M , avec les mêmes coefficients. La même sous-matrice nulle existe donc dans M .

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est établie. L'initialisation en a) et cette hérédité par récurrence forte

prouvent $(\mathcal{P}_n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

4) Justification du résultat admis dans la partie II.

Soit $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$. Tous les produits $m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$ sont positifs ou nuls, puisque tous les coefficients de M le sont.

Supposons qu'aucun de ces produits ne soit strictement positif. Ils sont alors tous nuls, ce qui signifie que M vérifie $(\mathcal{H}_n)$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$, démontrée en 3), fournit une sous-matrice nulle de type (p, q) avec $p + q = n + 1$.

Mais 2) b), appliquée à la même matrice non nulle de E_n^+ , impose $p + q \leq n$. Cette contradiction montre qu'au moins un produit n'est pas nul. Comme il est positif ou nul, il est strictement positif. Ainsi :

$$\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathcal{S}_n \text{ telle que } m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$

Le résultat utilisé dans la partie II est donc démontré. La preuve ne fait appel ni à la décomposition de II 2), ni à une conséquence de cette décomposition : elle n'est pas circulaire.

Relevé des adaptations

- II 2) c) — La borne sur p est formulée comme l'existence d'un choix de décomposition avec $1 \leq p \leq n^2 - n + 1$. La formulation initiale pouvait être comprise comme une borne sur toute représentation, ce qui serait faux si l'on scindait un coefficient positif en plusieurs termes.
- II 3) b) — La lettre s est ajoutée dans la définition de l'endomorphisme symétrique, pour identifier l'objet employé dans les questions suivantes.
- III 2) a) — La convention des blocs sans ligne ou sans colonne est explicitée afin de couvrir les dimensions limites $p = n$ ou $q = n$ autorisées par la définition d'une

sous-matrice.

- III 3) b) — L'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$ est définie aussi pour $k = 1$, où elle signifie que l'unique coefficient est nul. Les blocs d'ordre 1 sont traités directement, car ils peuvent apparaître dans l'hérédité alors que l'hypothèse de récurrence porte sur les ordres au moins égaux à 2.