



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2004

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et on identifie tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, \dots, x_n$ dans la base canonique :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1, \dots, x_n)$. Le produit scalaire canonique est

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme euclidienne est $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Une suite de vecteurs (X_p) converge vers X lorsque $\|X_p - X\| \rightarrow 0$.

On désigne par I la matrice-identité d'ordre n et par A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

Partie I : Étude d'une suite de vecteurs

I.1. Dans cette question, C est un vecteur non nul de composantes $c_1, \dots, c_n$ dans $\mathbb{R}^n$.

I.1.a. Expliciter le produit matriciel $C^t C$. La matrice $C^t C$ est-elle diagonalisable ?

I.1.b. Exprimer $(C^t C)^2$ en fonction de $C^t C$ et de la norme de C .

I.1.c. En déduire que toute valeur propre de $C^t C$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.

I.1.d. Préciser le noyau de $C^t C$ et indiquer dans quel cas 0 est une valeur propre.

Calculer $C^t C C$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

I.1.e. En déduire la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C^t C$.

Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

I.2. Dans cette question, X et Y désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

I.2.a. Établir que

$${}^tXY = {}^tYX, \quad {}^tXAY = \langle X, AY \rangle = \langle AX, Y \rangle,$$

$$({}^tXY)^2 = {}^tY(X{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y.$$

I.2.b. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $AU_i = \lambda_i U_i$ pour tout i .

I.2.c. Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, \dots, U_n)$, ainsi que leurs normes, à l'aide des produits scalaires $\langle U_i, X \rangle$ et $\langle U_i, AX \rangle$. Prouver l'égalité

$$\langle X, AX \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle U_i, X \rangle^2.$$

I.2.d. En déduire les égalités matricielles

$$I = \sum_{i=1}^n U_i {}^t(U_i), \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i {}^t(U_i).$$

Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i {}^t(U_i)$.

I.2.e. En déduire les inégalités

$$\min_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2 \leq \langle X, AX \rangle \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2.$$

I.2.f. Application : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice

d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $a_{ii} = 4$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ pour les indices possibles et tous les autres coefficients sont nuls.

I.3. Dans cette question, on note $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

I.3.a. Vérifier que

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle U_i, X \rangle^2.$$

Prouver que $\|AX\| \leq \rho(A)\|X\|$ et exhiber un vecteur réalisant l'égalité.

I.3.b. Établir l'équivalence des deux propositions :

- (i) Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$.
- (ii) $\rho(A) < 1$.

Partie II : Un problème de minimisation

Dans toute cette partie, $\mathbb{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à l'entier naturel p , et α, β sont deux réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| : \alpha \leq t \leq \beta\}$ lorsque $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ et $Q(0) = 1$.

II.1. On considère les fonctions T_p définies par $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ et, pour $p \geq 1$,
 $T_{p+1}(t) = 2tT_p(t) - T_{p-1}(t)$.

II.1.a. Montrer que T_p est une fonction polynôme de degré p et préciser le coefficient de t^p .

II.1.b. Prouver que, pour tout réel θ et tout $p \in \mathbb{N}$, $T_p(\cos \theta) = \cos(p\theta)$.

On rappelle la formule trigonométrique $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

II.1.c. En déduire que $\sup\{|T_p(t)| : -1 \leq t \leq 1\} = 1$. Pour $p \geq 1$, montrer que T_p admet dans $] -1, 1[$ exactement p zéros distincts, que l'on précisera. Préciser aussi le cas $p = 0$.

II.2. On suppose dans cette question $p \geq 1$ et on désigne par a un réel tel que $|a| > 1$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| : -1 \leq t \leq 1\}$ lorsque $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ et $Q(a) = 1$. Pour cela, on désigne par S_p la fonction $T_p/T_p(a)$.

II.2.a. On considère, s'il en existe une, une fonction polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et

$$\sup\{|P(t)| : -1 \leq t \leq 1\} < \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

Préciser, pour $0 \leq j \leq p$, le signe de $S_p(\cos(j\pi/p)) - P(\cos(j\pi/p))$. En déduire que $S_p - P$ a au moins $p + 1$ racines réelles distinctes, puis obtenir une contradiction en examinant son degré.

II.2.b. En déduire que le minimum de $\sup\{|Q(t)| : -1 \leq t \leq 1\}$ sous la contrainte $Q(a) = 1$ est atteint par S_p et vaut $1/|T_p(a)|$.

II.2.c. Si P est un polynôme satisfaisant à ce problème de minimisation, montrer que $(P + S_p)/2$ y satisfait aussi et que, pour $0 \leq j \leq p$,

$$\frac{1}{2} \left| P\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right) + S_p\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right) \right| = \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

En déduire que $P = S_p$.

II.3. Pour $p \geq 1$, établir que l'unique solution du problème de minimisation posé dans le

préambule de cette partie est

$$Q_*(t) = \frac{T_p\left(\frac{2t - \alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)}.$$

Déterminer également l'unique solution lorsque $p = 0$.

Partie III : Résolution itérative d'un système $AX = B$

On suppose de plus, dans cette partie, que les valeurs propres de A sont strictement positives et classées comme suit : $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On étudie une méthode itérative de résolution du système $AX = B$, où $B \in \mathbb{R}^n$, définie à partir d'une suite de réels strictement positifs $(\alpha_p)_{p \geq 0}$ et d'un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$ par

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p(B - AX_p).$$

Justifier l'existence et l'unicité de la solution X^* du système.

III.1. Dans cette question, on suppose la suite (α_p) constante, égale à $\alpha > 0$.

III.1.a. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p - X^* = (I - \alpha A)^p(X_0 - X^*)$.

III.1.b. Préciser les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de $I - \alpha A$, ainsi que $\rho(I - \alpha A) = \max_i |\mu_i|$. Tracer la courbe représentative de $f(\alpha) = \rho(I - \alpha A)$ pour $\alpha \geq 0$.

III.1.c. En déduire que la méthode converge vers X^* pour tout vecteur initial X_0 si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_n$.

Montrer que la convergence est optimale, en un sens que l'on précisera, pour $\alpha = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$ et montrer qu'alors, pour $p \geq 1$,

$$\|X_p - X^*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|.$$

Préciser le cas $p = 0$ et le cas $\lambda_1 = \lambda_n$.

III.2. On revient au cas général. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose

$$P_p(t) = \prod_{j=0}^{p-1} (1 - \alpha_j t), \quad P_p(A) = \prod_{j=0}^{p-1} (I - \alpha_j A).$$

III.2.a. Préciser les valeurs propres $\nu_1, \dots, \nu_n$ de $P_p(A)$ et montrer que

$$\rho(P_p(A)) = \max_i |\nu_i| \leq \sup\{|P_p(t)| : \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}.$$

III.2.b. Établir que $X_p - X^* = P_p(A)(X_0 - X^*)$, puis que

$$\|X_p - X^*\| \leq \sup\{|P_p(t)| : \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\} \|X_0 - X^*\|.$$

III.2.c. Lorsque p est fixé et $\lambda_1 < \lambda_n$, comment choisir les nombres $\alpha_j > 0$, $0 \leq j \leq p-1$, pour minimiser $\sup\{|P_p(t)| : \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}$? Établir qu'on a alors

$$\|X_p - X^*\| \leq \frac{1}{\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right|} \|X_0 - X^*\|.$$

En posant $q = \frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1}}$, montrer que

$$\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} q^{-p}.$$

Comparer la convergence de la méthode à pas constant optimal de III.1 avec celle de la méthode optimale pour l'horizon p développée dans cette question. Traiter séparément le cas $\lambda_1 = \lambda_n$.