



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

La définition du préambule exige un maximum atteint. Une borne supérieure finie qui n'est atteinte en aucun point ne suffit donc pas pour appartenir à $U(f)$. Cette distinction intervient en particulier en I.2)b) et I.2)c).

1) Existence de la conjuguée sur un segment.

Écrivons $U = [a, b]$, avec $a \leq b$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto xy$ est continue, et f est continue par hypothèse. Ainsi F_y est continue sur le segment non vide $[a, b]$.

Le théorème des extrema sur un segment assure que F_y y atteint un maximum fini, y compris lorsque $a = b$. Par conséquent, tout réel y appartient à $U(f)$.

$$U(f) = \mathbb{R}.$$

La fonction f^* est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2) Quelques exemples.

a) Fonction quadratique.

Méthode 1 — Variations.

Pour y fixé et $x \in \mathbb{R}$, $F_y(x) = xy - \frac{ax^2}{2}$, d'où $F'_y(x) = y - ax$. Comme $a > 0$, cette dérivée est positive pour $x < y/a$, nulle en y/a et négative pour $x > y/a$.

x	$] -\infty, y/a[$	y/a	$]y/a, +\infty[$
$F'_y(x)$	+	0	—
F_y	croissante	maximum	décroissante

De plus, $F_y(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque le terme

quadratique négatif domine le terme linéaire.

Le maximum est donc atteint, de façon unique, en $x = y/a$, et sa valeur est :

$$F_y(y/a) = \frac{y^2}{a} - \frac{y^2}{2a} = \frac{y^2}{2a}.$$

$$U(f) = \mathbb{R}, \quad f^*(y) = \frac{y^2}{2a}.$$

Méthode 2 — Mise sous forme canonique.

Pour tout x , on développe le carré dans l'identité :

$$F_y(x) = -\frac{a}{2} \left(x - \frac{y}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{2a}.$$

Le carré est positif ou nul et $a > 0$. Ainsi $F_y(x) \leq y^2/(2a)$, avec égalité exactement pour $x = y/a$. On retrouve le même domaine et la même expression de f^* .

L'étude des variations répond à la méthode demandée ; la forme canonique permet de lire directement le maximum et son unicité.

b) Fonction puissance sur les réels strictement positifs.

Posons $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$. Alors $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Pour $x > 0$, $F_y(x) = xy - \frac{x^\alpha}{\alpha}$ et $F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}$.

Si $y \leq 0$, cette dérivée est strictement négative pour tout $x > 0$. La fonction est strictement décroissante, avec :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty.$$

La seconde limite découle de $F_y(x) = x^\alpha (yx^{1-\alpha} - 1/\alpha)$ et de $\alpha > 1$. Pour tout $x > 0$, $F_y(x) < 0$ lorsque $y \leq 0$. Sa borne supérieure est donc 0, mais elle n'est pas atteinte. Aucun $y \leq 0$ n'appartient à $U(f)$.

Si $y > 0$, l'équation $F'_y(x) = 0$ possède l'unique solution $m = y^{1/(\alpha-1)}$. La dérivée est positive sur $]0, m[$ et négative sur $]m, +\infty[$.

x	$]0, m[$	m	$]m, +\infty[$
$F'_y(x)$	+	0	—
F_y	croissante	maximum	décroissante

Comme $m^{\alpha-1} = y$, on a $m^\alpha = ym$ et :

$$F_y(m) = ym \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{ym}{\beta} = \frac{y^\beta}{\beta}.$$

Cette valeur est bien atteinte en $m \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement :

$$U(f) = \mathbb{R}_+^*, \quad f^*(y) = \frac{y^\beta}{\beta} \quad (y > 0).$$

En particulier, 0 est exclu du domaine de la conjuguée défini dans cet énoncé.

c) Fonction exponentielle.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_y(x) = xy - e^x$ et $F'_y(x) = y - e^x$.

Si $y < 0$, la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le produit xy tend vers $+\infty$ et e^x vers 0, donc $F_y(x) \rightarrow +\infty$. Il n'existe pas de maximum.

Si $y = 0$, $F_0(x) = -e^x$ est strictement décroissante et tend vers 0 lorsque $x \rightarrow -\infty$. Elle reste strictement négative : sa borne supérieure 0 n'est pas atteinte.

Si $y > 0$, la dérivée s'annule exactement en $x = \ln y$, est positive avant ce point et négative après.

x	$] -\infty, \ln y[$	$\ln y$	$] \ln y, +\infty[$
$F'_y(x)$	+	0	—
F_y	croissante	maximum	décroissante

Dans ce dernier cas, $F_y(x) \rightarrow -\infty$ aux deux extrémités de $\mathbb{R}$: à gauche le terme xy tend vers $-\infty$, et à droite l'exponentielle domine le terme linéaire.

Le maximum vaut $F_y(\ln y) = y \ln y - y$. Ainsi :

$$U(f) = \mathbb{R}_+^*, \quad f^*(y) = y \ln y - y \quad (y > 0).$$

3) Calcul des doubles conjuguées.

Dans chaque cas, on considère la conjuguée f^* avec le domaine réellement obtenu en I.2). Les expressions trouvées sont continues sur leurs domaines, ce qui permet d'appliquer à nouveau la définition.

Cas a).

La conjuguée est $f^*(u) = \frac{u^2}{2a}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme étudiée en I.2)a), avec coefficient strictement positif $1/a$.

Pour tout $v \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto uv - u^2/(2a)$ atteint donc son maximum en $u = av$, de valeur $av^2/2$.

$$U(f^*) = \mathbb{R}, \quad (f^*)^*(v) = \frac{av^2}{2} = f(v).$$

Cas b).

La conjuguée est $f^*(u) = \frac{u^\beta}{\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\beta > 1$. L'exposant associé à β dans le calcul précédent est :

$$\frac{\beta}{\beta - 1} = \alpha.$$

En appliquant I.2)b), les paramètres $v \leq 0$ ne donnent aucun maximum atteint, tandis que, pour $v > 0$, le maximum est atteint en $u = v^{1/(\beta-1)} = v^{\alpha-1}$ et vaut v^α/α .

$$U(f^*) = \mathbb{R}_+^*, \quad (f^*)^*(v) = \frac{v^\alpha}{\alpha} = f(v) \quad (v > 0).$$

Cas c).

On part de $f^*(u) = u \ln u - u$ sur $u > 0$. Pour un réel v , posons $H_v(u) = uv - u \ln u + u$. Sa dérivée est $H'_v(u) = v - \ln u$.

Elle est positive sur $]0, e^v[$, nulle en e^v et négative sur $]e^v, +\infty[$. Ainsi H_v atteint un maximum unique en $u = e^v$, pour tout réel v .

$$H_v(e^v) = e^v v - e^v v + e^v = e^v.$$

$$U(f^*) = \mathbb{R}, \quad (f^*)^*(v) = e^v = f(v).$$

Dans les trois exemples, la double conjuguée restitue la fonction initiale, avec exactement son domaine initial. Ce constat est ici établi par calcul ; il ne constitue pas une affirmation générale pour toute fonction continue.

4) Cas général en dimension un.

a) Bijection de la dérivée.

La fonction f' est de classe C^1 puisque f est de classe C^2 . Sa dérivée f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f' est strictement croissante, ce qui assure son injectivité.

L'hypothèse $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donne sa surjectivité. Par conséquent, f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Sa réciproque g est continue et strictement croissante. Comme f'' ne s'annule pas, le théorème de dérivation de la réciproque assure que g est dérivable, avec :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) = \frac{1}{f''(g(y))} > 0.$$

b) Expression et dérivée de la conjuguée.

Méthode 1 — Variations et dérivation d'une composée.

Pour y fixé, $F'_y(x) = y - f'(x)$. La stricte croissance de f' et l'identité $f'(g(y)) = y$ donnent le tableau :

x	$] -\infty, g(y)[$	$g(y)$	$]g(y), +\infty[$
$F'_y(x)$	+	0	—
F_y	strictement croissante	maximum unique	strictement décroissante

Ainsi F_y atteint son maximum en $g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Aucune hypothèse sur les limites aux extrémités n'est nécessaire : les deux monotonies comparent déjà toute valeur à celle en $g(y)$.

$$U(f) = \mathbb{R}, \quad f^*(y) = yg(y) - f(g(y)).$$

La fonction g est dérivable, et f également. La règle du produit et la dérivation d'une composée donnent :

$$(f^*)'(y) = g(y) + yg'(y) - f'(g(y))g'(y) = g(y).$$

La dernière égalité utilise $f'(g(y)) = y$. Donc :

$$(f^*)' = g.$$

On a même $(f^*)''(y) = g'(y) = 1/f''(g(y)) > 0$, puisque ce dernier quotient est continu.

Méthode 2 — Inégalité de la tangente d'une fonction convexe.

Comme $f'' > 0$, f est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour $t = g(y)$, l'inégalité de la tangente donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t) = f(t) + y(x - t).$$

En réarrangeant, $xy - f(x) \leq ty - f(t)$, avec égalité pour $x = t$. Le maximum existe donc, et $f^*(y) = yg(y) - f(g(y))$. La dérivation explicite de cette expression, justifiée par la dérivabilité de g , fournit à nouveau :

$$(f^*)'(y) = g(y) + (y - f'(g(y)))g'(y) = g(y).$$

La première méthode décrit les variations ; la seconde relie le maximum à l'inégalité caractéristique de la convexité.

c) Double conjugaison.

Méthode 1 — Variations de la nouvelle fonction.

Pour $y \in \mathbb{R}$, posons $H_y(x) = xy - f^*(x)$ sur $\mathbb{R}$. D'après I.4)b), $H'_y(x) = y - g(x)$.

La fonction g est une bijection strictement croissante, réciproque de f' . L'équation $g(x) = y$ possède donc l'unique solution $x = f'(y)$. Le signe de H'_y est positif avant ce point et négatif après.

Le maximum est atteint pour tout y , en $x = f'(y)$. Ainsi $U(f^*) = \mathbb{R}$, et :

$$(f^*)^*(y) = yf'(y) - f^*(f'(y)).$$

Or l'expression de I.4)b) et $g(f'(y)) = y$ donnent :

$$f^*(f'(y)) = f'(y)y - f(y).$$

Par conséquent, $(f^*)^*(y) = f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, soit $(f^*)^* = f$ avec le même domaine.

Méthode 2 — Double inégalité et point d'égalité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $f^*(x)$ est le maximum des valeurs $tx - f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = y$, on obtient :

$$f^*(x) \geq yx - f(y),$$

donc $yx - f^*(x) \leq f(y)$. D'autre part, pour $x = f'(y)$, le calcul précédent donne $f^*(x) = yx - f(y)$: la borne $f(y)$ est atteinte.

Le maximum existe pour chaque y et vaut $f(y)$. Cette approche retrouve $U(f^*) = \mathbb{R}$ et

$(f^*)^* = f$ sans nouvelle étude de dérivée, en exploitant directement la définition du premier maximum.

PARTIE II

1) Conjuguée de la norme euclidienne.

a) Calcul sur une demi-droite.

Comme $t > 0$, $\|ty\| = t\|y\|$ et $\langle ty, y \rangle = t\|y\|^2$. Ainsi :

$$F_y(ty) = t\|y\|^2 - t\|y\| = t\|y\|(\|y\| - 1).$$

Le coefficient de t détermine la limite :

Condition	Limite lorsque $t \rightarrow +\infty$
$\ y\ > 1$	$+\infty$
$0 < \ y\ < 1$	$-\infty$
$\ y\ = 0$ ou $\ y\ = 1$	0

Si $\|y\| > 1$, les valeurs de F_y sur cette demi-droite ne sont pas majorées : un maximum sur $\mathbb{R}^n$ est impossible. Par conséquent :

$$U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}.$$

Pour les autres valeurs de y , le calcul sur une seule demi-droite ne suffit pas encore à établir l'existence d'un maximum sur tout $\mathbb{R}^n$.

b) Maximum sur la boule unité.

Supposons $\|y\| \leq 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F_y(x) = \langle x, y \rangle - \|x\| \leq \|x\|\|y\| - \|x\| = \|x\|(\|y\| - 1) \leq 0.$$

Or $F_y(0) = 0$. Le maximum est donc atteint en 0 pour tout y de la boule unité. En combinant avec l'inclusion de II.1)a), on conclut :

$$U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}, \quad f^*(y) = 0 \quad (\|y\| \leq 1).$$

Lorsque $\|y\| < 1$, l'inégalité est stricte pour $x \neq 0$; le maximum est alors unique. Lorsque $\|y\| = 1$, les vecteurs $x = ty$, avec $t \geq 0$, réalisent également ce maximum. L'existence, et non l'unicité, définit $U(f)$.

c) Double conjuguée.

La fonction f^* est la fonction nulle, continue sur la boule unité fermée. Pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, sa conjuguée recherche le maximum de $\langle u, v \rangle$ parmi les u vérifiant $\|u\| \leq 1$.

Cauchy-Schwarz assure $\langle u, v \rangle \leq \|u\|\|v\| \leq \|v\|$.

Si $v \neq 0$, le vecteur $u = v/\|v\|$ appartient à la boule unité et donne $\langle u, v \rangle = \|v\|$. Si $v = 0$, toutes les valeurs sont nulles et le maximum est également atteint, par exemple en $u = 0$.

Ainsi :

$$U(f^*) = \mathbb{R}^n, \quad (f^*)^*(v) = \|v\| = f(v).$$

2) Conjuguée d'une forme quadratique strictement positive.

a) Encadrement par les valeurs propres extrêmes.

La matrice A est réelle symétrique. Le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres $(u_1, \dots, u_n)$, avec $Au_i = \theta_i u_i$. Par hypothèse, chaque θ_i est strictement positif.

Posons $\lambda = \min_i \theta_i > 0$ et $\mu = \max_i \theta_i$. Pour

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i,$$

l'orthonormalité donne :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \langle x, Ax \rangle = \sum_{i=1}^n \theta_i \xi_i^2.$$

Comme $\lambda \xi_i^2 \leq \theta_i \xi_i^2 \leq \mu \xi_i^2$ pour chaque i , la somme de ces inégalités fournit :

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2.$$

En particulier, $\langle x, Ax \rangle > 0$ dès que $x \neq 0$.

b) Identité des accroissements.

On utilise la bilinéarité du produit scalaire et la symétrie de A :

$$\langle x + h, A(x + h) \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle.$$

Les deux termes croisés sont égaux : $\langle x, Ah \rangle = \langle h, Ax \rangle$. En soustrayant les expressions de $F_y(x + h)$ et $F_y(x)$, on obtient :

$$F_y(x + h) - F_y(x) = \langle h, y \rangle - \langle h, Ax \rangle - \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

Donc :

$$F_y(x + h) - F_y(x) = \langle h, y - Ax \rangle - \frac{\langle h, Ah \rangle}{2} \leq \langle h, y - Ax \rangle.$$

La dernière inégalité découle de II.2)a), qui donne $\langle h, Ah \rangle \geq 0$.

c) Maximum et double conjuguée.

Justification de l'inverse.

Si $Ax = 0$, alors $\langle x, Ax \rangle = 0$ et II.2)a) impose $\lambda \|x\|^2 \leq 0$. Comme $\lambda > 0$, cela implique $x = 0$. Ainsi $\text{Ker } A = \{0\}$ et, en dimension finie, A est inversible.

Son inverse est symétrique, puisque ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$. Dans la base orthonormale de II.2)a), on a $A^{-1}u_i = \theta_i^{-1}u_i$. Toutes ses valeurs propres sont donc strictement positives.

Méthode 1 — Identité exacte des accroissements.

Fixons y et posons $x_* = A^{-1}y$. On a $y - Ax_* = 0$. L'identité de II.2)b), appliquée en x_* , donne pour tout h :

$$F_y(x_* + h) - F_y(x_*) = -\frac{\langle h, Ah \rangle}{2} \leq -\frac{\lambda}{2}\|h\|^2 \leq 0.$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x_* + h$; ainsi x_* réalise le maximum global. L'inégalité est stricte lorsque $h \neq 0$, donc ce maximum est unique.

Comme $Ax_* = y$, sa valeur est :

$$F_y(x_*) = \langle x_*, y \rangle - \frac{\langle x_*, Ax_* \rangle}{2} = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}.$$

$$U(f) = \mathbb{R}^n, \quad f^*(y) = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}.$$

La même démonstration s'applique à la matrice symétrique A^{-1} dont les valeurs propres sont strictement positives, comme vérifié ci-dessus. La conjuguée de f^* est donc définie sur $\mathbb{R}^n$ et vaut :

$$(f^*)^*(v) = \frac{\langle v, (A^{-1})^{-1}v \rangle}{2} = \frac{\langle v, Av \rangle}{2} = f(v).$$

Méthode 2 — Gradient et hessienne.

La fonction F_y est un polynôme en les coordonnées de x ; elle est donc de classe C^2 sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$.

Pour $A = (a_{ij})$, la symétrie permet d'écrire :

$$\frac{\partial F_y}{\partial x_k}(x) = y_k - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \right) = y_k - (Ax)_k.$$

Ainsi $\nabla F_y(x) = y - Ax$ et $\nabla^2 F_y(x) = -A$. Le seul point critique est $x_* = A^{-1}y$, et sa hessienne est explicitement $-A$.

Les vecteurs u_i de II.2)a) sont des vecteurs propres de cette hessienne, de valeurs propres $-\theta_i < 0$. Le point critique est donc un maximum local strict. Comme la hessienne possède ces mêmes valeurs propres strictement négatives en tout point de l'ouvert convexe $\mathbb{R}^n$, le critère global de concavité donne un maximum global en x_* .

Pour vérifier son unicité, si $x \neq x_*$, considérons $\varphi(t) = F_y(x_* + t(x - x_*))$. On a $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(t) = -\langle x - x_*, A(x - x_*) \rangle < 0$. Donc φ' est négative pour $t > 0$ et $F_y(x) = \varphi(1) < \varphi(0) = F_y(x_*)$.

L'évaluation en x_* donne à nouveau $f^*(y) = \langle y, A^{-1}y \rangle / 2$ et $U(f) = \mathbb{R}^n$. En remplaçant A par A^{-1} , avec les mêmes hypothèses déjà vérifiées, on obtient $(f^*)^* = f$ sur $\mathbb{R}^n$.

La première approche est une comparaison algébrique globale ; la seconde met en pratique le calcul du gradient et l'étude spectrale de la hessienne.

3) Restriction à une partie convexe fermée non vide.

a) Existence d'un maximum.

Question adaptée au programme actuel : les propriétés des boules fermées, de l'intersection de parties fermées et des extrema sur une partie fermée bornée sont précisées dans l'énoncé, ainsi que la définition de la convexité. Elles suffisent aux arguments qui suivent.

Fixons $y \in \mathbb{R}^n$. Cauchy-Schwarz et II.2)a) donnent, pour tout x :

$$F_y(x) \leq \|x\| \|y\| - \frac{\lambda}{2} \|x\|^2.$$

Pour $s \geq 0$, le polynôme $s\|y\| - \lambda s^2/2$ tend vers $-\infty$ lorsque $s \rightarrow +\infty$, puisque $\lambda > 0$.

L'inégalité précédente implique donc :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty.$$

Cela signifie précisément que, pour tout réel L , il existe $R > 0$ tel que $\|x\| > R$ entraîne $F_y(x) < L$.

Comme U est non vide, choisissons $x_0 \in U$ et appliquons cette propriété à $L = F_y(x_0)$.

On peut augmenter le rayon obtenu et choisir $r > \|x_0\|$ tel que :

$$\|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0).$$

La boule fermée de rayon r est fermée et bornée. Son intersection U_0 avec U est fermée, puisque U l'est, et bornée, puisque ses éléments ont une norme au plus r . Elle est aussi non vide, car $x_0 \in U_0$.

La fonction F_y , polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, est continue sur U_0 . Elle atteint donc son maximum sur U_0 en un point $x_1 \in U_0$. En particulier, $F_y(x_1) \geq F_y(x_0)$.

Pour $x \in U \setminus U_0$, on a $\|x\| > r$, donc $F_y(x) < F_y(x_0) \leq F_y(x_1)$. Pour $x \in U_0$, l'inégalité $F_y(x) \leq F_y(x_1)$ découle de la définition de x_1 . Ce point réalise donc le maximum sur tout U .

Le raisonnement étant valable pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$, on obtient $U(f) = \mathbb{R}^n$.

b) Identité du milieu et unicité.

Méthode 1 — Identité quadratique au milieu.

Posons $m = (x + x')/2$. Les termes linéaires se compensent dans $F_y(m) - F_y(x)/2 - F_y(x')/2$. Pour les termes quadratiques, on a :

$$\langle m, Am \rangle = \frac{1}{4}(\langle x, Ax \rangle + 2\langle x, Ax' \rangle + \langle x', Ax' \rangle).$$

Ainsi :

$$F_y(m) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{8}(\langle x, Ax \rangle - 2\langle x, Ax' \rangle + \langle x', Ax' \rangle).$$

En développant $\langle x - x', A(x - x') \rangle$, on reconnaît le terme de droite et on obtient :

$$F_y\left(\frac{x + x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x - x', A(x - x') \rangle}{8}.$$

Supposons que $\bar{x} \neq \bar{x}'$ réalisent tous deux le maximum sur U . Alors

$F_y(\bar{x}) = F_y(\bar{x}') = f^*(y)$, tandis que II.2)a) donne :

$$\langle \bar{x} - \bar{x}', A(\bar{x} - \bar{x}') \rangle \geq \lambda \|\bar{x} - \bar{x}'\|^2 > 0.$$

L'identité implique donc :

$$F_y\left(\frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\right) > f^*(y).$$

Mais le milieu appartient à U par convexité, ce qui contredit la définition de $f^*(y)$ comme maximum sur U . Il existe donc un unique maximiseur.

Méthode 2 — Restriction à un segment et stricte concavité.

L'identité demandée est établie ci-dessus. Pour retrouver l'unicité par une autre approche, supposons encore que $\bar{x} \neq \bar{x}'$ soient deux maximiseurs, et posons $d = \bar{x}' - \bar{x}$.

Le segment $\bar{x} + td$, pour $t \in [0, 1]$, est contenu dans U par convexité. La fonction $\varphi(t) = F_y(\bar{x} + td)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\varphi''(t) = -\langle d, Ad \rangle < 0.$$

Fixons $t \in]0, 1[$. Le théorème des accroissements finis, applicable sur $[0, t]$ et $[t, 1]$, donne deux réels $\xi \in]0, t[$ et $\eta \in]t, 1[$ tels que :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(\xi), \quad \frac{\varphi(1) - \varphi(t)}{1-t} = \varphi'(\eta).$$

Comme $\varphi'' < 0$, la dérivée φ' est strictement décroissante. Puisque $\xi < \eta$, la première pente est strictement supérieure à la seconde. En multipliant par $t(1-t) > 0$ et en regroupant les termes, on obtient :

$$\varphi(t) > (1-t)\varphi(0) + t\varphi(1) = f^*(y).$$

Il s'agit d'une valeur en un point de U , ce qui donne la même contradiction.

L'identité au milieu suffit pour la première méthode ; la seconde emploie les accroissements finis pour mettre en évidence la stricte concavité le long de toute direction non nulle.

PARTIE III

On fixe désormais $y \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble $U = \{x : Bx = c\}$ est non vide puisque $c \in \text{Im } B$, et son caractère convexe fermé est donné par l'énoncé. La partie II assure donc l'existence d'un unique maximiseur $\bar{x} \in U$.

1) Caractérisation du maximiseur.

a) Image de la transposée et orthogonal du noyau.

Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, l'écriture matricielle donne :

$$\langle x, Bx' \rangle = {}^t x B x' = {}^t ({}^t B x) x' = \langle {}^t B x, x' \rangle.$$

Si $v \in \text{Im } {}^t B$, il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = {}^t B w$. Pour tout $h \in \text{Ker } B$, l'identité précédente donne :

$$\langle v, h \rangle = \langle {}^t B w, h \rangle = \langle w, B h \rangle = 0.$$

Ainsi $v \in (\text{Ker } B)^\perp$ et $\text{Im } {}^t B \subset (\text{Ker } B)^\perp$.

Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } B + \text{rg } B = n$. La dimension d'un supplémentaire orthogonal fournit donc :

$$\dim(\text{Ker } B)^\perp = n - \dim \text{Ker } B = \text{rg } B.$$

D'autre part, $\dim \operatorname{Im} {}^tB = \operatorname{rg} {}^tB = \operatorname{rg} B$, la dernière égalité étant autorisée et rappelée dans l'énoncé.

L'inclusion de deux sous-espaces de même dimension entraîne leur égalité :

$$\operatorname{Im} {}^tB = (\operatorname{Ker} B)^\perp.$$

b) Conditions nécessaires et suffisantes.

On établit d'abord l'identité demandée, puis les deux sens de la caractérisation.

Pour $h \in \operatorname{Ker} B$ et $t \in \mathbb{R}$, II.2)b), avec l'accroissement th , donne :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t\langle h, y - A\bar{x} \rangle - \frac{t^2}{2}\langle h, Ah \rangle.$$

Tous les points $\bar{x} + th$ appartiennent à U , car $B(\bar{x} + th) = B\bar{x} + tBh = c$.

Nécessité.

La fonction d'une variable $\varphi_h(t) = F_y(\bar{x} + th)$ est un polynôme et admet un maximum en $t = 0$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée en 0 est donc nulle. L'identité précédente donne :

$$\varphi'_h(0) = \langle y - A\bar{x}, h \rangle = 0.$$

Comme cela vaut pour tout $h \in \operatorname{Ker} B$, on a $y - A\bar{x} \in (\operatorname{Ker} B)^\perp$. Par III.1)a), ce vecteur appartient à $\operatorname{Im} {}^tB$: il existe $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ tel que $y - A\bar{x} = {}^tB\bar{z}$.

On a aussi $B\bar{x} = c$, puisque $\bar{x} \in U$. Les deux conditions sont donc nécessaires.

Suffisance.

Supposons qu'un vecteur u et un vecteur z satisfassent $Bu = c$ et $y - Au = {}^tBz$. Pour tout $x \in U$, posons $h = x - u$. Alors $Bh = Bx - Bu = 0$.

L'identité de II.2)b) donne :

$$F_y(x) - F_y(u) = \langle h, {}^tBz \rangle - \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

Or $\langle h, {}^tBz \rangle = \langle Bh, z \rangle = 0$. Par conséquent :

$$F_y(x) - F_y(u) = -\frac{\langle h, Ah \rangle}{2} \leq -\frac{\lambda}{2}\|h\|^2 \leq 0.$$

Ainsi u réalise le maximum sur U , de façon unique, et $u = \bar{x}$. On a donc la caractérisation complète :

$$u = \bar{x} \iff Bu = c \text{ et } \exists z \in \mathbb{R}^n, y - Au = {}^tBz.$$

Le vecteur $\bar{z}$ n'est pas nécessairement unique : si $k \in \text{Ker } {}^tB$, le vecteur $\bar{z} + k$ satisfait la même égalité. L'unicité démontrée concerne le maximiseur $\bar{x}$.

2) Algorithme de recherche.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé fixe explicitement un vecteur $\bar{z}$ fourni par III.1)b), afin que les expressions des questions suivantes portent sur un choix défini. Aucun caractère unique de $\bar{z}$ n'est requis.

On conserve ce choix dans tout ce qui suit.

a) Définition des suites et relations d'erreur.

Comme A est inversible, pour chaque z_p il existe un unique x_p satisfaisant la première relation, à savoir :

$$x_p = A^{-1}(y - {}^tBz_p).$$

Ce vecteur définit ensuite un unique $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$. À partir du z_0 donné, une récurrence construit donc les deux suites pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'inversibilité de B n'intervient pas.

La caractérisation de III.1)b) s'écrit $A\bar{x} = y - {}^tB\bar{z}$. En la soustrayant à l'équation de x_p , on obtient :

$$A(x_p - \bar{x}) = {}^tB(\bar{z} - z_p).$$

Comme $B\bar{x} = c$, la seconde relation devient :

$$z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + r(Bx_p - B\bar{x}) = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x}).$$

Les deux identités demandées sont ainsi établies.

b) Identité de décroissance de la distance au carré.

Pour alléger les calculs, posons $e_p = x_p - \bar{x}$ et $d_p = z_p - \bar{z}$. Les relations précédentes deviennent $Ae_p = -{}^tBd_p$ et $d_{p+1} = d_p + rBe_p$.

En développant le carré de la norme :

$$\|d_{p+1}\|^2 - \|d_p\|^2 = 2r\langle d_p, Be_p \rangle + r^2\|Be_p\|^2.$$

L'identité de transposition donne :

$$\langle d_p, Be_p \rangle = \langle {}^tBd_p, e_p \rangle = \langle -Ae_p, e_p \rangle = -\langle e_p, Ae_p \rangle.$$

En remplaçant, on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 = -2r\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2\|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

c) Racine carrée de la matrice et majoration spectrale.

Construction de $A^{1/2}$.

Par le théorème spectral, écrivons $A = QD{}^tQ$, où les colonnes de Q forment une base orthonormale de vecteurs propres et $D = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, avec tous les $\theta_i > 0$. Ainsi ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_n$.

Posons $R = \text{diag}(\sqrt{\theta_1}, \dots, \sqrt{\theta_n})$ et :

$$A^{1/2} = QR{}^tQ.$$

Cette matrice est symétrique, puisque ${}^tR = R$, et elle vérifie :

$$(A^{1/2})^2 = QR{}^tQQR{}^tQ = QR^2{}^tQ = QD{}^tQ = A.$$

Les colonnes de Q sont ses vecteurs propres, de valeurs propres $\sqrt{\theta_i} > 0$. La matrice est donc inversible, et :

$$A^{-1/2} = Q \text{diag}(\theta_1^{-1/2}, \dots, \theta_n^{-1/2}){}^tQ.$$

Cette inverse est symétrique ; de plus $(A^{-1/2})^2 = A^{-1}$ et $A^{-1/2}A^{1/2} = I_n$.

Identité de la norme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, en utilisant la symétrie de $A^{-1/2}$:

$$\|BA^{-1/2}x\|^2 = {}^t(BA^{-1/2}x)(BA^{-1/2}x) = {}^t_x A^{-1/2} {}^t B B A^{-1/2} x.$$

En posant $S = A^{-1/2} {}^t B B A^{-1/2}$, cela donne $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, Sx \rangle$.

Symétrie et positivité de la plus grande valeur propre.

La transposée d'un produit renverse l'ordre des facteurs ; ainsi :

$${}^t S = {}^t(A^{-1/2}) {}^t B {}^t(B(A^{-1/2})) = S.$$

La matrice S est réelle symétrique. Elle admet donc une base orthonormale de vecteurs propres. Si $Sv = \sigma v$ avec $v \neq 0$, l'identité précédente donne :

$$\sigma \|v\|^2 = \langle v, Sv \rangle = \|BA^{-1/2}v\|^2 \geq 0.$$

Donc toutes les valeurs propres σ de S sont positives ou nulles. Pour montrer que l'une d'elles est strictement positive, utilisons $B \neq 0$. Il existe w tel que $Bw \neq 0$. En prenant $v = A^{1/2}w$, on a :

$$\langle v, Sv \rangle = \|BA^{-1/2}A^{1/2}w\|^2 = \|Bw\|^2 > 0.$$

Si toutes les valeurs propres de S étaient nulles, sa diagonalisation orthonormale donnerait $S = 0$, ce qui contredirait cette inégalité. Sa plus grande valeur propre α est donc strictement positive.

Il n'est pas nécessaire que toutes les valeurs propres de S soient strictement positives ; certaines peuvent être nulles lorsque B n'est pas inversible.

Majoration de $\|Bx\|^2$.

En écrivant un vecteur v dans une base orthonormale de vecteurs propres de S , exactement comme en II.2)a), les valeurs propres au plus α donnent :

$$\langle v, Sv \rangle \leq \alpha \|v\|^2.$$

Appliquons cette inégalité à $v = A^{1/2}x$. L'identité de la norme fournit :

$$\|Bx\|^2 = \|BA^{-1/2}v\|^2 = \langle v, Sv \rangle \leq \alpha \|A^{1/2}x\|^2.$$

Or la symétrie et $(A^{1/2})^2 = A$ donnent $\|A^{1/2}x\|^2 = \langle x, Ax \rangle$. Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle.$$

d) Décroissance et convergence vers le maximiseur.

On suppose $0 < r < 2/\alpha$. Les notations $e_p = x_p - \bar{x}$ et $d_p = z_p - \bar{z}$ restent celles de III.2)b).

L'identité de III.2)b) et la majoration de III.2)c) donnent :

$$\|d_{p+1}\|^2 - \|d_p\|^2 \leq -2r\langle e_p, Ae_p \rangle + r^2\alpha\langle e_p, Ae_p \rangle = r(r\alpha - 2)\langle e_p, Ae_p \rangle \leq 0.$$

La dernière inégalité utilise $r\alpha - 2 < 0$ et $\langle e_p, Ae_p \rangle \geq 0$. C'est exactement l'inégalité demandée.

Méthode 1 — Décroissance d'une suite réelle et contrôle de l'erreur.

Posons $D_p = \|d_p\|^2$. La suite (D_p) est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $D \geq 0$. Comme la racine carrée est croissante et continue sur $[0, +\infty[$, la suite $(\|d_p\|)$ est elle aussi décroissante et converge vers $\sqrt{D}$.

Pour démontrer la convergence de x_p , posons $k = r(2 - r\alpha) > 0$. L'inégalité précédente se réécrit :

$$0 \leq k\langle e_p, Ae_p \rangle \leq D_p - D_{p+1}.$$

Les deux suites D_p et D_{p+1} tendent vers D , donc $D_p - D_{p+1} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne $\langle e_p, Ae_p \rangle \rightarrow 0$.

Comme II.2)a) assure $\lambda\|e_p\|^2 \leq \langle e_p, Ae_p \rangle$ avec $\lambda > 0$, on obtient :

$$0 \leq \|x_p - \bar{x}\|^2 \leq \frac{D_p - D_{p+1}}{k\lambda} \rightarrow 0.$$

Ainsi $\|x_p - \bar{x}\| \rightarrow 0$, c'est-à-dire $x_p \rightarrow \bar{x}$.

Cette preuve n'exige pas que la limite de $\|z_p - \bar{z}\|$ soit nulle. Elle exploite la diminution de la distance au carré pour contrôler l'erreur sur x_p .

Méthode 2 — Diagonalisation de la récurrence sur z_p .

Cette méthode explique également l'effet éventuel d'un noyau non nul de tB . Posons $K = BA^{-1/2}$ et $C = BA^{-1}{}^tB = K{}^tK$. On a $S = {}^tKK$, où S est la matrice de III.2)c).

La matrice C est réelle symétrique et, pour tout v , $\langle v, Cv \rangle = \|{}^tKv\|^2 \geq 0$. Ses valeurs propres sont donc positives ou nulles.

Montrons que chaque valeur propre strictement positive σ de C est au plus α . Soit $v \neq 0$ tel que $Cv = \sigma v$. Alors :

$$\|{}^tKv\|^2 = \sigma\|v\|^2 > 0.$$

Le vecteur $u = {}^tKv$ est donc non nul, et :

$$Su = {}^tKK{}^tKv = {}^tKCv = \sigma{}^tKv = \sigma u.$$

Ainsi σ est une valeur propre de S , donc $0 < \sigma \leq \alpha$.

De III.2)a), $e_p = -A^{-1}{}^tBd_p$; en substituant dans $d_{p+1} = d_p + rBe_p$, on obtient :

$$d_{p+1} = (I_n - rC)d_p.$$

Choisissons une base orthonormale $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de C , avec $Cv_i = \sigma_i v_i$ et $\sigma_i \geq 0$. Si

$$d_0 = \sum_i \eta_i v_i,$$

une récurrence donne :

$$d_p = \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - r\sigma_i)^p v_i.$$

Si $\sigma_i > 0$, on a $0 < r\sigma_i \leq r\alpha < 2$, donc $|1 - r\sigma_i| < 1$. La suite géométrique correspondante tend vers 0. Si $\sigma_i = 0$, le facteur est constamment 1.

Par orthonormalité :

$$\|d_p\|^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 (1 - r\sigma_i)^{2p}.$$

Chaque terme est décroissant au sens large et converge ; la somme est finie. La norme est donc décroissante et convergente. De plus, d_p converge vers

$$d_\infty = \sum_{\sigma_i=0} \eta_i v_i.$$

Ce vecteur est dans $\text{Ker } C$. L'égalité $\langle d_\infty, C d_\infty \rangle = \|{}^t K d_\infty\|^2$ impose ${}^t K d_\infty = 0$. Comme ${}^t K = A^{-1/2} {}^t B$ et $A^{-1/2}$ est inversible, on a ${}^t B d_\infty = 0$.

Une matrice fixe agit continûment sur une suite convergente, car chaque coordonnée de son image est une somme finie de coordonnées multipliées par des constantes. Ainsi :

$$e_p = -A^{-1} {}^t B d_p \longrightarrow -A^{-1} {}^t B d_\infty = 0.$$

On conclut encore $x_p \rightarrow \bar{x}$. Cette approche donne même $z_p \rightarrow \bar{z} + d_\infty$, où $d_\infty \in \text{Ker } {}^t B$; ce vecteur limite satisfait donc la même caractérisation que $\bar{z}$.

La première méthode utilise seulement une inégalité et la convergence monotone ; la seconde décompose les erreurs selon une base de vecteurs propres et identifie les composantes qui restent constantes.

Relevé des adaptations

- II.3), préambule et a) : ajout de la définition de la convexité et des propriétés précises des boules fermées, des intersections de parties fermées et des extrema sur une partie fermée bornée non vide. Ces rappels encadrent les arguments requis sans faire appel à une théorie topologique générale. Les demandes originales sont conservées.
- III.2), préambule : choix explicite d'un vecteur $\bar{z}$ satisfaisant la caractérisation de III.1)b), afin de définir sans ambiguïté le vecteur utilisé en III.2)a), b) et d). Les relations et les demandes de l'algorithme sont inchangées.