



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2005

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul. Pour toute matrice M , on note tM sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes; ainsi, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note x_i sa

$$i\text{-ème coordonnée et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = {}^txy$, et la norme euclidienne de x est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$ et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par $x \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$, et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par :

$$f^*(y) = \max\{F_y(x) : x \in U\}.$$

PARTIE I

Dans cette partie, $n = 1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Quelques exemples.

Après avoir étudié les variations de F_y , préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

a) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = a\frac{x^2}{2}$, où a est un réel fixé strictement positif.

b) $U = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.

On pourra introduire le réel β vérifiant $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?

4) Plus généralement, on suppose que $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant, pour tout réel x , $f''(x) > 0$.

a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On note g l'application réciproque de f' .

b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y , montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^*(x) = xg(x) - f(g(x)).$$

Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g .

c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application $x \mapsto xy - f^*(x)$, en déduire que $(f^*)^* = f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.

a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$.

Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$?

b) Lorsque $\|y\| \leq 1$, montrer que $F_y(x) \leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^* .

c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On rappelle que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle$.

2) On suppose dans cette question que $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2,$$

lorsque λ , respectivement μ , désigne la plus petite, respectivement la plus grande, valeur propre de A .

b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah \rangle$ et $\langle h, y - Ax \rangle$, et établir que :

$$F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle.$$

- c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour $x = A^{-1}y$, et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

- 3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$, mais dans cette question on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

Une partie est dite convexe lorsque, pour tous ses éléments x, x' et tout $t \in [0, 1]$, le vecteur $(1-t)x + tx'$ lui appartient. On rappelle les propriétés suivantes : une boule fermée $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée ; l'intersection de deux parties fermées est fermée ; une fonction continue sur une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$ atteint son maximum et son minimum.

On prolonge de façon naturelle, pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}.$$

- a) Existence d'un maximum.

- Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty$, et en déduire que, pour $x_0 \in U$, il existe r strictement positif vérifiant $\|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0)$.
- Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que $U(f) = \mathbb{R}^n$.

- b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.

- Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x') \rangle}{8}.$$

- En supposant que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y , montrer que $f^*(y) < F_y\left(\frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\right)$, puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Bx = c$.

On note $\text{Im } M$ et $\text{Ker } M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n .

On suppose que $c \in \text{Im } B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$; on ne demande pas de le vérifier.

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que, pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\bar{x}$ appartenant à U réalisant le maximum de F_y .

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\bar{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de $\bar{x}$.

a) Vérifier que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, Bx' \rangle = \langle {}^t Bx, x' \rangle$.

Montrer que $\text{Im } {}^t B \subset (\text{Ker } B)^\perp$, en désignant par $(\text{Ker } B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\text{Ker } B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\text{Im } {}^t B$ et de $(\text{Ker } B)^\perp$, et en déduire que $\text{Im } {}^t B = (\text{Ker } B)^\perp$.

On admettra que $\text{rg}(B) = \text{rg}({}^t B)$.

b) Lorsque h est un vecteur de $\text{Ker } B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t\langle y - A\bar{x}, h \rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

En déduire que $\bar{x}$ est caractérisé par l'existence de $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les deux conditions $B\bar{x} = c$ et $y - A\bar{x} = {}^t B\bar{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\bar{x}$.

On fixe un vecteur $\bar{z}$ vérifiant $y - A\bar{x} = {}^tB\bar{z}$, dont l'existence a été établie en 1)b).

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et on définit les suites $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0, \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c).$$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations :

$$A(x_p - \bar{x}) = {}^tB(\bar{z} - z_p), \quad z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x}).$$

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 = -2r\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2\|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n , symétrique à valeurs propres strictement positives, notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}{}^tBBA^{-1/2}x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \frac{2}{\alpha}\right[$.

Montrer que :

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2)\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle \leq 0.$$

En déduire que la suite $(\|z_p - \bar{z}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\bar{x}$.